

# Prilog analizi proračuna savitljivih temeljnih nosača poprečno opterećenih

---

Horvat, Ivica

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University North / Sveučilište Sjever**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:122:409446>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-06**

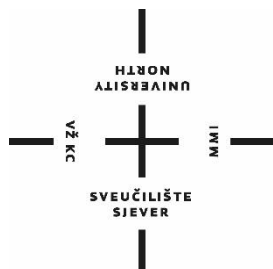


Repository / Repozitorij:

[University North Digital Repository](#)



**SVEUČILIŠTE SJEVER**  
**SVEUČILIŠNI CENTAR VARAŽDIN**



**DIPLOMSKI RAD BR. 1/GRD/2020**

**PRILOG ANALIZI PRORAČUNA**  
**SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA**  
**POPREČNO OPTEREĆENIH**

Ivica Horvat, 0823/336D

Varaždin, srpanj 2020.



**SVEUČILIŠTE SJEVER**  
**SVEUČILIŠNI CENTAR VARAŽDIN**  
**Studij Graditeljstva**



**DIPLOMSKI RAD BR. 1/GRD/2020**

**PRILOG ANALIZI PRORAČUNA**  
**SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA**  
**POPREČNO OPTEREĆENIH**

Student:  
Ivica Horvat, 0823/336D

Mentor:  
dr.sc. Božo Soldo, red.prof.

Varaždin, srpanj 2020.

# Prijava diplomskog rada

## Definiranje teme diplomskog rada i povjerenstva

ODJEL	Odjel za graditeljstvo		
STUDIJ	diplomski sveučilišni studij Graditeljstvo		
PRISTUPNIK	Ivica Horvat	MATIČNI BROJ	0823/336D
DATUM	4. IV. 2020.	KOLEGIJ	Temeljne konstrukcije
NASLOV RADA	"PRILOG ANALIZI PRORAČUNA SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA POPREČNO OPTEREĆENIH"		
NASLOV RADA NA ENGL. JEZIKU	ENCLOSURE TO THE ANALYSIS OF FLEXION OF TRANSVERSE WEIGHTED CONSTRUCTIONS ON THE GROUND		
MENTOR	dr. sc. Božo Soldo	ZVANJE	red. prof.
ČLANOVI POVJERENSTVA	1. doc. dr. sc. Bojan Đurin - predsjednik 2. prof. dr. sc. Božo Soldo - mentor 3. doc. dr. sc. Aleksej Aniskin - član 4. doc. dr. sc. Matija Orešković - zamjenski član 5.		

## Zadatak diplomskog rada

BROJ	001/GRD/2020
OPIS	Pod temom Diplomskog rada: "PRILOG ANALIZI PRORAČUNA SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA POPREČNO OPTEREĆENIH" u radu je potrebno prikazati analizu proračuna s više metoda s naglasnom na analitičke metode jednoparametarskog i dvoparametarskog, po mogućnosti i ostalih metoda i uz više mogućih uvjeta. Načelni sadržaj rada sastojao bi se od poglavlja: - SADRŽAJ - UVOD - OPĆENITO O PLITKOM TEMELJENJU I KLASIFILACIJI TEMELJNIH NOSAČA - PRIMJERI SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA - ANALITIČKE METODE PRORAČUNA PREDMETNIH METODA - ODREĐIVANJE PARAMETARA TLA - OPĆENITO O NUMERIČKIM METODAMA PRORAČUNA - PRIMJERI PRORAČUNA SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA - REZULTATI I ANALIZA PREDMETNIH PRORAČUNA - ZAKLJUČAK - LITERATURA

ZADATAK URUČEN 13.07.2020.



