

# Granično stanje naprezanja prema grafičkoj metodi S.Goluškeviča

---

Kučina, Lucija

Undergraduate thesis / Završni rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University North / Sveučilište Sjever**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:122:188284>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-15**



Repository / Repozitorij:

[University North Digital Repository](#)





**Sveučilište  
Sjever**

**Završni rad br. 332/GR/2018**

**Granično stanje naprezanja prema grafičkoj metodi S.  
Goluškeviča**

**Lucija Kučina, 1060/336**

Varaždin, rujan 2018. godine





# **Sveučilište Sjever**

**Odjel za Graditeljstvo**  
**Završni rad br. 332/GR/2018**

## **Granično stanje naprezanja prema grafičkoj metodi S. Goluškeviča**

**Student**

Lucija Kučina, 1060/336

**Mentor**

dr.sc. Aleksej Aniskin, v.pred.

Varaždin, rujan 2018. godine

# Prijava završnog rada

## Definiranje teme završnog rada i povjerenstva

|                             |  |              |                      |
|-----------------------------|--|--------------|----------------------|
| ODJEL                       | Odjel za graditeljstvo   |              |                      |
| PRISTUPNIK                  | Lucija Kučina  | MATIČNI BROJ | 1060/336             |
| DATUM                       | 30.08.2018.  | KOLEGIJ      | Otpornost materijala |
| NASLOV RADA                 | Granično stanje naprezanja prema grafičkoj metodi S. Goluškeviča   |              |                      |
| NASLOV RADA NA ENGL. JEZIKU | Limit stress state criteria by grafical method of S. Golushkevich  |              |                      |
| MENTOR                      | dr.sc. Aleksej Aniskin   | ZVANJE       | viši predavač        |
| ČLANOVI POVJERENSTVA        | 1. prof.dr.sc. Božo Soldo<br>2. dr.sc. Matija Orešković, v.pred.<br>3. dr.sc. Aleksej Aniskin, v.pred.<br>4. Željko Kos, predavač<br>5. Predrag Presečki, predavač |              |                      |

## Zadatak završnog rada

|      |             |
|------|-------------|
| BROJ | 332/GR/2018 |
| OPIS |             |

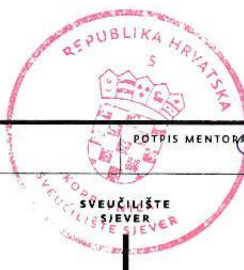
Pristupnik treba u radu općenito opisati pojam graničnog stanja naprezanja materijala. Zatim opisati osnovne pretpostavke, princip i metodologiju konstrukcije graničnog stanja naprezanja grafičkom metodom prema S. Goluškeviču na primjeru tla, opisati inženjerski način izračuna aktivnog tlaka tla na zid te usporediti rezultate sa postojećem metodom Coulomba.

U radu je potrebno obraditi sljedeće teme:

1. Uvodni dio - općenito o graničnom stanju naprezanja
2. Pretpostavke i princip grafičke metode S. Goluškeviča
3. Inženjerska primjena metode
4. Primjer rješenog zadatka aktivnog tlaka tla na zid i usporedba rezultata
5. Zaključak

ZADATAK URUČEN

6.9.2018.



## **Predgovor**

*Veliku zahvalnost u prvom redu, dugujem svom mentoru višem predavaču dr.sc. Alekseju Aniskinu. Hvala Vam što ste uvijek imali razumijevanja i kroz cijeli proces izrade Završnog rada pratili svojim savjetima, podrškom i znanjem. Izniman ste stručnjak kao i čovjek. Bili ste nam uzor i primjer, od srca Vam hvala !*

*Zahvaljujem se svojim roditeljima, kojima i posvećujem ovaj Završni rad. Hvala Vam na beskonačnom strpljenju, razumijevanju i ljubavi.*

*Hvala svim mojim prijateljima, dragim ljudima, profesorima Sveučilišta Sjever, na zajedničkim trenutcima, iskustvima i razgovorima koji su od mene načinili osobu.*

*Lucija Kučina*

## Sažetak

U završnom radu opisan je općeniti pojam graničnog stanja naprezanja, prema osnovnim pretpostavkama, principima i metodologijom konstrukcije graničnog stanja naprezanja grafičkom metodom prema S.Goluškeviču na primjeru tla. Opisani su pojmovi aktivni tlak i pasivni otpor, te inženjerski način izračuna aktivnog tlaka na zid sa usporedbom rezultata sa postojećom metodom Coulumba.

*Ključne riječi:* aktivni tlak, pasivni otpor, tlo, stvarna naprezanja, sumarna naprezanja, tlačno naprezanje, koherentno tlo, nekoherentno tlo, radijus vektor, klizne plohe.

## Summary

In the final work, the general term of the boundary state of stress is described by the basic assumptions, principles and methodology of the construction of the stress state by the graphical method according to S. Golushkevich on the soil sample. The terms used are active pressure and passive resistance, as well as an engineer's way of calculating active pressure on the wall with a comparison of results with the existing Coulumba method.

*Key words:* active pressure, passive resistance, soil, actual stresses, summative stresses, pressure strain, coherent soil, non-coherent soil, radius vector, sliding surface.



## Popis korištenih kratica

|                  |  |
|------------------|--|
| $f_{ck}$         | karakteristična tlačna čvrstoća betonskog valjka starog 28 dana. |
| $f_{pk}$         | karakteristična vlačna čvrstoća prenapregnutog čelika            |
| $f_{yk}$         | karakteristična granica popuštanja čelika                        |
| Pa               | Paskal   |
| F                | sila   |
| A                | površina   |
| C                | kohezija (sila vezanja)  |
| $K_A$            | koeficijent aktivnog tlaka                                       |
| $K_P$            | koeficijent pasivnog otpora                                      |
| $\sigma$         | naprezanje   |
| $\tau$           | posmična naprezanja  |
| $\sigma_c$       | naprezanja u betonu  |
| $\sigma_c$       | naprezanja u čeliku  |
| $\bar{\tau}$     | tangencijalna komponenta naprezanja                              |
| $\bar{\sigma}_n$ | normalna komponenta naprezanja                                   |
| $\bar{\sigma}$   | prosječno naprezanje   |
| S                | intenzitet tangencijalnog naprezanja                             |
| $\delta$         | kut između radijus vektora i osi                                 |
| $\bar{p}$        | komponenta stvarnog naprezanja                                   |
| $p$              | komponenta sumarnog naprezanja                                   |
| O`               | sumarni pol  |
| O                | stvarni pol  |
| P                | središte ravnine   |
| $\alpha, \beta$  | kutovi   |
| $\varphi$        | kut unutrašnjeg trenja   |

# Sadržaj

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.   | Uvod.....   | 6  |
| 2.   | Općenito o graničnom stanju naprezanja .....                                | 8  |
| 2.1. | Granična stanja aktivni tlak i pasivni otpor.....                           | 11 |
| 3.   | Pretpostavke i principi grafičke metode S. Goluškeviča .....                | 12 |
| 3.1. | Osnovni pojmovi i definicije.....   | 13 |
| 3.2. | Različiti analitički izrazi za granične uvjete.....                         | 18 |
| 3.3. | Formule koje opisuju granično stanje naprezanja tla .....                   | 21 |
| 3.4. | Granično stanje naprezanja elementarne prizme tla.....                      | 22 |
| 3.5. | Osnovni problem teorije granične ravnoteže tla .....                        | 25 |
| 3.6. | Analitičko rješenje temeljnog problema teorije granične ravnoteže tla ..... | 26 |
| 3.7. | Vrste graničnih stanja naprezanja tla; aktivno i pasivno stanje .....       | 28 |
| 4.   | Inženjerska primjena metode .....   | 31 |
| 4.1. | Grafičke metode za određivanje tlaka tla na potpornim zidovima.....         | 31 |
| 4.2. | Glavni zadatak.....   | 33 |
| 4.3. | Određivanje nastalog tlaka .....  | 36 |
| 5.   | Primjer rješeneog zadatka aktivnog tlaka na zid i usporedba rezultata ..... | 37 |
| 6.   | Zaključak.....  | 44 |
| 7.   | Literatura.....   | 45 |

## 1. Uvod

Potporne građevine preuzimaju bočne pritiske od tla, vode i/ili neke druge tvari koju podupiru. Stoga je potrebno poznavati te bočne pritiske, da bi se moglo proračunati opterećenja na potpornu građevinu, odrediti nosivi sustav i projektirati njezine dimenzije. Tlo je tvar vrlo složenog ponašanja. To je razlog zbog kojeg je u oblikovanju matematičkih i fizikalnih modela tla, potrebno teoriju prilagoditi razmatranom slučaju. Za neke slučajeve, zadovoljavajuće rezultate daje teorija elastičnosti. Za izučavanje loma u klasičnoj mehanici tla, koristi se teorija graničnih stanja plastične ravnoteže.

U teoriji graničnog stanja plastičnog loma pretpostavka je da se do trenutka dok naprezanje ne dosegne kritičnu vrijednost, ne pojavljuje nikakva deformacija. Nakon dosizanja kritične vrijednosti naprezanja, dolazi do loma, naprezanje više ne može rasti, a deformacija raste do trenutka promjene geometrije, koja pokrenuto tijelo dovodi u stanje ravnoteže. Odnos uspravnog i vodoravnog naprezanja u tlu je promjenjiv, u zavisnosti od veličine i smjera deformacije. Objašnjenje je dao Rankine (1857.) u teoriji plastičnog sloma.

Suvremena rješenja sve više uključuju Rankinovu teoriju preko modela tla u rješavanja zadataka vezanih uz proračune potpornih građevina. Ta rješenja su bliža teoriji elastičnosti i prihvaćaju deformacijska svojstva tla ne kao konstante, već kao promjenjive veličine koje slijede prirodno ponašanje tla pod opterećenjima (nelinearni modeli). Deformacijska svojstva i teoriju graničnih stanja moguće je putem konstitutivnih jednadžbi uklopiti u složene geotehničke proračune koji koriste numeričke analize. Granična stanja plastične ravnoteže osnivaju se na poznavanju Mohr-Coulombovog zakona, odnosno poznavanju parametara čvrstoće na smicanje, (kohezija,  $c$ , i kut unutrašnjeg trenja,  $\phi$ ). Bez poznavanja ovih parametara, rješenja pomoću ove teorije nisu moguća.

Današnje računarske mogućnosti omogućuju korištenje i drugih modela kao na primjer modela s očvršćivanjem ili omekšavanjem, a najčešće linearno elastičnih idealno plastičnih modela bez ili s omekšavanjem odnosno očvršćivanjem.

Masa tla može se pokrenuti kada se izvode uspravni ili strmo nagnuti iskopi u tlu. Tada se odstranjuje dio tla i na toj strani nestaje oslonca, pa naprezanje okomito na ravninu lica iskopa ima vrijednost,  $\sigma=0$ . Ukoliko se želi spriječiti promjena geometrije, pokrenutoj masi je potrebno dati oslonac ko ji će preuzeti opterećenje tlom i spriječiti pomak. Taj oslonac je potporna građevina. Želi li se izgraditi nasip na ograničenom prostoru, nedovoljnom da nagib pokosa bude stabilan, on se može izgraditi tako da mu se dio nožice i pokosa zamjeni potpornom građevinom. Obje gore navedene građevine biti će opterećene aktivnim tlakom onda i samo onda ako se tlu iza podupore omogućiti makar i mali pomak.

Masa tla se može pokrenuti i kad se na nju građevinom vrši pritisak. Tada se zbija dio tla do trenutka dok bočni pritisak ne dostigne graničnu vrijednost,  $\sigma_{h_{\min}} = \sigma_{h_{\max}}$ . Takvo stanje, pri kojem se građevinom djeluje na tlo na način da se tlo dovede u stanje sloma, naziva se pasivno stanje otpora jer je tlo pasivni učesnik u pomacima kojima se odupire.

Ako nema pomaka nema ni granično stanja loma. Aktivni tlak i pasivni otpor dva su krajnja slučaja bočnih napreznja u tlu. Pri vodoravnoj deformaciji u tlu, veličina koeficijenta bočnog tlaka ovisi o veličini i smjeru deformacije. Za postizanje pune vrijednosti koeficijenta aktivnog pritiska dovoljna je vrlo mala deformacija, tj. vrlo malo rastezanje, da bi koeficijent postigao punu vrijednost. Za aktiviranje pune vrijednosti pasivnog otpora potrebna je znatno veća tlačna deformacije tj. značajno zbijanje tla.

Ako u vodoravnom smjeru tlu nestaje oslonca, dolazi do sloma po kritičnom kliznom klinu. Kada se klin pridrži građevinom ona prihvaća najmanje moguće bočno opterećenje. Takvo je stanje Rankine nazvao aktivno stanje granične ravnoteže.

U drugom slučaju granično stanje nastaje kada građevina zbija tlo. Pri tom tlo u graničnom stanju pruža najveći mogući otpor takvom napreznju. To stanje Rankine je nazvao pasivno stanje granične ravnoteže.

Grafička metoda za određivanje pritiska tla na zid, u teoriji granične ravnoteže predložio je prof. S. Goluškevič. Ta metoda se odnosi posebno na određivanje pasivnog otpora tla na potporne zidove, a dobiveni rezultati su reda točnosti kao i kod već ranije provjerenih metoda. Prilikom određivanja aktivnog tlaka tla na okomite potporne stijene, njegove se metode temelje na Coulombovim pretpostavkama.

Grafička metoda Goluškevič [1], kako slijedi opširnije u nastavku.

## 2. Općenito o graničnom stanju naprezanja

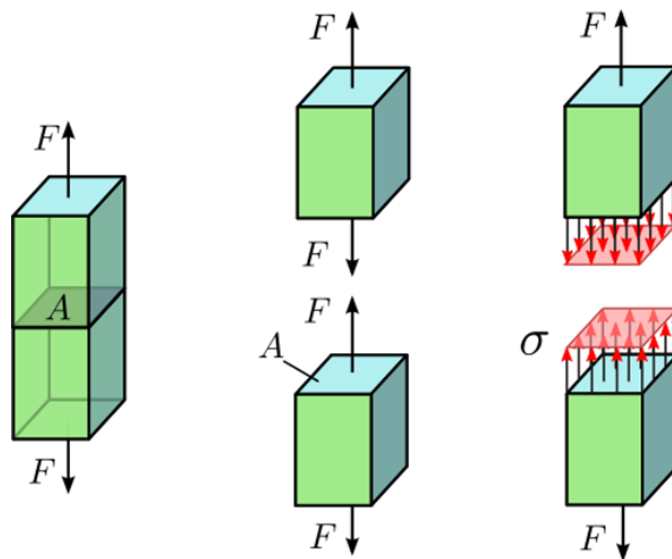
Granično stanje naprezanja predstavlja granicu kod prijelaza koje proračunska opterećenja izazivaju prekomjerne plastične deformacije i raspucavanje građevinskih konstrukcija. Takve pojave mogu ugroziti trajnost i uporabljivost građevine zbog čega se ograničava naprezanje u betonu i čeličnoj armaturi. Kako bi se izbjegla pojava uzdužnih pukotina u betonu (nastali hod sila cijepanja), time i gubitka trajnosnih svojstava armiranobetonskog elementa uslijed utjecaja okoliša, treba ispuniti uvjete za naprezanje u betonu.