POTPIS MENTORA

## **Sažetak**

Da bi mogli dobiti dobar, pouzdan i kvalitetan proračun temelja objekta te da bi bili sigurni da kod izvođenja istih nećemo imati problema sa njihovom stabilnošću, moramo, osim samog dimenzioniranja oblika, količine armature i vrste temelja, dobro riješiti interakciju temelja objekta i temeljnog tla u svim fazama izgradnje. Zbog složenosti mehaničkih osobina tla, potrebno je kod proračuna interakcije temelja i temeljnog tla, uvesti određena pojednostavljenja jer bi u protivnom problem bio nerješiv ili bi dobiveni rezultati iziskivali nerealno skupa rješenja kod izvođenja objekta. Zbog svega navedenog, najveći je broj rješenja razvijen za tlo kao homogen, linearno elastičan i izotropan poluprostor. Sva ta pojednostavljenja te računalni programi omogućavaju nam, u proračunu naprezanja i slijeganja temeljnih nosača, korištenje numeričkih metoda. U mnogim stručnim i znanstvenim radovima analizirao je rješavanje ovakvih proračuna različitim numeričkim metodama, dok je u ovom radu naglasak na analitičkim metodama jednoparametarskog i dvoparametarskog tla, kao i usporedba rezultata sa rezultatima dobivenim numeričkom metodom u računalnom programu Tower 8.0 Demo i analitičkom metodom u računalnom programu „Greda“ iz paketa programa za rješavanje geotehničkih problema GEO5 2020 Demo.

**Ključne riječi:** temeljni nosač, jednoparametarski model tla, dvoparametarski model tla, analitička metoda, numerička metoda

# ENCLOSURE TO THE ANALYSIS OF FLEXION OF TRANSVERSE WEIGHTED CONSTRUCTIONS ON THE GROUND

## **Abstract**

To be able to get a good, reliable and quality calculation of the building foundation and be sure that we will not have problems with their stability, we must, other than the dimensioning of the shape, amount of reinforcement and type of foundation, solve well the interaction between the building foundation and foundation soil at all stage of building. Because of the complexity of the mechanical characteristics of the soil, it is necessary to introduce certain simplifications in the calculation of the interaction between the foundation and the foundation soil, otherwise the problem would be unsolvable, or the obtained results would require unrealistically expensive solutions. For all those reasons, the largest number of solutions has been developed for the soil as a homogeneous, linear elastic and isotropic half-spatial. These simplifications and computer programs enable us the use of numerical methods in the calculation of the stresses and settlement of foundation beams. Many scientific papers have analyzed the resolution of these calculation by different numerical methods, while in this paper focus is on analytical methods of single-parameter and two-parameter soil, as well as comparing results with the results obtained by the numerical method in the computer program of Tower 8.0 Demo and analytical method in the computer program “Greda” from a program package for solving geotechnical problems GEO5 2020 Demo.

**Keywords:** foundation beam, single-parametric soil model, two-parametric soil model, analytical method, numerical method

# SADRŽAJ

<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMELJI .....</b>	<b>2</b>
2.1 OPĆENITO.....	2
2.2 KLASIFIKACIJA TEMELJNIH NOSAČA PREMA PARAMETRU KRUTOSTI .....	3
<b>3. PRIMJERI SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA.....</b>	<b>5</b>
3.1 TEMELJNI NOSAČI – TEMELJI ZGRADA.....	5
3.2 TEMELJNI NOSAČI – PRIVREMENE GRAĐEVINE.....	7
3.3 TEMELJNI NOSAČI U LUKAMA .....	8
3.4 ŽELJEZNIČKA PRUGA, NOSAČ NA ELASTIČNOJ PODLOZI .....	11
<b>4. ANALITIČKE METODE PRORAČUNA PREDMETNIH METODA .....</b>	<b>12</b>
4.1 OPĆENITO.....	12
4.2 JEDNOPARAMETARSKI MODEL TLA.....	14
4.2.1 PRORAČUN NOSIVOSTI GORNJEG USTROJA ŽELJEZNIČKE PRUGE PO WINKLER-U .....	15
4.2.2 PRORAČUN NOSIVOSTI GORNJEG USTROJA ŽELJEZNIČKE PRUGE PO ZIMMERMANN-U:.....	16
4.2.2.1 PRORAČUN REAKCIJSKE SILE P PREMA POJEDINIM AUTORIMA: .....	18
4.2.2.2 PRORAČUN MOMENATA SAVIJANJA TRAČNICA PREMA POJEDINIM AUTORIMA .....	20
4.3 DVOPARAMETARSKI MODEL TLA .....	23
<b>5. ODREĐIVANJE PARAMETARA TLA .....</b>	<b>26</b>
5.1 ODREĐIVANJE KOEFICIJENTA REAKCIJE PODLOGE $k_s$ .....	26
5.2 ODREĐIVANJE PARAMETRA N.....	34
<b>6. NUMERIČKE METODE PRORAČUNA.....</b>	<b>36</b>
6.1 METODA KONAČNIH ELEMENATA MKE.....	36
6.2 METODA KONAČNIH RAZLIKA MKR.....	37
<b>7. PRIMJERI PRORAČUNA SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA.....</b>	<b>39</b>
7.1 TEMELJNI NOSAČ NA JEDNOPARAMETARSKOM MODELU TLA.....	39
7.2 TEMELJNI NOSAČ NA DVOPARAMETARSKOM MODELU TLA.....	47
7.2.1 PRORAČUN DVOPARAMETARSKOG MODELE TLA – PARAMETAR N -SILA U LANČANICI.....	51
7.2.2 PRORAČUN DVOPARAMETARSKOG MODELE TLA – PARAMETAR N -FORMULA IZ LITERATURE .....	59
7.3 PRORAČUN POMOĆU RAČUNALNOG PROGRAMA TOWER 8 DEMO.....	61
7.4 PRORAČUN POMOĆU RAČUNALNOG PROGRAMA GEO5 2020 DEMO .....	68



<b>8.</b>	<b>REZULTATI I ANALIZA PREDMETNIH PRORAČUNA .....</b>	<b>71</b>
8.1	USPOREDBA REZULTATA DOBIVENIH RAZLIČITIM METODAMA PRORAČUNA .....	71
8.2	UTJECAJ DEBLJINE STIŠLJIVOG SLOJA H NA REZULTATE PRORAČUNA .....	74
8.3	UTJECAJ VISINE NOSAČA H NA REZULTATE PRORAČUNA .....	77
8.4	UTJECAJ KOEFICIJENTA REAKCIJE PODLOGE ( $k_s$ ) NA REZULTATE PRORAČUNA .....	80
<b>9.</b>	<b>ZAKLJUČAK .....</b>	<b>83</b>
<b>10.</b>	<b>LITERATURA .....</b>	<b>87</b>

## 1. UVOD

U uobičajenoj inženjerskoj praksi statička je analiza i oblikovanje elastičnih temeljnih nosača razvijena na pretpostavci da su reakcijske sile temeljnog tla u svakoj točki proporcionalne progibu temeljnog nosača. Karakteristike vertikalne deformacije temelja definirane su pomoću identičnih, neovisnih, usko raspoređenih, diskretnih i linearno elastičnih opruga. Konstanta proporcionalnosti ovih opruga poznata je kao koeficijent reakcije tla,  $k_s$ . Ovaj relativno jednostavan mehanički prikaz temeljnog tla prvi je predstavio Winkler (1967). Winklerov model, koji je prvobitno razvijen za analizu željezničkih pruga, vrlo je jednostavan, ali ne predstavlja realne karakteristike temeljnih tla. Jedan od najvažniji nedostatak Winklerovog modela je taj što on pretpostavlja da nema interakcije između susjednih opruga i na taj način zanemaruje okomiti napon smicanja do kojeg dolazi unutar materijala u tlu. Osim toga, pojavljuje se diskontinuitet pomaka između opterećenog i neopterećenog dijela temeljne površine, što nije realno. Nedostaci Winklerovog modela pokušali su se riješiti uvođenjem neke vrste interakcije između neovisnih opruga pomoću različitih vrsta međusobne veze, poput fleksibilnih elemenata, npr. zategnute membrane. Model rješenja temeljnog nosača na elastičnoj podlozi koji je predložio Filonenko-Borodich (1940) postiže kontinuitet između pojedinih opruga u Winklerovom modelu spajajući ih tankom elastičnom membranom pod stalnom napetošću. U modelu koji je predložio Hetényi (1946), interakcija između neovisnih elemenata opruga se postiže ugradnjom elastične ploče u trodimenzionalne probleme ili elastičnog sloja u dvodimenzionalni problem koji se mogu deformirati samo na savijanje. Još jedan model temelja, koji je predložio Pasternak (1954) postiže interakciju na posmik između opruga spajanjem krajeva opruga na sloj koji se sastoji od netlačivih vertikalnih elemenata koji se deformiraju samo poprečnim silama (Kerr, 1964; Pronk, 1993). Ova vrsta matematičkih modela ima još jedan konstantni parametar koji karakterizira interakciju između opruga i stoga se nazivaju dvoparametarski modeli [1].