Naprezanje je unutarnja sila raspodijeljena po jedinici površine nekoga čvrstog tijela koja se javlja kao reakcija na djelovanje vanjskih sila ili promjene temperature tijela, s jedinicom paskal ( $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$ ). Veličina naprezanja u nekoj točki tijela ovisi o orijentaciji presjeka tijela na kojem se naprezanje promatra. Takvo puno naprezanje je vektor općenito položen pod kutom prema normali na presjek i može se rastaviti na tri skalarne komponente vezane uz koordinatni sustav: jednu u smjeru normale  $x$  na presjek ( $\sigma_x$ , normalno naprezanje) i dvije na nju okomite koje leže u površini presjeka u smjeru preostalih dviju osi ( $\tau_{xy}$  i  $\tau_{xz}$ , tangencijalna ili posmična naprezanja). Uzimajući svaku os kao normalu na odgovarajući presjek, proizlazi da u svakoj točki tijela postoji devet komponenata naprezanja vezanih uz jedan koordinatni sustav, koje djeluju na element volumena i koje tvore takozvani tenzor naprezanja drugoga reda. Zbog simetričnosti toga tenzora, koja slijedi iz uvjeta ravnoteže elementa volumena, samo je 6 međusobno različitih komponenata, jer je  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  (na primjer  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ).

Ako na neko tijelo djeluju vanjske sile, one nastoje da razdvoje ili približe pojedine čestice tijela. Tome se tijelo suprotstavlja unutrašnjim silama koje djeluju među njegovim česticama. Unutrašnja sila podijeljena ploštinom (površinom) presjeka na kojem djeluje zove se naprezanje. Prema djelovanju razlikuju se normalno naprezanje i posmično naprezanje. Normalnim naprezanjem tijelo se opire međusobnom primicanju ili razmicanju svojih čestica. Posmičnim naprezanjem tijelo se opire klizanju jednog sloja čestica po drugom.

Najjednostavniji prikaz naprezanja se dobije ako se promatra štap što ga rastežu dvije jednake i suprotno usmjerene sile. Zato što pravac djelovanja sila prolazi kroz os štapa kaže se da je osno opterećen. Normalno naprezanje  $\sigma$  djeluje jednoliko po poprečnom presjeku ploštine  $A$ , pa je ukupna sila u presjeku  $\sigma \cdot A$ . Iz ravnoteže odsječenog dijela slijedi  $\sigma \cdot A = F$ , odnosno:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1.)$$

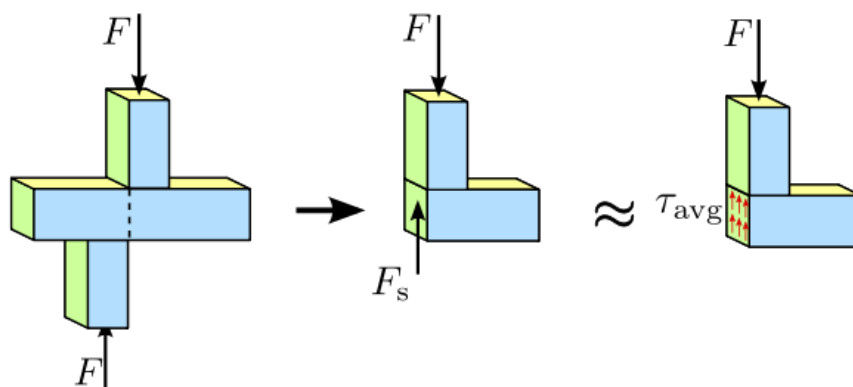


Slika 2.1. Prikaz normalnog naprezanja

Ako se promatra naprezanje u vodoravnoj šipki uslijed djelovanja dvije okomite šipke čije su osi pomaknute (kao na primjer škare), u presjeku vodoravne šipke pojavljuje se posmično ili tangencijalno naprezanje. Posmično naprezanje nije jednoliko raspodijeljeno po presjeku, ali je njegova prosječna vrijednost:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (2.2.)$$

Unutrašnje sile u tijelu općenito ne djeluju okomito na presjek, u općem slučaju djeluje normalno i posmično opterećenje.



Slika 2.2 Prikaz posmičnog naprezanja

Kako se u nekoj točki mijenja orijentacija koordinatnih osi, tako se mijenjaju i iznosi naprezanja. U svakoj točki tijela moguća je takva orijentacija osi prema kojima postoje samo normalna naprezanja, dok su posmična jednaka nuli. Ta tri naprezanja nazivaju se glavnim naprezanjima, od kojih su dva ekstremne vrijednosti  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  u toj točki. Zbog unutarnjih sila u tijelu nastaju deformacije s kojima su naprezanja vezana preko Hookeova zakona.

Podjela statičkih naprezanja prema načinu djelovanja mehaničkih vanjskih sila:

- okomito naprezanje (svijanje) je opiranje djelovanju vanjske sile okomito na os tijela;
- smično naprezanje (smicanje) je opiranje djelovanju vanjske sile tangencijalno na površinu tijela;
- torzijsko naprezanje (uvijanje) je opiranje tangencijalnom djelovanju na površinu tijela dvaju vanjskih sila suprotnih smjerova;
- vlačno naprezanje (rastezanje, osno naprezanje) je opiranje djelovanju vanjske sile okomito na graničnu plohu tijela i usmjereno od tijela prema van;
- tlačno naprezanje (sabijanje, osno naprezanje) je opiranje djelovanju vanjske sile okomito na graničnu plohu tijela i usmjereno prema središtu tijela.

Naprezanje u betonu može zbog nehomogenosti betona uzrokovati pojavu pukotina i pretjerane plastične deformacije a kod armature pretjeranu deformaciju armature koja može izazvati širenje pukotina. Graničnim stanjem naprezanja ograničava se prekomjerno naprezanje u materijalima slijedećim formulama:

- Naprezanje u betonu ( $\sigma_c$ ):

- za rijetku kombinaciju opterećenja:  $\sigma_c \leq 0.6 \cdot f_{ck}$
- za kvazistalnu kombinaciju opterećenja:  $\sigma_c \leq 0.45 \cdot f_{ck}$

(kvazistalna kombinacija opterećenja djeluje kroz duži vremenski period, više od polovice trajanja sustava)

- Naprezanje u čeliku ( $\sigma_s$ ):

- za rijetku kombinaciju opterećenja:  $\sigma_s \leq 0.8 \cdot f_{yk}$
- za naprezanja izazvana indirektnim djelovanjem:  $\sigma_s \leq 1.0 \cdot f_{yk}$
- naprezanje u čeliku za prednaprezanje:  $\sigma_s \leq 0.75 \cdot f_{pk}$

## 2.1. Granična stanja; aktivni tlak i pasivni otpor

Ugradimo li u homogenu normalno konsolidirano tlo horizontalne površine – bez poremećivanja – krutu zagatnu stijenu glatkih ploha, pritisci tla na zagatnu stijenu odgovarat će stanju mirovanja i bit će jednaki  $\sigma_{h0} = \sigma_v K_0$  za svaku dubinu.

Odgovarajuća Mohrova kružnica za neku izabranu dubinu u slijedećoj je skici ucrтана crtkano i crno: najveće normalno naprezanje je  $\sigma_v$ , a najmanje je  $\sigma_{h0}$ . Zakrećemo li tu krutu stijenu, time izazivamo horizontalno rastezanje u dijelu tla (lijeva strana na slijedećoj skici), te smanjivanje horizontalnih naprezanja i pritisaka tla na stijenu, pri čemu vertikalna naprezanja ostaju jednaka.

Odgovarajuće Mohrove kružnice imaju, dakle, najveća naprezanja stalne vrijednosti  $\sigma_v$ , a najmanja su vrijednosti  $\sigma_{h0}$ , koja u Mohrovom dijagramu putuje prema lijevo kako je prikazano crtkanom crvenom linijom. U donjoj skici ucrтана je i anvelopa sloma određena parametrima čvrstoće  $c$  i  $\varphi$  koja ograničava moguća stanja naprezanja. Dakle, najmanja vrijednost  $\sigma_{h0} \min = \sigma_A$  odgovara Mohrovoj kružnici koja tangira anvelopu sloma i u donjoj je skici prikazana crveno. Odgovarajuće stanje naprezanja zovemo aktivno Rankine-ovo stanje.

Pri tome pritisak tla zovemo *aktivnim tlakom* ako se radi o minimalnoj vrijednosti pritiska, tj. ako je omogućena za to potrebna deformacija. U normalno konsolidiranim tlima za razvoj aktivnog tlaka tj. aktivnog stanja potrebna je relativna horizontalna deformacija od nekoliko promila (što odgovara nekoliko milimetara pomaka za zid visine nekoliko metara). U prekonsolidiranim tlima potrebne su i znatno veće deformacije.

Koeficijent  $K_A$  zovemo koeficijent aktivnog tlaka. Radi li se o potpornoj konstrukciji vertikalne i glatke poledine, te homogenom zasipu horizontalne površine, dakle o Rankine-ovom aktivnom stanju, koeficijent aktivnog tlaka jednak je:

$$K_A = \operatorname{tg}^2(\pi/4 - \varphi/2) \quad (2.1.1.)$$

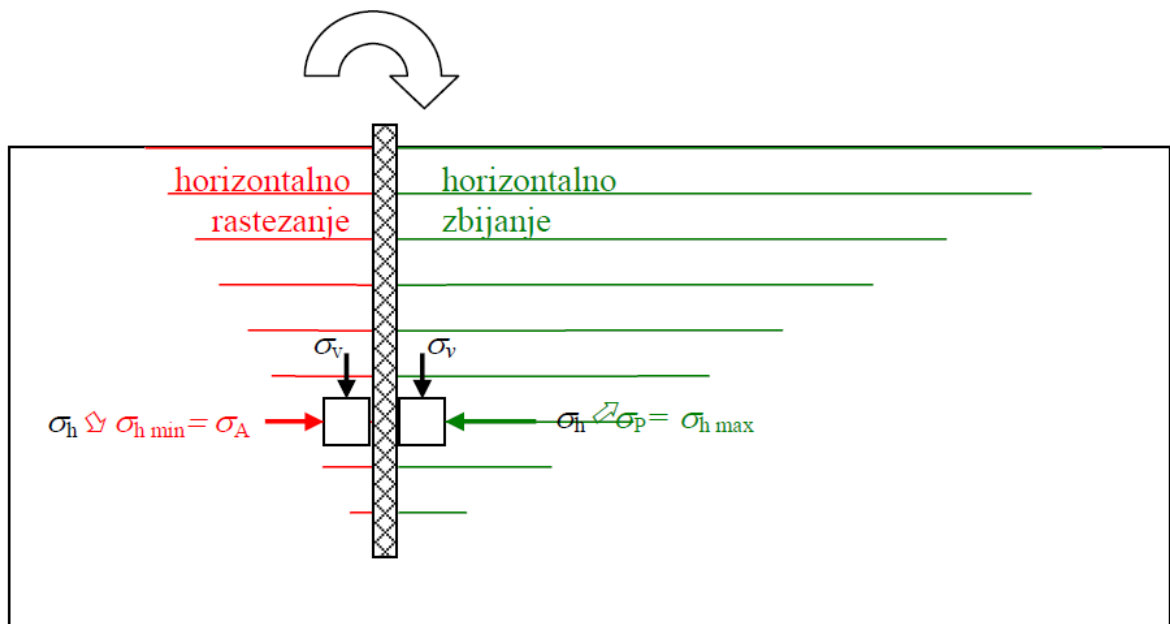
Pritisak tla na potpornu konstrukciju u uvjetima horizontalnog zbijanja do sloma zovemo *pasivnim otporom*, i možemo odrediti vertikalnim naprezanjem i koeficijentom pasivnog otpora :

$$\sigma_p = \sigma_v K_p + 2c\sqrt{K_p} \quad (2.1.2.)$$



Za pasivno Rankine-ovo stanje  $K_p = \tan^2(\pi/4 - \varphi/2)$ . Modelska ispitivanja pokazuju, međutim, da su plohe u kojima dolazi do sloma u ovim uvjetima zakrivljene, te se rijetko pretpostavlja Rankine-ovo stanje.

Gotova rješenja često se zasnivaju na kliznoj plohi oblika logaritamske spirale. U normalno konsolidiranim tlima za razvoj pasivnog otpora potrebna je relativna deformacija od nekoliko postotaka (dakle više centimetara horizontalnog pomaka zida ili vrha zida visine nekoliko metara). Za manje deformacije treba računati i sa manjim pritiscima tla. Što se tiče prekonsolidiranih tala, potrebna relativna deformacija može biti i tek nekoliko promila.



Slika 2.3. Područja velikih deformacija oko rotirane glatke vertikalne stijene ugrađene bez poremećivanja u horizontalno uslojeno tlo

### 3. Pretpostavke i princip grafičke metode S. Goluškeviča

#### 3.1. Osnovni pojmovi i definicije

Tlo čije čestice nemaju koheziju, nazivat ćemo nekoherentnim, a masa između čestica koje postoje kohezijske sile je koherentna. Jediničnu obujamske težina tla označit ćemo sa  $\gamma$ , kut unutrašnje trenja  $\varphi$ , a specifičnu silu kohezije  $c$  (tako ćemo nazvati privremenu otpornost tla jednakom rastezanju u svim smjerovima).

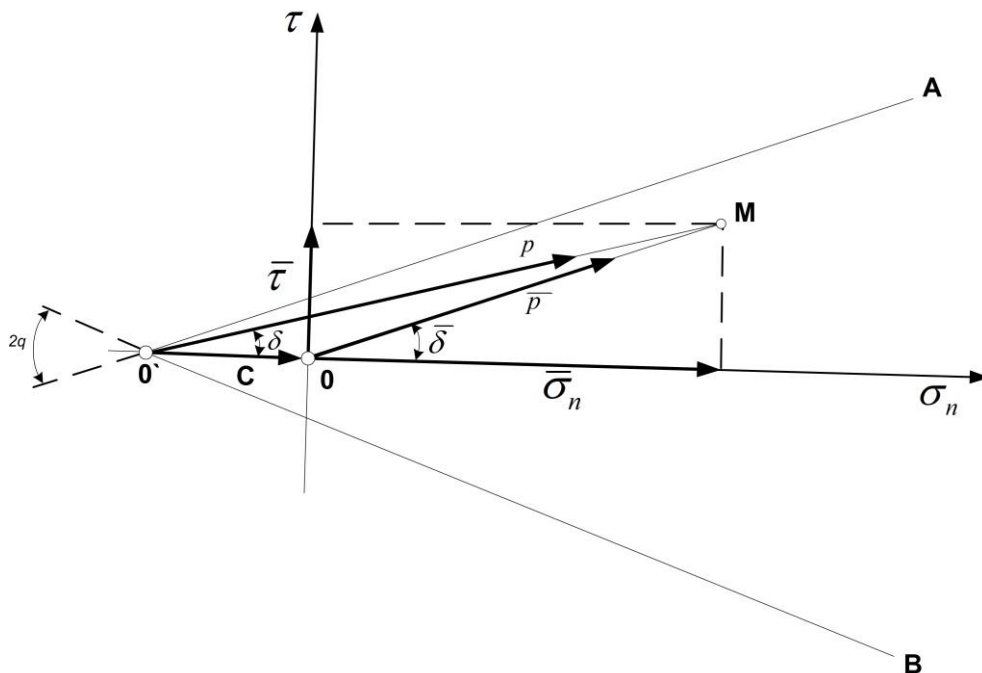
Rješenja različitih posebnih problema teorije graničnog stanja ravnoteže tla dobivaju se iz uvjeta ravnoteže i dodatnog uvjeta koji glasi: Ako se tlo nalazi u graničnom stanju ravnoteže, tada se kroz svaku točku područja u kojem se nalazi prolazi barem jedna elementarna ploha na kojoj vrijedi:

$$|\bar{\tau}| = (\bar{\sigma}_n + c) \operatorname{tg} \varphi \quad (3.1.)$$

gdje je  $\bar{\tau}$  tangencijalna a,  $\bar{\sigma}_n$ -normalna komponenta naprezanja koje djeluje na ovom mjestu (ovdje će se normalno tlačno naprezanje smatrati pozitivnim). Na svim drugim plohama vrijedi:

$$|\bar{\tau}| < (\bar{\sigma}_n + c) \operatorname{tg} \varphi \quad (3.2.)$$

Područja u tlu na kojima vrijedi jednakost (3.1.) nazivaju se *kliznim plohama*. Njihov položaj je određen stanjem naprezanja tla. Naprezanje koje djeluje na određenoj plohi prikladno je predstaviti točkom čija je apscisa normalna, a ordinata tangencijalna komponenta ukupnog naprezanja. Iz jednadžbi 3.1. i 3.2. proizlazi da točke koje predstavljaju naprezanja na kliznim plohama leže na linijama  $O'A$  i  $O'B$  (slika 3.1), a točke koje predstavljaju naprezanja na ostalim plohama unutar kuta  $\angle AO'B = 2\varphi$  formiranog spomenutim pravcima.