U ovom radu naglasak će biti na Winklerovom jednoparametarskom i Filonenko-Borodich, dvoparametarskom modelu tla.

## 2. TEMELJI

### 2.1 Općenito

Temelj je dio konstrukcije koji omogućava da se sile i momenti reakcija konstrukcije raspodijele na toliku površinu tla kolika je potrebna kako bi se postignula potrebna sigurnost od sloma tla i da su deformacije tla kompatibilne s funkcijom građevine. U temeljenju se proučavaju promjene napona i deformacije u tlu ispod temelja te međusobno djelovanje građevine i tla kako bi se temelj mogao što povoljnije oblikovati [11].

Odabir vrste i oblika temelja ovisi od vrste i intenziteta opterećenja koje temelj treba prenijeti na tlo preko kontaktne površine, o vrsti i karakteristikama tla, nivou podzemne vode, položaju građevine u odnosu na postojeće građevine. Visinska razlika između kontaktne površine i površine tla naziva se dubina temeljenja, te se u zavisnosti od dubine temeljenja, temelji dijele na:

- Plitki temelji
- Duboki temelji
- Kombinirani temelji (npr. Ploča s pilotima)

Plitki temelji prenose opterećenja na tlo samo preko kontaktne površine. Dijelimo ih na:

- Temelji samci (prenosi opterećenje od jednog stupa)
- Temeljne trake (prenose opterećenje od nosivih zidova)
- Temeljni nosači (prenose opterećenje od dva ili više stupova)
- Temeljni roštilji (više ortogonalno povezanih temeljnih nosača)
- Temeljne ploče (izvodi se ispod čitave površine objekta, kada je nestabilno temeljno tlo ili su visoke podzemne vode)

Ponašanje plitkih temelja ovisi o njihovoj krutosti te se i proračun mora prilagoditi ovoj činjenici. Podjela se može izvršiti na:

- Krute plitke temelje (samci, trake)
- Savitljive plitke temelje (temeljni nosači, roštilji, ploče)

Duboki temelji koriste se kada se nosivi slojevi male deformabilnosti nalaze na velikoj dubini ili na tlo treba prenijeti velike horizontalne sile. Dijelimo ih na:

- Betonske dijafragme (kao temelji)
- Temelji na bunarima
- Temelji na kesonima
- Temelji na sanducima
- Piloti