Slika 3.1.

Ravnina varijabli  $\bar{\sigma}_n$  i  $\bar{\tau}$  se zove ravnina naprezanja, a dio nje, zatvoren unutar kuta  $AO'B$ , je područje mogućih naprezanja, a granice, zrake  $O'A$  i  $O'B$  – graničnim pravcima. Radijus vektor točke, koja predstavlja naprezanje na bilo kojoj plohi (slika 3.1.), jednak je:

$$\bar{p} = \sqrt{\bar{\sigma}_n^2 + \bar{\tau}^2} \quad (3.3.)$$

Predstavlja ukupno naprezanje na odgovarajućoj plohi, dok kut  $\delta$  između radijus-vektora i osi  $O\sigma_n$  jednak je kutu između ukupnog naprezanja i normale na plohu.

Uvodi se pojam sumarnog naprezanja, koja su predstavljena radijus-vektorima koji spajaju vrh područja mogućih naprezanja točku  $O'$  (slika 3.1) - s točkom koja predstavlja naprezanje na danoj plohi. Iz sl. 3.1, lako je vidjeti da je sumarno naprezanje geometrijski zbroj stvarnog naprezanja i normalnog tlačnog naprezanja koje je jednako specifičnoj sili vezanja (koheziji)  $c$ . Iz stvarnog naprezanju na bilo kojoj elementarnoj plohi može se naći sumarno naprezanje i obrnuto, iz poznate vrijednosti sumarnog naprezanja, može se pronaći stvarno naprezanje. U prvom slučaju potrebno je zbrojiti normalno naprezanje sa stvarnim naprezanjem, a u drugom, sumarnog naprezanju dodati normalno naprezanja rastezanja, koje je po modulu jednako specifičnoj sili vezivanja.

Sada se mogu izvesti potrebne formule. Normalna  $\sigma_n$  i tangencijalna  $\tau$  komponente sumarnog naprezanja  $p$  mogu se izraziti preko komponenata stvarnog naprezanja  $\bar{p}$  na sljedeći način:

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n + c, \tau = \bar{\tau} \quad (3.4.)$$

Ukupno sumarno naprezanje određeno je formulom:

$$p = \sqrt{(\bar{\sigma}_n + c)^2 + \bar{\tau}^2} = \sqrt{\bar{p}^2 + 2\bar{p}c \cos \bar{\delta} + c^2} \quad (3.5.)$$

Iz čega slijedi da je kut između smjera sumarnog naprezanja i okomice na plohu jednak:

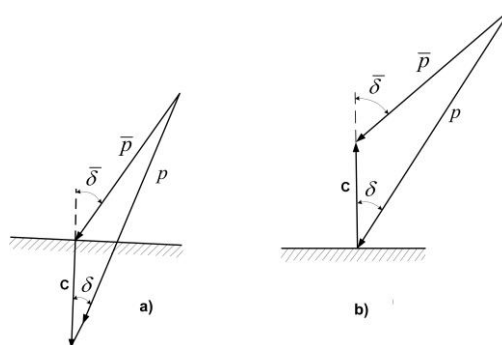
$$\delta = \arctg \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}_n + c} = \arctg \frac{\bar{p} \sin \bar{\delta}}{\bar{p} \cos \bar{\delta} + c} \quad (3.6.)$$

Prijelazne formule od sumarnih naprezanja k stvarnim izvode se na sličan način i imaju oblik:

$$\bar{p} = \sqrt{p^2 - 2pc \cos \delta + c^2} \quad (3.7.)$$

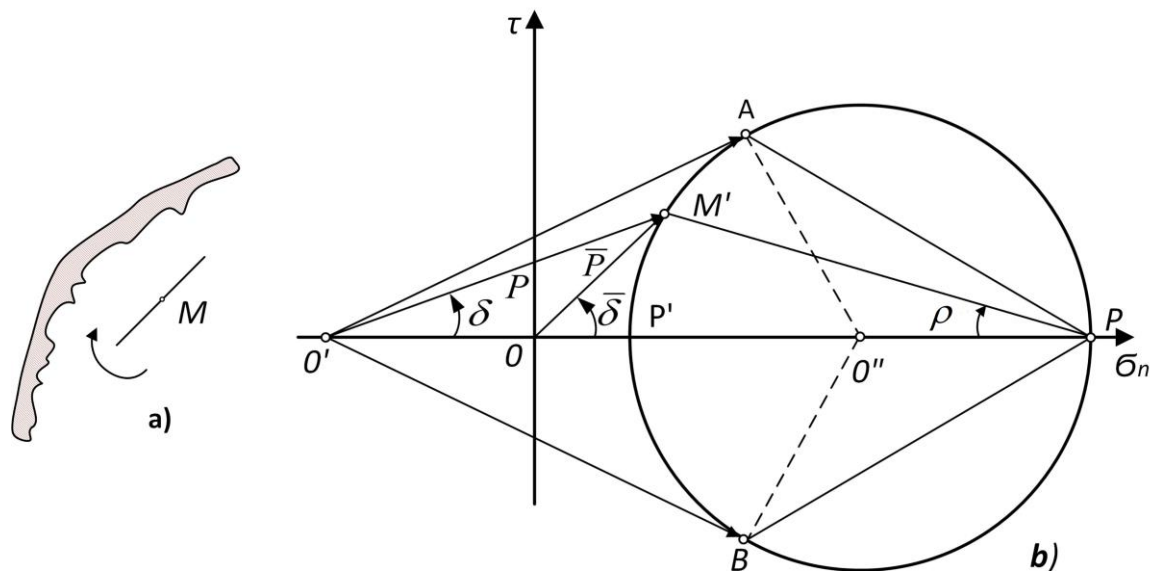
$$\bar{\delta} = \arctg \frac{p \sin \delta}{p \cos \delta - c} \quad (3.8.)$$

Izračuni prema navedenim formulama mogu se zamijeniti jednostavnim grafičkim operacijam. Na sl. 3.2a, pokazano kako iz poznate vrijednosti stvarnog naprezanja možemo odrediti sumarno naprezanje, a na sl. 3.2b je izvedena inverzna operacija.



Slika 3.2.

Jednostavnost prelaza od stvarnih napreznja do sumarnih i od sumarnih k stvarnim, često dopušta da se problem određivanja stvarnih napreznja zamijeni jednostavnijim problemom određivanja sumarnih napreznja. U nastavku ćemo sustavno iskoristiti ovu mogućnost, koju je, vjerojatno, prvi istaknuo A. Caquot [2]



Slika 3.3.

Razmotrimo sada tlo koje je u graničnom stanju napreznja. Preko bilo koje točke u tlu  $M$  (sl. 3.3a), nacrtamo elementarnu plohu, dok na ravnini napreznja (sl. 3.3b) nacrtamo odgovarajuću točku  $M'$  koja prikazuje napreznje na toj plohi. Pretpostavimo da nacrtana ploha kroz točku  $M$ , onda će se napreznje na njoj mijenjati, a točka  $M'$  koja predstavlja napreznja na plohi opisuje određenu krivulju. U Otpornosti materijala već je dokazano da je ta krivulja kružnica čiji centar leži na osi  $O\sigma_n$ , a koja se naziva Mohrovom kružnicom. Kao što je poznato, njezin radijus-vektor proizvoljne točke, na primjer, točke  $M'$ , predstavlja napreznja na ravnini  $M'P$ , koja zatvara s prvom glavnim ravninom (ravninom na kojoj djeluje manje glavno napreznje) kut  $M'P'P = \rho$ . Kut  $M'OP = \bar{\delta}$ , kao što je već prije prikazano, jednak je kutu odklona ukupnog napreznja od okomice na ravninu  $PM'$ . Mohrova kružnica, prikazana na slici 3.3b, karakterizira granično stanje napreznja tla u području točke  $M$  te se stoga naziva graničnom. Specifičnost Granične Mohrove kružnice je sljedeća: rotirajuća ravnina, koja prolazi kroz točku  $M$  u tlu (Slika 3.3a), u jednom od mogućih položaja podudara se s ravninom sloma; točke Granične Mohrove kružnice, koja predstavlja napreznje na toj ravnini se mora nalaziti na jednom od graničnih pravaca Coulomba, a iz razloga da Mohrova kružnica ne može presijecati granične pravce, to onda mora biti točka tangiranja; ako granična kružnica tangira jedan granični pravac, onda mora tangirati i drugi; dvije točke tangiranja odgovaraju dvjema ravninama klizanja. Iz navedenog proizlazi, da

kroz svaku točku tla u graničnom stanju naprezanje prolazi ne jedna, nego dvije ravnine klizanja, i da je granična Mohrova kružnica jest kružnica upisana u kut između graničnih linija. Simetrala tog kuta se naziva glavnim promjerom granične Mohrove kružnice, vrh  $O'$  - sumarnim polom, ishodište  $O$  – stvarnim polom, a točka  $P$  središtem ravnine. Sada je lako saznati osnovna svojstva graničnog stanja naprezanja tla. Da bismo to učinili, vratimo se na Sl. 3.3b. Spojimo točke tangiranja granične kružnice i graničnih pravaca -  $A$  i  $B$ , sa središtem kružnice  $O''$  i središtem ravnine  $P$  dužinama. Dužine  $AP$  i  $BP$  prikazuju ravnine klizanja (sloma). Iz četverokuta  $O'AO''B$  nalazimo središnji kut  $\angle O'AO''B = \pi - 2\rho$ . Očito je da upisani i naslonjeni na luk  $AB$  kut između ravnina klizanja  $\angle APB = \frac{1}{2} \angle O'AO''B = \frac{\pi}{2} - \rho$ .

Izračunajmo sada kut između smjera ukupnog sumarnog naprezanja koje djeluje na kliznu plohu  $AP$  i plohom  $BP$ . Njega možemo odrediti u skladu s formulom  $\alpha = \beta - \delta$ , u kojoj je traženi kut  $\alpha$ , a kut  $\beta$  je kut između okomice na ravninu  $AP$  i ravnine  $BP$ , dok je  $\delta$  kuta otklona ukupnog sumarnog naprezanja ravnini  $AP$  od okomice na ravninu. U razmatranom slučaju,

$\beta = \frac{\pi}{2} - \angle APB = \rho$  i  $\delta = \rho$ . Kada uvrstimo navedene izraze za  $\beta$  i  $\delta$  u izraz za  $\alpha$ , možemo vidjeti

da je  $\alpha = 0$  i da je, prema tome, sumarna naprezanja koje djeluje na ravnini  $AP$  paralelno ravnini  $BP$ . Na sličan način se može dokazati da je sumarno naprezanje koje djeluje na ravnini  $BP$  je paralelno ravnini  $AP$ . Sve ovo, kao i razmatranje slike 3.3b dopušta da se donesu sljedeći opći zaključci.

Ako se tlo nalazi u graničnom stanju naprezanja onda:

- 1) kroz svaku točku tla prolaze dvije klizne plohe koja se presijecaju pod ostrim kutem  $\frac{\pi}{2} - \rho$ ;
- 2) stvarno i sumarno naprezanje jednaki su na kliznim plohama koje se presjecaju;
- 3) sumarno naprezanje na jednoj od kliznih ploha paralelno je drugoj ravnini;
- 4) prva glavna ravnina dijeli na pola kuta između ploha klizanja.

U nastavku ćemo se osloniti na ove jednostavne i poznate zaključke.

### 3.2. Različiti analitički izrazi za granične uvjete

Formula (3.1.) je uvjet, čije je ispunjavanje neophodno kako bi tlo u blizini točke koja se razmatra bilo u graničnom stanju naprezanja, u nastavku ćemo ju zvati graničnim uvjetom. Nju često nazivaju Coulombova [3] formula ili Uvjetom Coulomba po francuskom inženjeru i znanstveniku koji je 1773. g. formulirao osnovne pretpostavke Teorije granične ravnoteže, te je u svom radu dao njihovu prvu praktičnu primjenu za probleme izračuna lukova i bočnog tlaka tla na potporni zid.

Ravninsko stanje naprezanja u području točke obično se određuje vrijednostima normalnih naprezanja  $\bar{\sigma}_\alpha$ ,  $\bar{\sigma}_\beta$  i tangencijalnog  $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$  naprezanja koji djeluju na elementarne plohe koji se presijecaju u razmatranoj točki pod pravim kutom. Granični uvjet (3.1.) ne daje neposredan odgovor na pitanje odnosa između veličina naprezanja  $\bar{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\beta$  i  $\tau_{\alpha\beta}$ , pri kojem je stanje naprezanja tla granično, ali se taj izraz može transformirati tako da je to jasno vidljivo.

Na ravnini naprezanja konstruiramo Mohrovu kružnicu, koja karakterizira stanje naprezanja tla u blizini točke, koja leži na presijecištu  $d\alpha$  i  $d\beta$ . U tu svrhu označavamo točke  $C_\alpha$  i  $C_\beta$  koji predstavljaju naprezanja na plohama  $d\alpha$  i  $d\beta$ , spojimo  $C_\alpha$  i  $C_\beta$  dužinom, ta dužina će biti promjer Mohrove kružnice (Slika 3.4). Pretpostavimo da je nacrtana kružnica granična. Iz njegovog sumarnog pola, točke  $O'$  konstruiraju se granični pravci. Oni će biti tangente na kružnicu u točkama  $A_\alpha$  i  $A_\beta$ .