## 2.2 Klasifikacija temeljnih nosača prema parametru krutosti

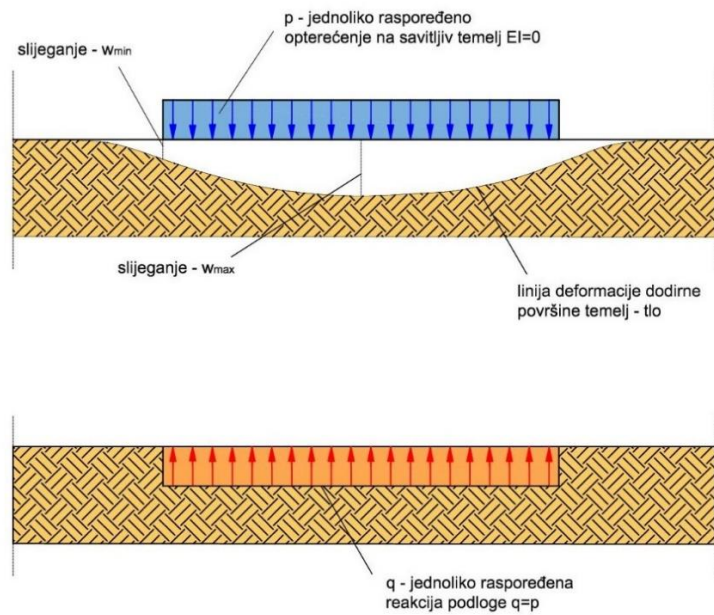
Klasifikacija temeljnih nosača konačne dužine, na Winklerovoj podlozi, vrši se prema koeficijentu savitljivosti  $\alpha L$ . Ako je koeficijent savitljivosti temeljnog nosača veći, nosač je savitljiviji i obrnuto (manje savitljiv, odnosno krući). Na savitljivom nosaču (veliki  $\alpha L$ ), utjecaji se prenose na malu udaljenost od sile, dok se kod krutih nosača (mali  $\alpha L$ ), utjecaji prenose na veću udaljenost od sile. Uobičajena klasifikacija temeljnih nosača/greda na Winklerovoj podlozi, u funkciji koeficijenta savitljivosti  $\alpha L$ , prikazana je u tablici 2.1.[21]

Tablica 2.1. Klasifikacija temeljnih nosača prema parametru krutosti  $\alpha L$ [21]

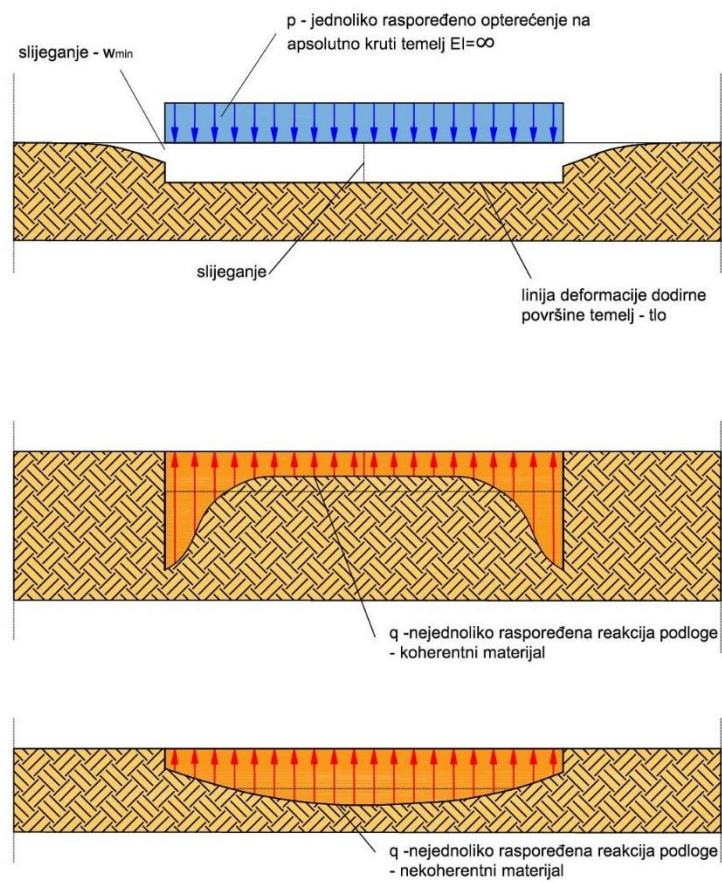
Klasifikacija (Hetenyi, 1936)	$\alpha L$	Klasifikacija (Vesić, 1961)	$\alpha L$
Kratke (krute) grede	$<0,80$	Kratke (krute) grede	$<0,80$
Grede srednje dužine	$0,80 - \pi$	Grede srednje dužine	$0,80 - 2,25$
-	-	Srednje dugačke grede	$2,25 - 5,00$
Dugačke (savitljive) grede	$>\pi$	Dugačke (savitljive) grede	$>5,00$

gdje je:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s \cdot B}{4EI}} \quad 2.1.$$