Iz sl. 3.4 se vidi da se apscisa središta granične Mohrove kružnice može biti izračunata prema formuli:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_\alpha + \bar{\sigma}_\beta) \quad (3.9.)$$

Pri čemu je polumjer  $s$  jednak

$$s = \sqrt{\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma}_\beta)^2 + \bar{\tau}_{\alpha\beta}^2} \quad (3.10.)$$

Pri čemu je očito da je

$$s = (\bar{\sigma} + c) \sin \varphi = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_\alpha + \bar{\sigma}_\beta + 2c) \sin \varphi \quad (3.11.)$$

Iz čega sljedi da je

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma}_\beta)^2 + \bar{\tau}^2_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_\alpha + \bar{\sigma}_\beta + 2c)\sin\varphi \quad (3.12.)$$

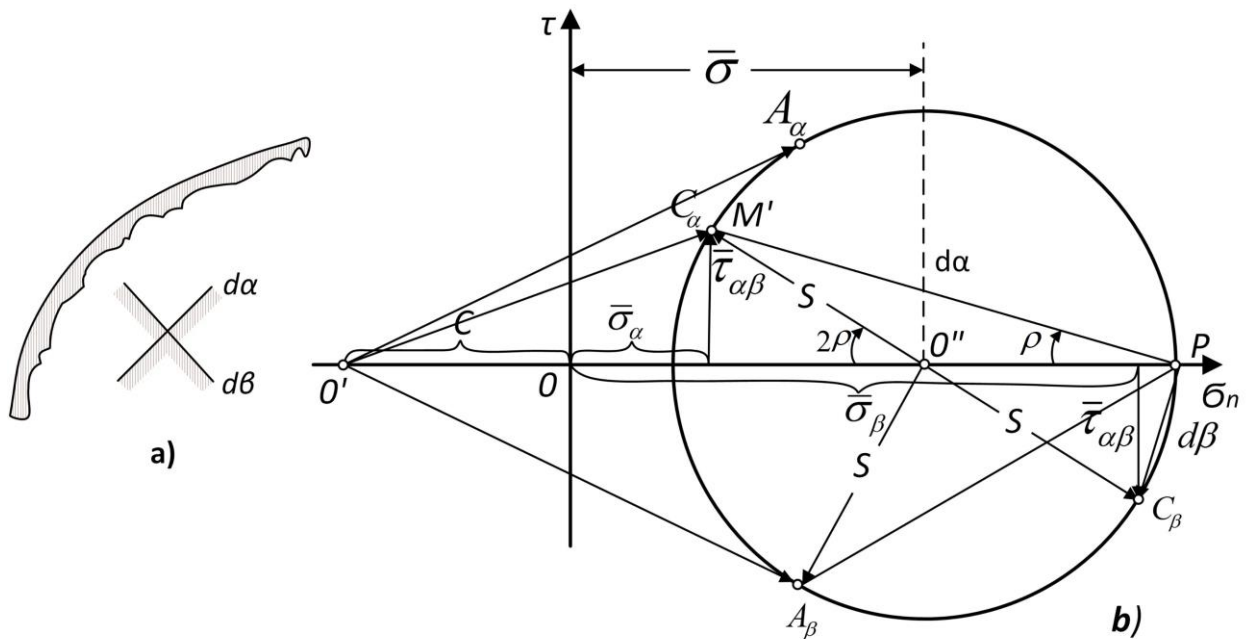
Ta se formula naziva uvjetom čvrstoće Rankinea-Mohra [3] i ponekad se piše u obliku

$$(\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma}_\beta)^2 + 4\bar{\tau}^2_{\alpha\beta} = (\bar{\sigma}_\alpha - \bar{\sigma}_\beta + 2c)^2 \sin^2\varphi \quad (3.13.)$$

Zamjenjujući u izrazima (3.11.) i (3.12.) stvarna naprezanja sumarnima, koristeći u tu svrhu formulu (3.3.), pretvaramo ih u oblik:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + \tau^2_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)\sin\varphi \quad (3.14.)$$

$$(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2_{\alpha\beta} = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 \sin^2\varphi \quad (3.15.)$$



Slika 3.4.

Ako su ravnine  $da$  i  $db$  glavne ravnina onda vrijedi  $\bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_2$ ,  $\bar{\sigma}_\beta = \bar{\sigma}_1$  i  $\bar{\tau}_{\alpha\beta} = 0$ . Uvjet (3.5.) u ovom slučaju poprima oblik:



$$\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 = (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + 2c) \sin \varphi \quad (3.16.)$$

a njegova modifikacija (3.17.) glasi:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi \quad (3.17.)$$

Iz jednadžbe (3.17.) proizlazi :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3.18.)$$

Stoga je omjer sumarnih glavnih naprezanja u svim točkama homogenog tla u graničnom stanju naprezanja konstantan.

Izvedene formule predstavljaju različite analitičke izraze graničnog stanja (3.1), koje je u konačnici posljedica osnovnog svojstva graničnog stanja naprezanja tla. Za njegov opis prihvaćamo sljedeće definicije:

a) veličinu određenu formulom (3.1.) ćemo nazvatni prosječnim naprezanjem u razmatranoj točki

b) veličinu određenu formulom

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \quad (3.19.)$$

nazovimo sumarnim prosječnim naprezanjem;

c) veličinu određenu formulom (3.10.), koja je numerički jednaka tangencijalnom naprezanju na ravnini, koja djeli na pola kut između glavnih ravnina, ćemo nazvati intenzitetom tangencijalnog naprezanja. Intenzitet tangencijalnog naprezanja se ne mijenja ako u (3.10.) zamijenimo stvarna naprezanja na sumarna. Zamjenjujući (3.11.) prosječno naprezanje  $\bar{\sigma}$  izraženim preko sumarnog srednjeg naprezanja, dobivenog iz (3.16.), dobivamo formulu:

$$s = \sigma \sin \varphi \quad (3.20.)$$

### 3.3. Formule koje opisuju granično stanje napreznja tla

Napreznja  $\bar{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\beta$  i  $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ , koja djeluju na ravninama  $d\alpha$  i  $d\beta$ , jednostavne su funkcije srednjeg napreznja, koje djeluju na mjestima presijecanja ravnina, i kuta  $\varphi$ , pod kojim ravnina presijeca s prvom glavnom ravninom. Iz sl. 3.1 je lako vidjeti da:

$$\bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma} - (\bar{\sigma} + c) \sin \varphi \cos 2\rho \quad (3.21.)$$

$$\bar{\sigma}_\beta = \bar{\sigma} + (\bar{\sigma} + c) \sin \varphi \cos 2\rho \quad (3.22.)$$

$$\bar{\tau}_{\alpha\beta} = (\bar{\sigma} + c) \sin \varphi \cos 2\rho \quad (3.23.)$$

Ako zamijenimo u ovim jednadžbama stvarna napreznja sumarnima, onda dobivamo povoljan oblik za daljni izračun:

$$\sigma_\alpha = \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\rho) \quad (3.24.)$$

$$\sigma_\beta = \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\rho) \quad (3.25.)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \sigma \sin \varphi \cos 2\rho \quad (3.26.)$$

U nastavku je potrebna formula iz koje se može odrediti srednje sumarno napreznje u razmatranoj točki iz poznate vrijednosti i smjera sumarnog napreznja, koje djeluje na bilo kojoj ravnini kroz tu točku. Pretpostavimo da je  $d\alpha$  ravnina na kojoj djeluje zadano napreznje. Ako izrazimo u formuli (3.15.)  $\sigma_\beta$  preko  $\sigma_\alpha$  i sumarnog napreznja  $\sigma$  dobivamo:

$$\sigma_\beta = 2\sigma - \sigma_\alpha \quad (3.27.)$$

Zazim (3.27.) napišemo u obliku:

$$\sigma^2 \cos^2 \varphi - 2\sigma\sigma_\alpha + \sigma_\alpha^2 + \tau_{\alpha\beta}^2 = 0 \quad (3.8.)$$

Rješavanjem dobivene kvadratne jednadžbe po  $\sigma$  i uzimajući u obzir da je

$$\sigma_{\alpha} = p \cos \delta, \tau_{\alpha\beta} = p \sin \delta \quad (3.29.)$$

dobivamo:

$$\sigma = \frac{p}{\cos^2 \varphi} \left( \cos \delta \pm \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta} \right) \quad (3.30.)$$

Dobivena formula pokazuje da problem određivanja sumarnog srednjeg napreznja ima dva rješenja. Prema V.V. Sokolovskom [3], stanje tla pri kojem se javlja veća vrijednost napreznja  $\sigma$ , ćemo nazvat *maksimalnim*, a stanje tla pri kojem se javlja manja vrijednost napreznja  $\sigma$ , ćemo nazvati *minimalnim*.

### 3.4. Granično stanje napreznja elementarne prizme tla; Sustav karakterističnih kružnica

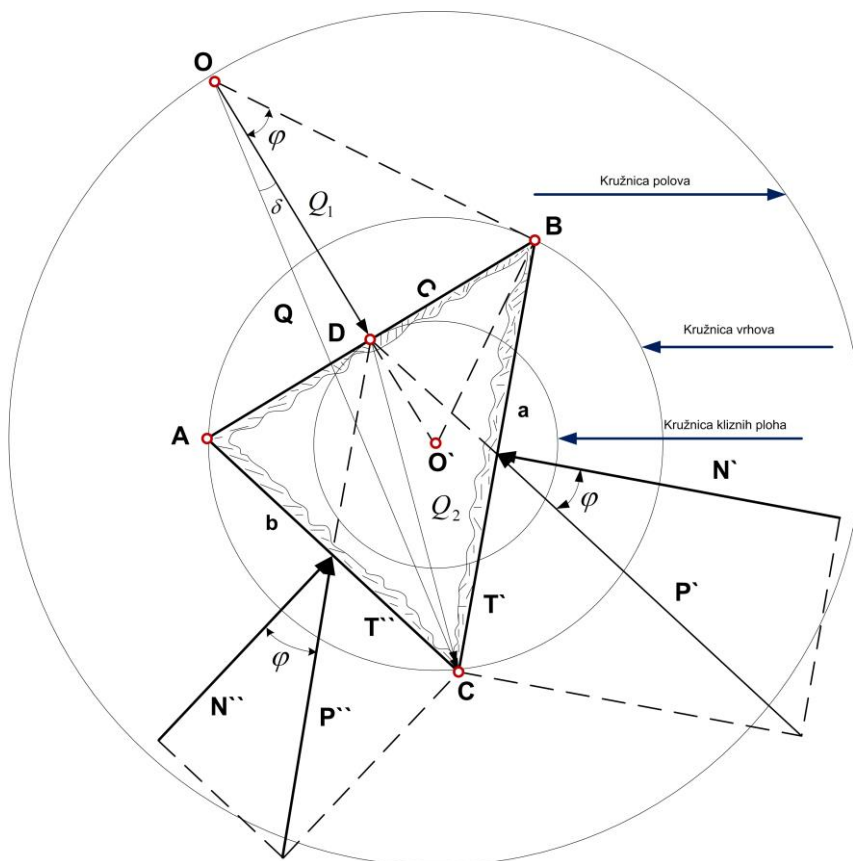
Razmotrimo graničnu ravnotežu elementarne prizme u tlu koja je omeđena proizvoljnom ravninom  $AB = c$  i dvije elementarna ravnine klizanja  $AC = b$  i  $BC = a$  (slika 3.5). Kao što je već prikazano u poglavlju 1, duž ravnine  $AC$  ove prizme djeluju sumarna napreznja  $p_s$  koji su paralelni ravnini  $BC$ . Ta napreznja proizvode silu  $P'' = p_s b$  koja je paralelna s ravninom  $BC$ . Na ravnini  $BC$  napreznja su također jednaka  $p_s$  i paralelna su s ravninom  $AC$ . Njihova rezultatna sila bit će jednaka  $P' = p_s b$  i djelovat će paralelno ravnini  $AC$ .

Mjerilo sila ćemo odabrati tako da su komponente sila  $P'$  i  $P''$  paralelne s ravninama na kojima djeluju, tj. sile  $T'$  i  $T''$ , budu jednake  $\frac{a}{2}$  i  $\frac{b}{2}$ . Prema tome duljine komponenata okomitih na ravnine, tj. sile  $N'$  i  $N''$ , bit će jednake  $\frac{a}{2 \operatorname{tg} \varphi}$  i  $\frac{b}{2 \operatorname{tg} \varphi}$ .

Sile  $N'$  i  $N''$  izazvati će ujednačenu kompresiju razmatrane prizme sa svih strana. Oni su uravnoteženi normalnim napreznjem  $\sigma_n$  koje djeluju na ravnini  $AB$ . Rezultanta sila tog napreznja  $Q_1 = \sigma_n c$ , pri odabranom mjerilu sila biti će jednaka  $\frac{c}{2 \operatorname{tg} \varphi}$ .

Sila  $T'$  i  $T''$  uravnotežit će se silom čiji pravac djelovanja mora proći kroz točku  $C$  i prepoloviti ravninu  $AB$ . Pri odabranom mjerilu sila ona će biti prikazana vektorom  $Q_2$ , čija je duljina jednaka duljini težišnice  $CD$  trokuta  $ABC$ : lako je primijetiti da ta težišnica predstavlja dijagonalu paralelograma konstruiranog silama  $T'$  i  $T''$ .

Silu  $Q$  koja uravnotežuje rezultantu sila  $P'$  i  $P''$  (slika 3.5) prikazat ćemo kao rezultantu sila  $Q_1$  i  $Q_2$  (slika 3.5). Točka  $O$  u kojoj je početak vektora  $Q$  naziva se pol prizme.



Slika 3.5

Sada pretpostavljamo da se kut između okomice na ravninu  $AB$  i sumarnog naprezanja koje djeluje na njoj neprestano mijenja. Pri konstantnom promijeni kuta  $\delta$  vektor sile  $Q$ , koji predstavlja rezultantu sustava naprezanja raspodijeljenih po ravnini  $AB$ , bude se rotirao oko točke  $O$ , a vrh  $C$  trokuta  $ABC$ , u kojem se presijecaju ravnine klizanja  $AC$  i  $BC$ , i nalazi se kraj vektora  $Q$ , svojim gibanjem će opisati neku krivulju. Ta krivulja mora biti geometrijsko mjesto točaka iz kojih je dužina  $AB$  vidljiva pod konstantnim kutom jednakim kutu između ravnina klizanja. Očito je da je takva krivulja kružnica opisana oko trokuta  $ABC$ . Također je očito da je

pol prizme ABC - točka O leži na produžetku promjera ove kružnice, koji je okomit na ravninu AB. Kružnicu opisanu oko ABC nazivamo kružnica vrhova.

Pretpostavimo sada da je razmatrana elementarna prizma, bez promjene oblika rotira oko središta kružnice vrhova. Tada će pol prizme - točka O opisati kružnicu, koja se naziva kružnica polova. Udaljenost između traga ravnine AB i središta kružnice vrhova će ostati konstantna. Iz ovog zaključujemo da će za sve moguće položaje ravnine AB ona će dodirivati neku kružnicu. Ova se kružnica naziva kružnica ravnina. Na sl. 3.5 konstruirana je kružnica polova, kružnica vrhova i kružnica ravnina. Skup ovih koncentričnih kružnica zove se sustav karakterističnih krugova.

Između radijusa kružnica ovog sustava postoje jednostavni analitički odnosi. Na sl. 3.5 konstruiran je vektor OB smjer kojeg se podudara sa smjerom tangente na kružnicu vrhova u točki B. Ovaj vektor određuje krajnji mogući položaj rezultantne sile Q, pri kojem je kut između Q i okomice na ravninu AB jednak  $\rho$ . Spajanjem točke B sa središtem sustava karakterističnih kružnica dužinom dobivamo pravokutni trokut OBO', kut kojeg u vrhu O jednak  $\rho$ , hipotenuza jednaka polumjeru kružnice polova, kateta nasuprot vrha O - radijus kružnice vrhova  $r_2$ , dok projekcija tog kateta na hipotenuzu jednaka radijusu kruga ravnina. Iz trokuta OBO' se lako izračuna da je:

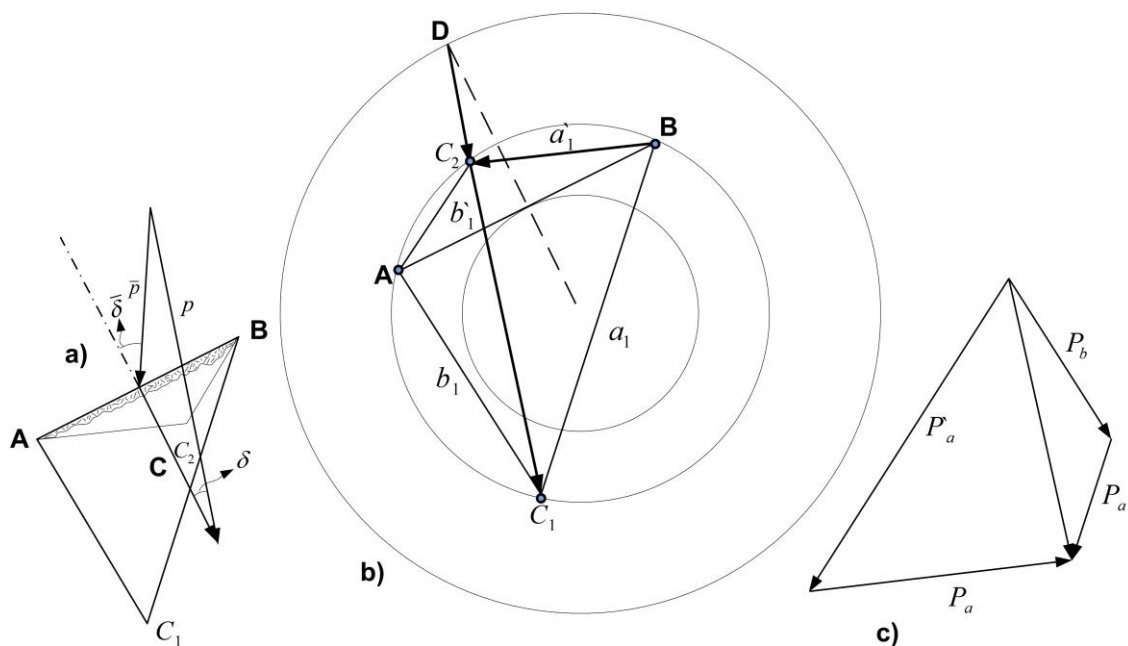
$$r_2 = r_1 \sin \varphi, \quad r_3 = r_2 \sin \varphi = r_1 \sin^2 \varphi \quad (3.31.)$$

Sustav karakterističnih kružnica je temelj, na kojem se provode geometrijske konstrukcije potrebne za grafičko rješavanje mnogih problema teorije granične ravnoteže tla, a prije svega za rješavanje osnovnog problema ove teorije – određivanja ravnina klizanja i aktivnom i pasivnom stanju.

### 3.5. Osnovni problem teorije granične ravnoteže tla

Osnovnim problemom S. Goluškevič u svojoj metodi nazvao je sljedeći zadatak:

Unutar granično napregnutog tla (ili na njegovoj granici), zadana je elementarna ravnina AB, na kojoj djeluje naprezanje  $p$ , poznato po veličini i smjeru (sl. 3.6a). Potrebno je odrediti smjer ravnina klizanja koje prolaze kroz rubne točke A i B zadane ravnine.



Slika 3.6

Grafičko rješenje ovog problema prikazano je na sl. 3.6. Na slici 3.6a prikazani su smjer zadane ravnine i naprezanja  $p$  koje djeluje na nju, a također je nacrtana grafička konstrukcija kojoj se određuje sumarno naprezanje iz zadanog stvarnog naprezanja. Slična konstrukcija je prikazana ranije na slici 3.2a. Glavni dio rješenja, osnovnog problema prikazan je na slici 3.6b, ono se sastoji od sljedećih koraka. Prvo se crta sustav karakterističnih kružnica te se crta tetiva  $AB$  kružnice vrhova, koja je tangenta na kružnicu ravnina i paralelna zadanoj ravnini  $AB$ . Kroz središte sustava kružnica crta se pravac okomit na  $AB$  i određuje se točka  $O$  u kojoj on presječe kružnicu polova. Iz  $O$  se crta pravac paralelan sumarnom napreznju  $p$  koji presijeca kružnicu vrhova u točkama  $C_1$  i  $C_2$ . Zatim se crtaju dužine  $AC_1$ ,  $BC_1$ ,  $AC_2$  i  $BC_2$ . Dužine  $AC_1$  i  $BC_1$  određuju jedan od mogućih smjerova ravnina klizanja, a dužine  $AC_2$  i  $BC_2$  su njihovi drugi mogući smjerovi.

Na sl. 3.6c pokazano je kako prema poznatoj sumarnoj sili koja djeluje na zadanu ravninu odrediti sumarne sile koje djeluju na ravnine klizanja. Grafička konstrukcija se temelji na svojstvima graničnog stanja naprezanja tla i sastoji se od rastavljanja zadane sumarne sile na komponente paralelno s ravninama klizanja.

Obzirom da osnovni problem ima dva rješenja, poligon sila, prikazan na slici 3.6c, sastoji se od dva trokuta sila. Stranice  $P_a$  i  $P_b$  predstavljaju sumarne sile na ravnine klizanja  $AC_1$  i  $BC_1$ , dok  $P_a'$  i  $P_b'$  predstavljaju sumarne sile na klizne ležaje  $AC_2$  i  $BC_2$ . Rješenje završava ucrtavanjem ravnina klizanja na sl. 3.6a, koje su paralelne  $AC_1$  i  $BC_1$  a koji definiraju jednu od

mogućih oblika elementarne prizme u graničnom stanju naprezanja, koja se može formirati ispod ravnine  $AB$ , i ucrtavanjem ravnina klizanja koji su paralelne  $AC_2$  i  $BC_2$  koje definiraju drugi mogući oblik prizme. Da bi se potvrdila valjanost rješenja gore opisanog osnovnog problema, dovoljno je usporediti konstrukciju prikazanu na slici 3.6b, s konstrukcijom na sl. 3.5, gdje trokut  $ABC_1$ , konstruiran na sl. 3.6b, može se smatrati kao elementarna prizma u graničnom stanju naprezanja, isto kao i prizma  $ABC$ , granična ravnoteže koje razmotrena u prethodnom poglavlju.

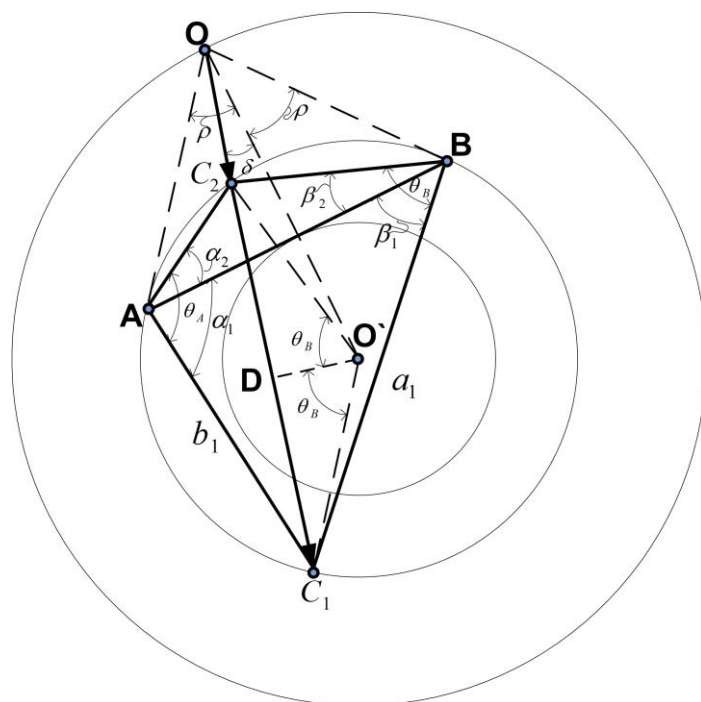
Gornja metoda za rješavanje osnovnog problema graničnog stanja naprezanja temelji se na rezultatima izravnog razmatranja graničnog stanja ravnoteže elementarne prizme tla i nema nikakve veze sa teorijom graničenih Mohrovih kružnica. Međutim, valja napomenuti da postoji neka veza između sustava karakterističnih krugova i granične Mohrove kružnice, ona se sastoji u tome da se kružnica vrhova može smatrati jednom od graničnih Mohrovih kružnica.

### 3.6. Analitičko rješenje temeljnog problema teorije granične ravnoteže tla

Analitičko rješenje osnovnog problema dano je formulama pomoću kojih je moguće izračunati kutove između ravnina klizanja i zadane ravnine.

One se mogu izvesti iz formula poglavlja 3.3, ali je jednostavnije koristiti rezultate iz prethodnog poglavlja. Ponovimo konstrukciju sa slike 3.6b (slika 3.7) te nacrtamo dodatne dužine koje spajaju središte sustava karakterističnih krugova i pol s točkama  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$  i  $C_2$ . Razmotrimo četverokut  $AC_1BC_2$ , budući da je upisan u kružnicu, zbroj njegovih kutova u vrhovima  $A$  i  $B$  mora biti jednaka zbroju dva prava kuta, tj.  $180$ , pa tako slijedi:

$$\theta_A = \pi - \theta_B, \quad \cos \theta_A = -\cos \theta_B \quad (3.32.)$$



Slika 3.7

Središnji kut  $C_1O'C_2$ , koji se opira na luk  $C_1, C_2$ , dvostruko je veći od upisanog kuta  $\theta_B$ , koji se opira na isti luk. Iz centra sustava karakterističnih kružnica spuštamo okomicu na liniju  $C_1C_2O$  i označimo  $r_1$  dužinu polumjera kružnice polova, a  $r_2$  dužinu polumjera kružnice vrhova, tako se može zaključiti da:

$$O'D = r_1 \sin \delta = r_2 \cos \theta_B \quad (3.33.)$$

Ali obzirom na jednadžbu (3.31)  $r_2 = r_1 \sin \rho$ . Uvrstimo ovaj izraz u izrazu (3.33.) te tako dolazimo do jednadžbe,

$$\sin \delta = \sin \rho \cos \theta_B \quad (3.34.)$$

nakon čega dolazimo do slijedećih formula za određivanje kutova  $\theta_B$  i  $\theta_A$ :

$$\begin{aligned} \theta_B &= \arccos \frac{\sin \delta}{\sin \rho} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \rho}, \\ \theta_A &= \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \rho} \end{aligned} \quad (3.35.)$$



Iz sl. 3.7 i od teorema o mjerenju kutova, čiji krakovi presjecaju kružnicu, odmah slijedi da je:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \theta_A, \alpha_1 - \alpha_2 = \angle C_2OB = \varphi + \delta \quad (3.36.)$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \theta_B, \beta_1 - \beta_2 = \angle C_2OA = \varphi - \delta \quad (3.37.)$$

Rješavanjem jednadžbi (3.36.) i (3.37.) s obzirom na nepoznate  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  i zamjenom kutova  $\theta_A, \theta_B$  s njihovim vrijednostima (3.35.) dolazimo do formula :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \varphi + \delta + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right) \quad (3.38.)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi - \delta + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right)$$

(3.39.)

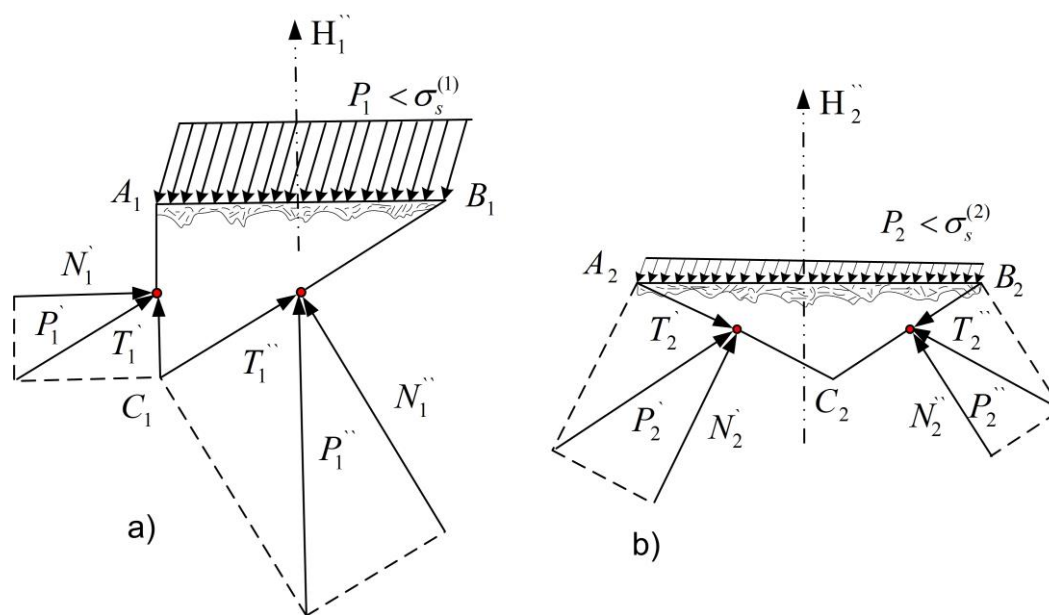
$$\beta_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right)$$

iz kojih je moguće izračunati kutove između ozadane ravnine i ravnina klizanja. Ove formule definiraju dva analitička rješenja osnovnog problema koji odgovaraju dvama njegovim grafičkim rješenjima dobivenim u prethodnom poglavlju.

### 3.7. Vrste graničnog stanja naprezanja tla; Aktivno i pasivno stanje

Kao što je već napomenuto prije u metodi S. Goluškeviča osnovni problem teorije granične ravnoteže tla ima dva rješenja. Njima odgovaraju dva različite vrste graničnog stanja naprezanja, minimalno i maksimalno. Razlika između njih postaje posebno jasna kada je rubna ravnina  $AB$

elementarne prizme  $ABC$  (slika 3.5) leži na granici razmatranog poluprostora tla, tj. kada naprezanje na njoj može biti izazvano samo vanjskim silama.



Slika 3.8

Na sl. 3.8 a i b prikazani su dvije elementarne prizme  $A_1B_1C_1$  i  $A_2B_2C_2$  koji su u graničnom stanju naprezanja, te su prikazani sumarne sile koje djeluju na njihovim bočnim ravninama, koje su zapravo ravnine klizanja. Na slici 3.8 a prikazana je prizma u minimalnom stanju naprezanja, a na slici 3.8 b u maksimalnom. Komponente sile  $P$  paralelne s ravninama na kojima djeluju su sumarne sile trenja. One održavaju stanje granične ravnoteže razmatrane prizme. Ako zbog nekog razloga ravnoteža bude poremećena, otpor trenja će se prevladati i prizme će se pokrenuti.

Prizma  $A_1B_1C_1$  će početi klizati po jednoj od ravnina klizanja u smjeru suprotnom djelovanju sila trenja na toj ravnini. Pri tome projekcija pomaka središta prizme na vanjsku normalu na granicu poluprostora tla bit će negativna. Razmatrana prizma će se kao utiskivati u područje koje je zauzimalo tlo prije poremećaja njezine ravnoteže. Isto će se dogoditi i sa susjednim prizmama. Općenito, pojavit će se fenomen, koji se obično naziva slom tla.

Drugačiji slučaj je s prizmom  $A_2B_2C_2$  i drugih elementarnih prizma kod kojih su kutovi između elementarnim ravninama klizanja, suprotni njenim rubovima koje se nalaze na granici, tupi. U ovom slučaju nakon što ravnoteža tla bude poremećena, prizme počinju kliziti duž jedne od ravnina klizanja, tako da će projekcija pomicanja središta na vanjsku normalu granice poluprostora bit će pozitivna, drugim riječima prizma će se gibati prema gore. Ona će se kao

istiskivati iz područja u kojem je bilo tlo prije poremećaja ravnoteže. Isto će se dogoditi i sa susjednim prizama. Općenito, pojavit će se fenomen koji se obično naziva izbočenjem ili ispupčenjem tla.

Slom tla na jednom od rubnih područja, u pravilu, popraćen je ispupčenjem s druge strane područja. Dimenzije tih područja određeni su dati početnim uvjetima inženjerskih problema, koji se rješavaju metodama teorije granične ravnoteže. Važno je napomenuti da karakter moguće kinemtičke slike pomaka točaka površine tla određuje vrstu njegovog graničnog stanja naprezanja. Ako na danom graničnom području dođe do sloma tla urušenjem, granično stanje naprezanja tla na graničnim točkama bit će minimalno. Granično stanje će biti maksimalnim ako se tlo na danom graničnom području slomi ispupčenjem.

## 4. Inženjerska primjena metode

### 4.1. Grafičke metode za određivanje tlaka tla na potpornim zidovima

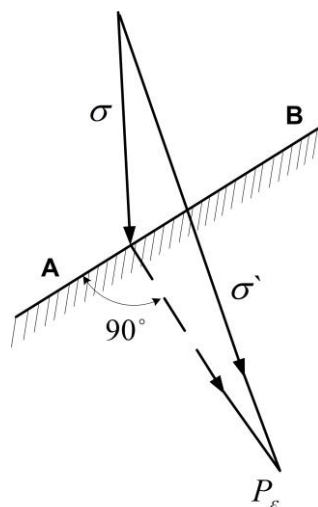
U ovom poglavlju razmotrit ćemo samu metodu prof. S. Goluškevič, koji daje grafičko rješenje problema teorije granične ravnoteže i općeg slučaja približne Coulombove metode bazirane na ravnim kliznim ravninama.

Grafičku metodu za određivanje pritiska tla na potporne zidove prema teoriji granične ravnoteže predložio je prof. S. Goluškevič. Treba se primijeniti posebno pri određivanju pasivnog pritiska tla na potporne zidove, budući da su rezultati izračuna koji koriste ovu metodu bliski onima dobivenim točnim metodama izračuna.

Prilikom određivanja aktivnog pritiska tla na okomitim potpornim zidovima može se ograničiti na primjenu metoda temeljenih na Coulombovim pretpostavkama, jer će u ovom slučaju dati točnost, točnije u praktične svrhe, zahtijevajući minimalne izračune ili konstrukcije. Grafička metoda Goluškeviča, detaljnije opisana u nastavku, općenito se sastoji od sljedećeg.

Na osnovu grafičke konstrukcije utvrđuju se položaj i oblik kliznih ravnina, koji su bliski točnoj krivulji klizave ravnine, ali odgovaraju nedostatku volumenskih sila. Kao što pokazuje utjecaj obujamskih sila na oblik kliznih krivulja u području ograničavajućeg stanja naprezanja je beznačajan.

U konstrukciji ravnine klizanja i rješavanju brojnih drugih problema teorije granične ravnoteže, uzima se u obzir smanjeno naprezanje  $\sigma'$ , koji predstavlja geometrijski zbroj (sl. 4.1) djelujućeg naprezanja  $\sigma$  i povezanosti  $p_s$ .



Slika 4.1.

$$\hat{\sigma} = \sigma + p_s \quad (4.1.)$$

Tada će stanje graičnog naprezanja u bilo kojem trenutku masiva tla biti:

$$|\bar{\tau}| = \hat{\sigma}_n \operatorname{tg} \varphi \quad (4.2.)$$

Prilikom određivanja ravnine klizanja, prijelaz urušavanja podijeljen je na tri područja (slika 4.1): područje maksimalnih naprezanja AOB, posebno područje BOC i područje minimalnih naprezanja COD. U području maksimalnog i minimalnog obrisa klizne ravnine je izravno linearan, a u posebnom području predstavlja logaritamsku spiralu koja je konjugirana s ravnim kliznim ravninama.

Smjer kliznih ravnina u područjima klizanja u području maksimalnih i minimalnih naprezanja određuje se ravnotežom u tlu iza zadržavajućeg zida novih svojstava graničnog kruga naprezanja, dok Goluškevič preporučuje korištenje slijedećeg načina konstruiranja.

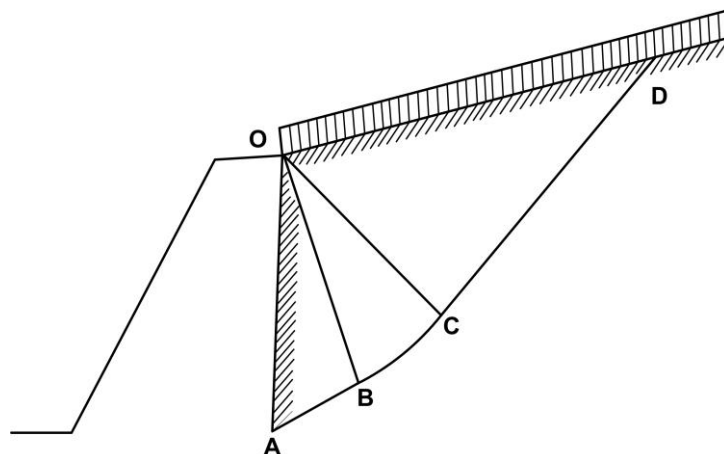
Izradimo pravokutni trokut (slika 4.2), jedan od oštih kutova jednak je kutu unutarnjeg trenja tla. Od vrha glave ispustimo okomicu na hipotenuzu, a iz vrha kuta, koja je jednaka  $90^\circ - \varphi$ , opisujemo tri kruga s radijusom CD, CB i CA.

Prvi manja kružnica naziva se kružnica ravnina, srednja kružnica je kružnica vrhova, a velika kružnica, kružnica polova. Lako je vidjeti iz dužine ABEC da je kut  $\angle ACE = 2(90^\circ - \varphi)$

Uzimamo bilo koju točku M na kružnici vrhova i spojimo ju tangentom krajnje točke kružnice vrhova na kružnicu ravnina, na primjer, tetivom kružnice AE. Iz teorema upisanih kutova slijedi da:

$$\angle AME = \frac{1}{2} \angle ACE \quad (4.3.)$$

$$\angle AME = 90^\circ - \varphi \quad (4.4.)$$



Slika 4.2.

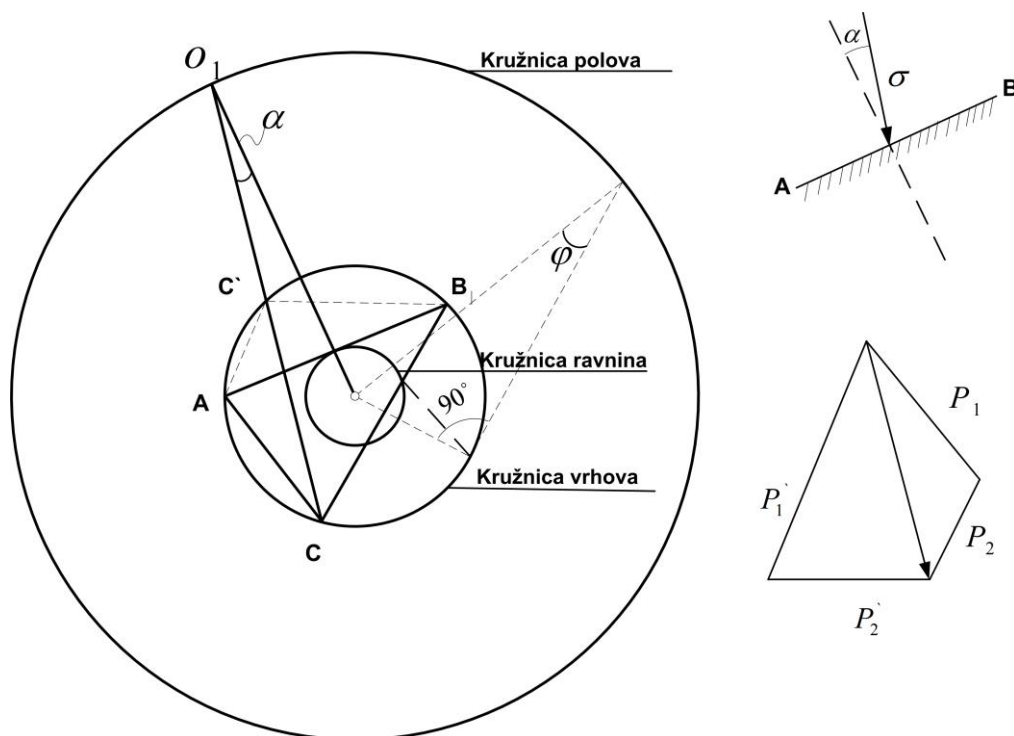
To će biti slučaj ako smjer tetive CM ne presijeca tetivu kružnice AE, ali ako CM presijeca AE, onda možemo pokazati da  $\angle AM'E = 90^\circ + \varphi$ . Budući da se klizne plohe u tlu, koje su u uvjetima maksimalne ravnoteže, međusobno presijecaju pod kutom od  $90^\circ - \varphi$  ili  $90^\circ + \varphi$  onda se tetive MA i ME mogu smatrati kliznim ravninama. Iz toga slijedi da ako područja u tlu, koja se nalaze u krajnjoj ravnoteži, slažu da se predstavljaju paralelnim tetivama kružnice vrhova koje su tangentne tetiva kružnice ravnina, onda svaka od dviju ravnih linija koja prolaze kroz krajeve dužina i presijecaju se na kružnici vrhova paralelno s mogućim mjestima klizanja, prolazeći kroz krajeve mjesta koja se razmatra.

Ova situacija omogućuje nam da koristimo sustav karakterističnih kružnica za rješavanje brojnih problema u teoriji granične ravnoteže.

## 4.2. Glavni zadatak

Za elementarno područje AB, smješteno unutar medija s izuzetno napregnutim stanjima, potrebno je odrediti smjer mjesta klizanja koji prolazi kroz krajeve ovog područja A i B.

Rješenje ovog problema izvedeno je na sl. 4.2 je kako slijedi.



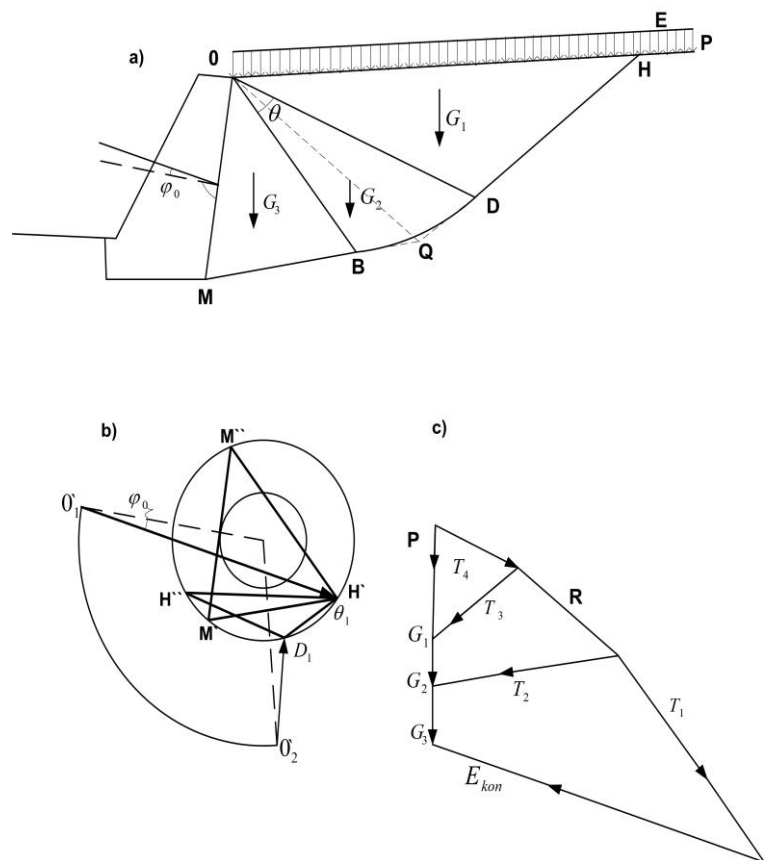
Slika 4.3.

Za određeni kut unutarnjeg trenja, konstruiramo sustav karakterističnih krugova.

Sada izvodimo dužinu  $A_1B_1$  kružne tangente na kružnicu ravna i paralelano s danim područjem AB, ravno se crta kroz središte sustava kružnica. Okomito na  $A_1B_1$  definirana je točka  $O_1$  u kojoj pravac siječe kružnicu polova. Ravna linija paralelna sa smanjenim naprezanjem  $\sigma'$  i presiječenom kružnicom vrhova na točkama C i  $C_1$ , izvlače se kroz točku 0 kao što je ranije dokazano. Linije  $A_1C$  i  $B_1C$  definiraju jedan od mogućih pravaca kliznih ravnina, a linije  $A_1C'$ ,  $B_1C'$  definiraju druge moguće smjerove. Na temelju svojstva konjugacije naprezanja preko mjesta sklizanja na istoj sl. 4.3. (desno) konstruirana je dekompozicija smanjenog naprezanja  $\sigma'$  u dva smjera  $p_1ip_2$  paralelno s prvim smjerovima mjesta klizanja  $p_1ip_2$ , a paralelno drugi smjer, jer problem ima dva rješenja. Napominjemo da se rješenje osnovnog problema teorije gornje granične ravnoteže koja se gore razmatrala može provesti uz pomoć uobičajne kružnice graničnog naprezanja bez pribjegavanja sustavu karakterističnih kružnica.

Grafička metoda se koristi za određivanje pasivnog i aktivnog tlaka tla na potpornim stjenkama koje imaju ravnu površinu za punjenje i ravnu stražnju stranu. Kao što je ranije navedeno, prema izračunima S.Golushkevich i V.S. Khristoforova. Konstrukcija kliznih ravnina bez snage volumena ne uvodi značajne pogreške u izračunu tlaka tla na potporne zidove.

Pri određivanju pritiska tla iz ravnotežnog stanja prizme kolapsa, naravno, potrebno je uzeti u obzir snagu volumena (učinak vlastite težine tla). Sl. 4.4. prikazuje konstrukciju površine klizanja u slučaju pasivnog tlačnog tla (otpora) na nosaču. Konstrukcija se temelji na gore navedenom načinu gradnje klizne ravnine za slučaj ovdje navedenog glavnog problema.



Slika 4.4

Prije svega, prati se stražnja strana zida i površina zatrpavanja (slika 4.4. a). Nadalje, u proizvoljnom mjestu crteža sustav karakterističnih kružnica podešava se prema zadanoj vrijednosti kuta unutarnjeg trenja tla (sl. 4.4. b).

Da biste odredili obrise područja maksimalnih naprezanja, izvucite tetivu kružnice  $M'M''$  i paralelno sa stražnjim rubom  $OM$  zida od središta karakterističnih kružnica do točke tangencije izvučene tetive kružnice  $M'M''$ , okomica se ispušta i proteže se do presjecišta s kružnicom polova, od dobivene točke  $O_1'$  se izvlači pod određenim kutom  $\varphi_0$  jednakim kutu trenja tla na zidu, ravnu liniju  $O_1'B_1$  do sjecišta na točki  $B_1$  s kružnicom vrhova; dobivena točka  $B_1$  pridružuje se krajevima tetive kružnice  $M'M''$ , što daje smjer kliznih ravnina. Na slici 4.4.a, klizne plohe paralelne s kliznim ravninama su  $OB$ : paralelno s  $M''B_1$  i  $MB$  paralelno s  $M'B_1$ .

Na isti način se vrši pri konstruiranju  $OD$  ravnine (slika 4.4. a), tj. linija  $H''H'$  paralelna je s površinom  $OH$ , od središta karakterističnih kružnica. Ravna crta se izvlači kroz točku kontakta tetiva  $H''H'$  dok se ne preklapa s krugom stupovi na točki  $O_2'$ . Od točke  $O_2'$  ravna linija  $O_2'D_1$  paralelna je s vanjskim opterećenjem, sve dok se ne presijeca sa kružnicom vrhova na točki  $D_1$ , koja je povezana s krajevima prethodno konstruirane tetive  $H''H'$ . Dobivene smjernice su i bit će upute. Iz točke  $O$  (sl. 4.4. a) nacrtamo ravnu liniju  $OD$  paralelno s područjem  $H''D_1$ .

Dakle, kao rezultat opisane konstrukcije nalazimo obrise  $OMB$  prizma za područje maksimalnih naprezanja i kut koji su napravili  $OB$  i  $OD$  kliznih ploha u posebnom području.

Nepoznata vrijednost  $OD$  radijusa singularne domene izračunava se analitički, uzimajući u obzir obris  $BD$  krivulje duž logaritamske spirale. Prema jednadžbi logaritamske spirale, možemo pisati:

$$\frac{r_{poččet}}{r_{konačon}} = e^{-\theta g \varphi} \quad (a) \quad (4.5.)$$

Uzimajući segment  $\overline{OB}$ , dobivamo:

$$\overline{OD} = \overline{OB} \frac{1}{e^{-\theta g \varphi}} \quad (b) \quad (4.6.)$$



Imajte na umu da pri izradi ravnine klizanja za aktivni pritisak na tlo na potporni zid, potrebno je izračunati  $r_{počočet}$  i  $r_{konačon}$  vrijednost, što očito može biti izvedeno i iz formule (a). Mjerenje dužine OB i kut između OB i OD, tj. Kut  $\theta$ , prema crtežu (slika 4.4. a), koristeći formulu(b) odrediti vrijednost OD \*. Iz točke D nacrtajte ravnu liniju DH, paralelnu s  $D_1H$  (slika 4.4. b), a dodatno spojite točku D glatkom krivuljom s točkom B. Time se završava konstrukcija ravnine klizanja MBDH. Imajte na umu da istovremeno s konstrukcijom kliznih ravnina potrebno je pronaći sjecišta tragova površina MB i DH, m. F. Točka Q, od ravne linije OQ je linija djelovanja sile koja balansira pritisak na OB i OD, smjer koji je potrebno poznavati za grafičko određivanje, osim toga, za izračunavanje težine BOD klina (sektora logaritamske spirale) potrebno je odrediti njegovo područje, koje se može izračunati iz formule:

$$F = \frac{1}{4tg\varphi} (r_1^2 - r_2^2) \quad (b) \quad (4.7.)$$

Gdje su  $r_1$  i  $r_2$  dužine radijus vektora koji graniče područjem logaritamske spirale.

### 4.3. Određivanje nastalog tlaka

Nadalje određujemo pojedinačna područja MOB, BOD i ODH prisilnih kolapsa i primjenjujemo ih u središtu gravitacije odgovarajućih ravnina. Za izračunavanje vrijednosti pasivnog tlačnog tlaka  $E_n$ , izrađujemo poligon sila (slika 4.4, c). Da bismo to učinili, precrtali smo u mjerilu sile veličine nastalog ravnomjerno raspoređenog opterećenja P na površini OH i količinama  $G_1$ ,  $G_2$  i  $G_3$  koje odgovaraju težinama pojedinačnih područja prizme kolapsa.

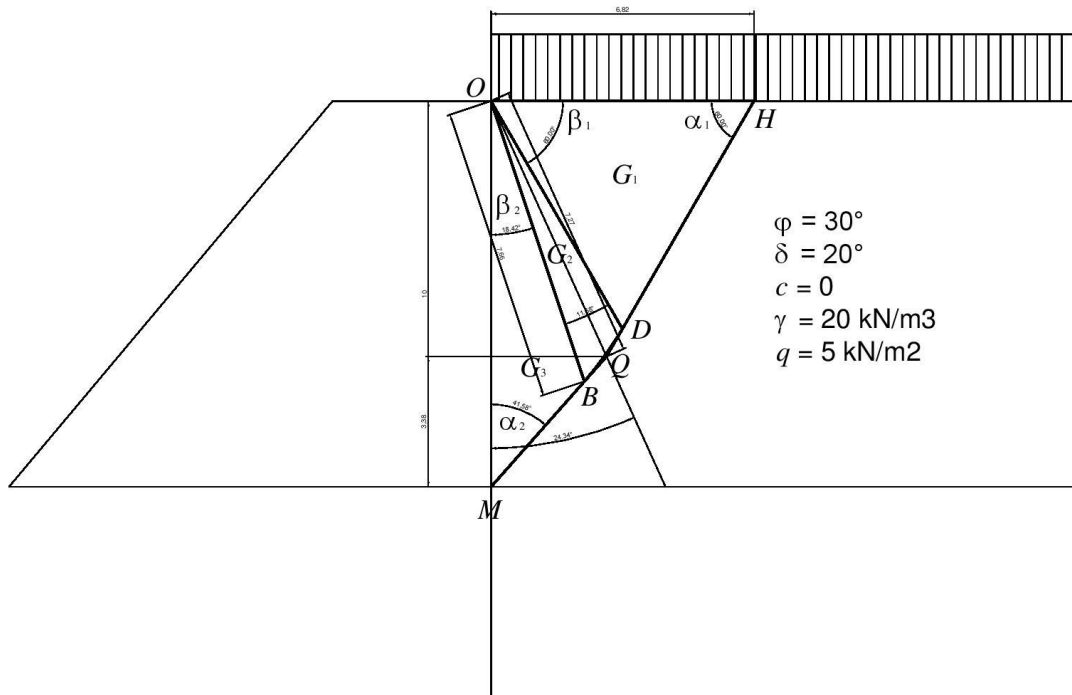
Nadalje, iz krajnjih točaka segmenta P +  $G_1$  crtaju se linije paralelne s  $D_1H$  i  $D_1H''$ , ili (što je ista stvar) paralelne s DH i OD, pronađemo geometrijski zbroj vektora  $T_3$  i  $G_2$  i rastavljamo ga po smjerovima OQ i MQ. Vektor  $T_2$  se dodaje  $G_3$  i rastavlja se uz smjer OB i smjer paralelan s pasivnim tlačnim tlakom koji je jednak zidu, to jest u smjeru  $O_1 \setminus B_1$ .

Izravno na ljestvici poligona sila određujemo vrijednost  $E_n$ , tj. posljedicu pasivnog tlaka tla na zidu.

Slično tome, može se djelovati pri određivanju vrijednosti aktivnog tlaka  $E_a$  tla na potpornim stjenkama, ali u ovom slučaju, analitičke metode i čisto grafičke zasnovane na pretpostavci ravnih kliznih ravnina bit će učinkovitije.

# 5. Primjer riješenog zadatka aktivnog tlaka na zid i usporedba rezultata

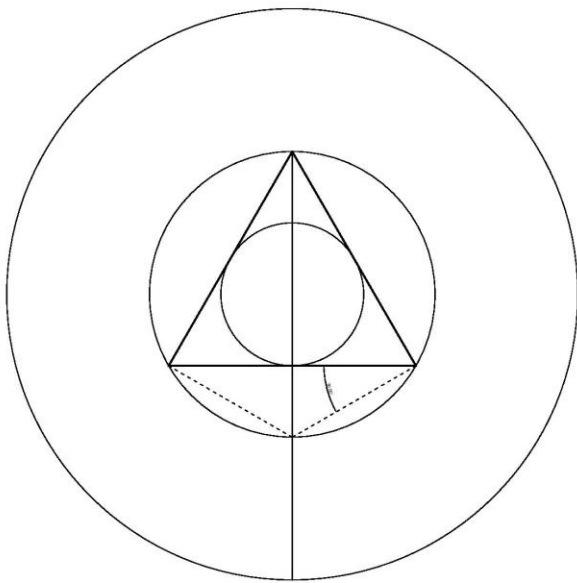
Da bi smo proveli metodu prof. S. Goluškeviča potrebno je konstruirati kinematičku sliku aktivnog klina tla (sl 5.1.).



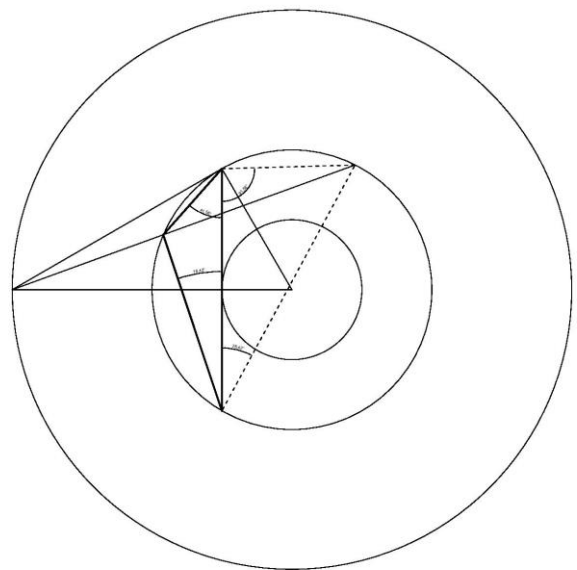
Slika 5.1

Konstruiramo sustav karakterističnih krugova Goluškeviča:

*Sustav karakterističnih krugova Golushkevicha*



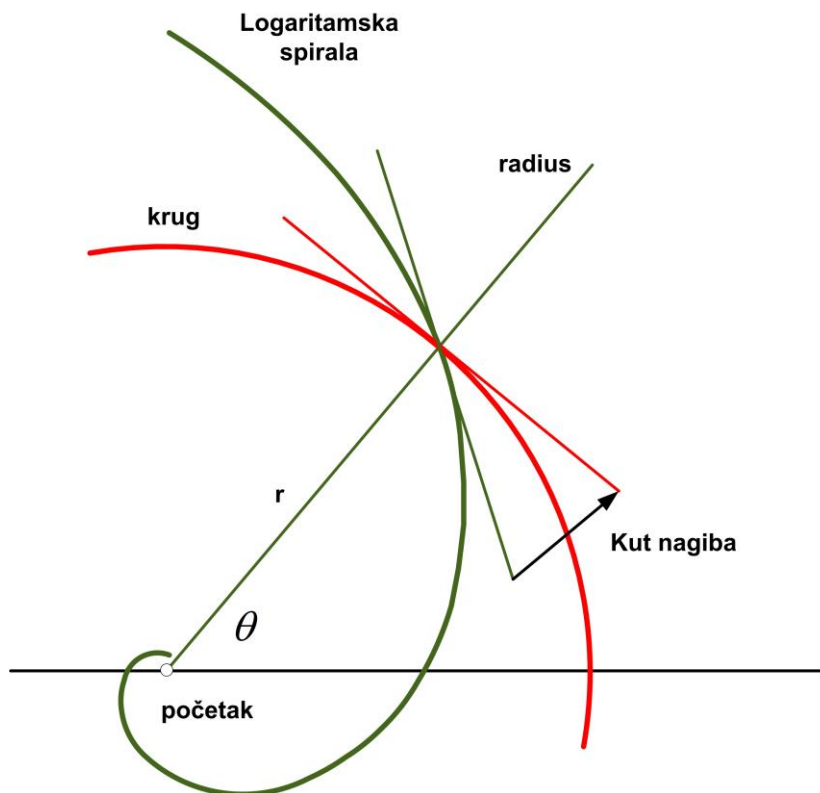
*Slika 5.2.*



*Slika 5.3*

Na temelju poznatih podataka radimo proračun posebnog područja logaritamske zavojnice. Za aktivni tlak se zadaje konačni radius da bi se dobio početni, no za izračun pasivnog otpora situacija je obrnuta, zadaje se početni radius kako bi se dobio konačni.

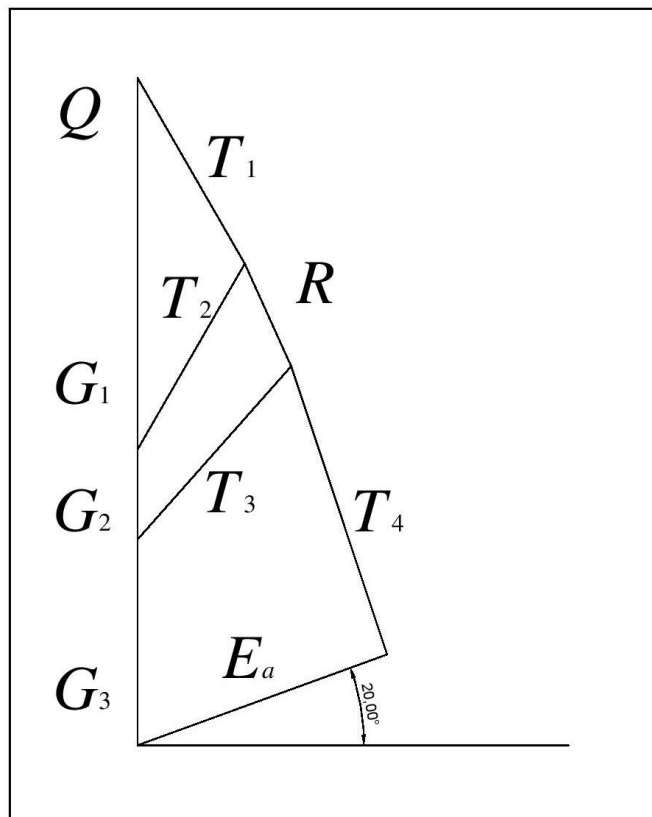
| Proračun posebno područje (logaritamska zavojnica): |      |                      |                      |               |      |              |  |
|---|------|----------------------|----------------------|---------------|------|--------------|--|
| AKTIVNI TLAK  |      |                      |                      | PASIVNI OTPOR |      |              |  |
| $r_{kon} =$   |      | 7,66 m               |                      | $r_{poč} =$   |      | 3 m          |  |
| $\theta =$  | 12 ° | 0,2094 rad           |                      | $\theta =$    | 12 ° | 0,2094 rad   |  |
| $\varphi =$   | 30 ° | 0,5236 rad           |                      | $\varphi =$   | 30 ° | 0,5236 rad   |  |
| $r_{poč} =$   |      | 6,79 m               |                      | $r_{kon} =$   |      | 3,39 m       |  |
| Račun sila:   |      |                      |                      |               |      |              |  |
|   |      | $q$ ili $\gamma$     | $L$ ili $A$          |               |      |              |  |
| $Q =$   |      | 5 kN/m <sup>2</sup>  | 6,79 m               |               |      | 33,95 kN/m'  |  |
| $G_1 =$   |      | 20 kN/m <sup>3</sup> | 19,96 m <sup>2</sup> |               |      | 399,2 kN/m'  |  |
| $G_2 =$   |      | 20 kN/m <sup>3</sup> | 5,27 m <sup>2</sup>  |               |      | 105,4 kN/m'  |  |
| $G_3 =$   |      | 20 kN/m <sup>3</sup> | 12,11 m <sup>2</sup> |               |      | 242,2 kN/m'  |  |
| Očitano:  |      |                      | Mjerilo              |               |      |              |  |
| $E_a =$   |      | 3,0857 m             | 100                  |               |      | 308,57 kN/m' |  |



Slika 5.4.

Konstruiramo poligon sila:

M 100kN=1cm



## Analitičko i grafoanalitičko rješenje S. Goluškeviča :

|  |                      |                             |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
|--|----------------------|-----------------------------|------|-------------------|-----------------|--------|-----------|----------------------|--|--|--|--|--|--|--|
|  |                      | Zadano                      |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| Visina zida:   |                      | $H =$                       |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
|  |                      |                             |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| Kut trenja:  |                      | $\varphi =$                 | 30 ° |                   |                 |        |           | 0,5236 rad           |  |  |  |  |  |  |  |
| Kohezija (za sad uvijek 0):  |                      | $c =$                       |      |                   |                 |        |           | 0 kN/m <sup>2</sup>  |  |  |  |  |  |  |  |
| Zapreminska težina:  |                      | $\gamma =$                  |      |                   |                 |        |           | 20 kN/m <sup>3</sup> |  |  |  |  |  |  |  |
| Kut nagiba opterećenja:  |                      | $\varepsilon =$             | 0 °  |                   |                 |        |           | 0,0000 rad           |  |  |  |  |  |  |  |
| Kut trenja zida i tla:   |                      | $\delta =$                  | 20 ° |                   |                 |        |           | 0,3491 rad           |  |  |  |  |  |  |  |
| Vanjsko opterećenje:   |                      | $q =$                       |      |                   |                 |        |           | 5,0000 kN/m'         |  |  |  |  |  |  |  |
|  |                      | Proračun kuteva uz zid, G3: |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| $\alpha_{1l} =$  | 1,5984               | 91,5801 °                   |      | Minimalno stanje  | $\alpha_{1d} =$ | 1,0472 | 60,0000 ° | Minimalno stanje     |  |  |  |  |  |  |  |
| $\beta_{1l} =$   | 0,4960               | 28,4199 °                   |      |                   | $\beta_{1d} =$  | 1,0472 | 60,0000 ° |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| $\alpha_{2l} =$  | 0,7257               | 41,5801 °                   |      | Maksimalno stanje | $\alpha_{2d} =$ | 0,5236 | 30,0000 ° | Maksimalno stanje    |  |  |  |  |  |  |  |
| $\beta_{2l} =$   | 0,3215               | 18,4199 °                   |      |                   | $\beta_{2d} =$  | 0,5236 | 30,0000 ° |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| <b>Zaključak: veći kut je alfa ako imamo aktivno stanje naprezanja</b> |                      |                             |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| Stanje uz zid, G3:   |                      |                             |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| Površina trokuta OBM:  |                      |                             |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| OBM  | 12,11 m <sup>2</sup> |                             |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| $G_1 =$  | 242,15 kN/m'         |                             |      |                   |                 |        |           |                      |  |  |  |  |  |  |  |

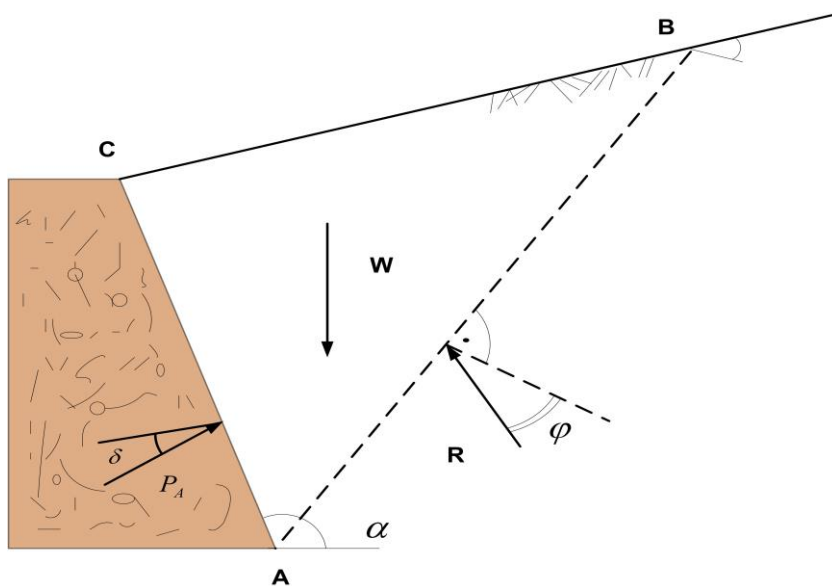
|   |                      |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |
|---|----------------------|--|--|------------|-------------|------|--|---|--|--|--|--|--|------------|--|
| Proračun posebno područje (logaritamska zavojnica), G2: |                      |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |
| <b>AKTIVNI TLAK</b>                                     |                      |  |  |            |             |      |  | <b>PASIVNI OTPOR</b>                                    |  |  |  |  |  |            |  |
| Za aktivni tlak se zadaje konačni pa se dobiva početni  |                      |  |  |            |             |      |  | Za pasivni otpor se zadaje početni pa se dobiva konačni |  |  |  |  |  |            |  |
| $r_{kon} =$   |                      |  |  | 7,6634 m   | $r_{poč} =$ |      |  |   |  |  |  |  |  | 1 m        |  |
| $\theta =$  | 11,5801 °            |  |  | 0,2021 rad | $\theta =$  | 12 ° |  |   |  |  |  |  |  | 0,2094 rad |  |
| $\varphi =$   | 30 °                 |  |  | 0,5236 rad | $\varphi =$ | 30 ° |  |   |  |  |  |  |  | 0,5236 rad |  |
| $r_{poč} =$   |                      |  |  | 6,8193 m   | $r_{kon} =$ |      |  |   |  |  |  |  |  | 1,13 m     |  |
| OBM   | 5,29 m <sup>2</sup>  |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |
| $G_2 =$   | 105,86 kN/m'         |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |
| Stanje na površini uz opterećenje, G1:                  |                      |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |
| Površina trokuta ODH:                                   |                      |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |
| OH  | 6,8193 m             |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |
| ODH   | 20,14 m <sup>2</sup> |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |
| $G_1 =$   | 402,73 kN/m'         |  |  |            |             |      |  |   |  |  |  |  |  |            |  |

|  |        |           |                          |                        |              |
|--|--------|-----------|--------------------------|------------------------|--------------|
| <b>Račun sila prema poligonu sila (grafoanalitička metoda):</b>                |        |           |                          |                        |              |
| Iznosi isila:  |        |           | $q$ ili $\gamma$         | $L$ ili $A$            |              |
| $Q =$  |        |           | 5,0000 kN/m <sup>2</sup> | 6,8193 m               | 34,10 kN/m'  |
| $G_1 =$  |        |           | 20 kN/m <sup>3</sup>     | 20,1365 m <sup>2</sup> | 402,73 kN/m' |
| $G_2 =$  |        |           | 20 kN/m <sup>3</sup>     | 5,2930 m <sup>2</sup>  | 105,86 kN/m' |
| $G_3 =$  |        |           | 20 kN/m <sup>3</sup>     | 12,1073 m <sup>2</sup> | 242,15 kN/m' |
| Određivanje smjera sile R u posebnom području (unutar logaritamske zavojnice): |        |           |                          |                        |              |
| $l =$  | 5,99   |           |                          |                        |              |
| $\psi =$   | 0,4245 | 24,3226 ° |                          |                        |              |

| Poligon sila, grafoanalitička metoda: |              |         |          |         |                     |          |
|---------------------------------------|--------------|---------|----------|---------|---------------------|----------|
| 1) $T_1$ i $T_2$                      |              |         |          |         |                     |          |
|                                       | $T_1$        | $T_2$   | $B$      | $T_2$   | $T_1$               | $B$      |
| $\Sigma F_x = 0$                      | -0,5000      | 0,5000  | 0,0000   | 0,5000  | -0,5000             | 0,0000   |
| $\Sigma F_y = 0$                      | 0,8660       | 0,8660  | 436,8271 | 0,8660  | 0,8660              | 436,8271 |
| $T_1 =$                               | 252,20 kN/m' |         |          |         |                     |          |
| $T_2 =$                               | 252,20 kN/m' |         |          |         |                     |          |
| 2) $T_3$ i $R$                        |              |         |          |         |                     |          |
|                                       | $T_3$        | $R$     | $B$      | $R$     | $T_3$               | $B$      |
| $\Sigma F_x = 0$                      | 0,6637       | -0,4119 | 126,1011 | -0,4119 | 0,6637              | 126,1011 |
| $\Sigma F_y = 0$                      | 0,7480       | 0,9112  | 324,2744 | 0,9112  | 0,7480              | 324,2744 |
| $T_3 =$                               | 272,19 kN/m' |         |          |         |                     |          |
| $R =$                                 | 132,42 kN/m' |         |          |         |                     |          |
| 3) $E_a$ i $T_4$                      |              |         |          |         |                     |          |
|                                       | $E_a$        | $T_4$   | $B$      | $T_4$   | $E_a$               | $B$      |
| $\Sigma F_x = 0$                      | 0,9397       | -0,3160 | 180,6427 | -0,3160 | 0,9397              | 180,6427 |
| $\Sigma F_y = 0$                      | 0,3420       | 0,9488  | 445,7511 | 0,9488  | 0,3420              | 445,7511 |
| $E_a =$                               | 312,35 kN/m' |         |          |         |                     |          |
| $T_4 =$                               | 357,22 kN/m' |         |          |         |                     |          |
| $E_a =$                               |              |         |          |         | <b>312,35 kN/m'</b> | $z =$ 10 |

Dobiveni aktivni tlak iznosi:  $E_a = 312,35 \text{ kN/m}$

Nakon svega provedenog sada možemo napraviti usporedbu sa Coulombovom metodom :



Slika 5.5.

|                               |                       |           |            |         |         |         |
|-------------------------------|-----------------------|-----------|------------|---------|---------|---------|
| Podaci za Coulombov proračun: |                       |           |            |         |         |         |
| $q =$                         | 100 kN/m'             |           |            |         |         |         |
| $\gamma =$                    | 20 kN/m <sup>3</sup>  |           |            |         |         |         |
| Geometrija zida:              |                       |           |            |         |         |         |
| $z =$                         | 10 m                  |           |            |         |         |         |
| $\alpha =$                    | $\varphi =$           | $\beta =$ | $\delta =$ | $k_a =$ | $k_p =$ | $k_a =$ |
| 90                            | 30                    | 0         | 20         | 0,2973  | 6,1054  | 0,3333  |
| $\sigma_{z0} = q =$           | 5 kN/m <sup>2</sup>   |           |            |         |         |         |
| $\sigma_z =$                  | 200 kN/m <sup>2</sup> |           |            |         |         |         |
| $\sigma_{x0} =$               | 1,486569              |           |            |         |         |         |
| $\sigma_x =$                  | 60,94934              |           |            |         |         |         |
| <b><math>E_a =</math></b>     | <b>312,1796 kN/m'</b> |           |            |         |         |         |

Zaključujemo da dobivena sila aktivnog tlaka metodom Goluškeviča iznosi  $E_a = 312,35 \text{ kN/m}$ , a prema Coulombovm rješenju  $E_a = 312,1796 \text{ kN/m}$ , što potvrđuje sličnost rezultata. Razlika Coulomba u odnosu na Goluškeviča je svega 1,3% što je zanemarivo malo.



## 6. Zaključak

Kroz ovaj završni rad poseban naglasak dali smo na metodu prof. S.Goluškeviča, koji rješava problem teorije granične ravnoteže i općeg slučaja metode bazirane na ravnim kliznim ravninama. Takva metoda zove se grafička metoda za određivanje pritiska tla na potporne zidove prema teoriji granične ravnoteže.

Uspoređivali smo dvije metode, metodu prema Goluškeviču i metodu prema Coulombu. Na osnovu grafičke konstrukcije utvrdili smo položaj i oblik kliznih ravnina, nakon čega smo određivali težinu pojedinih dijelova prizme kolapsa koristeći uobičajeni poligon gdje sile određuju pritisak zemlje na potporni zid. Za određeni kut trenja konstruiran je sustav karakterističnih krugova.

Grafička metoda se koristi za određivanje pasivnog i aktivnog tlaka tla na potpornim stjenkama koje imaju ravnu površinu za punjenje i ravnu stražnju stranu. Kao što je ranije navedeno, prema izračunima S.S. Goluškeviča i V.S. Khristoforova. Konstrukcija kliznih ravnina bez snage volumena ne uvodi značajne pogreške u izračunu tlaka tla na potporne zidove.

Metode za grafičko određivanje pritiska tla na zidovima podne stjenke sada su razvijene samo za labavo tlo. Na temelju gore navedenog mogu se primijeniti i u slučaju kohezivnih tala, samo je potrebno, uz konačnu konstrukciju dijagrama raspodjele tlaka za stražnju stranu zida, uzeti u obzir zadržavajući učinak kohezijskih sila.

Grafičke metode za određivanje pritiska tla na zidovima podne stjenke, temeljene na pretpostavci ravnih kliznih površina, trebaju se primijeniti na temelju gore navedenog samo pri određivanju aktivnog tlaka, kada su rezultati blizu točnosti.

Prilikom određivanja istog pasivnog tlaka potrebno je koristiti grafičku metodu Goluškeviča, koja se razmatra u ovom završnom radu. Prednost grafičkih metoda je njihova vidljivost i samo kontroliranje konstrukcija, što uklanja velike pogreške i sposobnost da se uzme u obzir niz uvjeta koji kompliciraju analitička rješenja (nagib stražnjeg ruba zida, bilo kakav obris zatrpavanja, dopuštenje za trenje tla na zidu, stratifikacija tla itd.).

U Varaždinu \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Lucija Kučina

## 7. Literatura

Knjige:

- [1] Golushkevich, S.S. (1957): Statika predelnih sastoyanii gruntovyh mass, M.Gostehizdat
- [2] Caquot, A. (1934): Equilibre des massifs a froftremenet interne, Paris.
- [3] Coulomb, C. (1773): Application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture. Memoires de savants etrangers de l'Acad. Des. Sc., De Paris.
- [4] Rankine, W. (1857): On the stability of loose earth, Lond., Phil., Trans.
- [5] Prandtl, L. (1920): Ueber die Harte plastischer Korper, Gottingen Nachrichten.
- [6] Tsytovich, N.K. (1963): MEKHANIKA GRUNTOV, GOSUDARSTVENNOYE IZDATEL'STVO LITERATURY PO STROITEL'STVU, .ARKHITEKTURE I STROITEL'NYM MATERIALAM, Moskva.

Internet izvori:

- [7] [https://www.researchgate.net/publication/272960858\\_Potporne\\_gradevine\\_i\\_gradevne\\_jame](https://www.researchgate.net/publication/272960858_Potporne_gradevine_i_gradevne_jame)
- [8] <http://nastava.tvz.hr/zlatovic/knjiga/9.pdf>
- [9] <http://www.grad.hr/gukov/pdf/djelovanja.pdf>
- [10] [http://rgn.hr/~lfrgic/nids\\_lfrgic/PDF\\_Print\\_Tehnicka%20mehanika\\_Geoloz/Print\\_PDF\\_G/Print\\_11\\_Naprezanja%20i%20deformacije\\_G.pdf](http://rgn.hr/~lfrgic/nids_lfrgic/PDF_Print_Tehnicka%20mehanika_Geoloz/Print_PDF_G/Print_11_Naprezanja%20i%20deformacije_G.pdf)
- [11] <https://hr.wikipedia.org/wiki/Naprezanje>

IZJAVA O AUTORSTVU  
I  
SUGLASNOST ZA JAVNU OBJAVU

Završni/diplomski rad isključivo je autorsko djelo studenta koji je isti izradio te student odgovara za istinitost, izvornost i ispravnost teksta rada. U radu se ne smiju koristiti dijelovi tuđih radova (knjiga, članaka, doktorskih disertacija, magistarskih radova, izvora s interneta, i drugih izvora) bez navođenja izvora i autora navedenih radova. Svi dijelovi tuđih radova moraju biti pravilno navedeni i citirani. Dijelovi tuđih radova koji nisu pravilno citirani, smatraju se plagijatom, odnosno nezakonitim prisvajanjem tuđeg znanstvenog ili stručnoga rada. Sukladno navedenom studenti su dužni potpisati izjavu o autorstvu rada.

Ja, Lucija Kučina (ime i prezime) pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor/ica završnog/diplomskog (obrisati nepotrebno) rada pod naslovom Granično stanje napreznja prema grafičkoj metodi S. Goluškeviča (upisati naslov) te da u navedenom radu nisu na nedozvoljeni način (bez pravilnog citiranja) korišteni dijelovi tuđih radova.

Student/ica:  
(upisati ime i prezime)

Kučina Lucija  
(vlastoručni potpis)

Sukladno Zakonu o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju završne/diplomske radove sveučilišta su dužna trajno objaviti na javnoj internetskoj bazi sveučilišne knjižnice u sastavu sveučilišta te kopirati u javnu internetsku bazu završnih/diplomskih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice. Završni radovi istovrsnih umjetničkih studija koji se realiziraju kroz umjetnička ostvarenja objavljuju se na odgovarajući način.

Ja, Lucija Kučina (ime i prezime) neopozivo izjavljujem da sam suglasan/na s javnom objavom završnog/diplomskog (obrisati nepotrebno) rada pod naslovom Granično stanje napreznja prema grafičkoj metodi S. Goluškeviča (upisati naslov) čiji sam autor/ica.

Student/ica:  
(upisati ime i prezime)

Kučina Lucija  
(vlastoručni potpis)