Slika 2.1. Raspodjela kontaktnih naprezanja za idealno savitljiv temelj



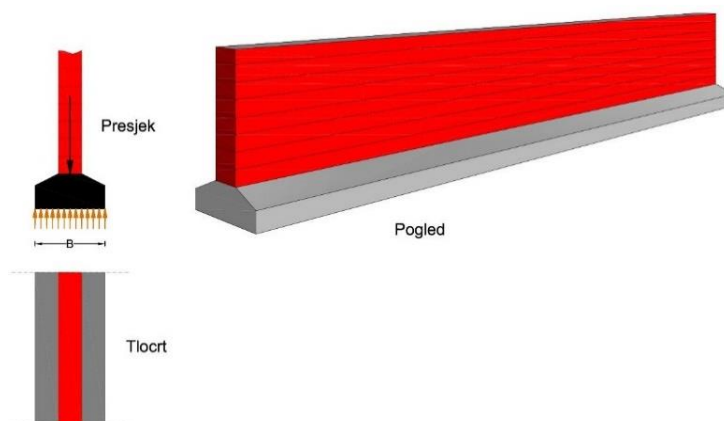
Slika 2.2. Raspodjela kontaktnih naprezanja za apsolutno kruti temelj

### 3. PRIMJERI SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA

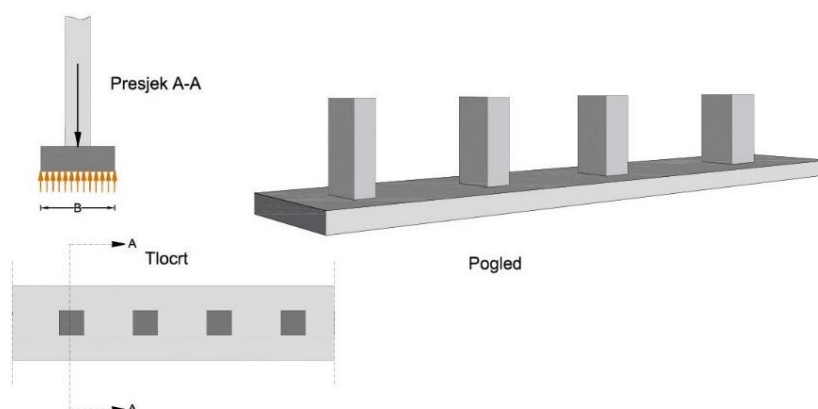
#### 3.1 Temeljni nosači – temelji zgrada

Temeljni trake prenose opterećenje sa zidova ili sistema stupova na tlo. Kada se radi o većim opterećenjima, temeljne trake ojačavaju se nosačima, gredama, najčešće s gornje strane te takav sklop nazivamo temeljni nosač. Temeljni nosači predstavljaju neprekinute temelje, točkasto opterećene stupovima zgrade koju nose. Tehnički je lakše i ekonomičnije izvesti temeljne nosače, nego više pojedinačnih temelja, posebno kada su temelji blizu jedan drugoga. Oblici temeljnih nosača ovise o konstruktivnim pojedinostima objekta te mogu biti raznih oblika. Geometrijski se oblikuju tako da se nastoji postići poklapanje težišta temeljne plohe s djelovanjem ukupne rezultantne sile na temeljni nosač. Tako se nekad, kada sile u stupovima nisu jednake, a želi se postići jednolik tlak na tlo ispod temelja, izvode trapezni oblici.

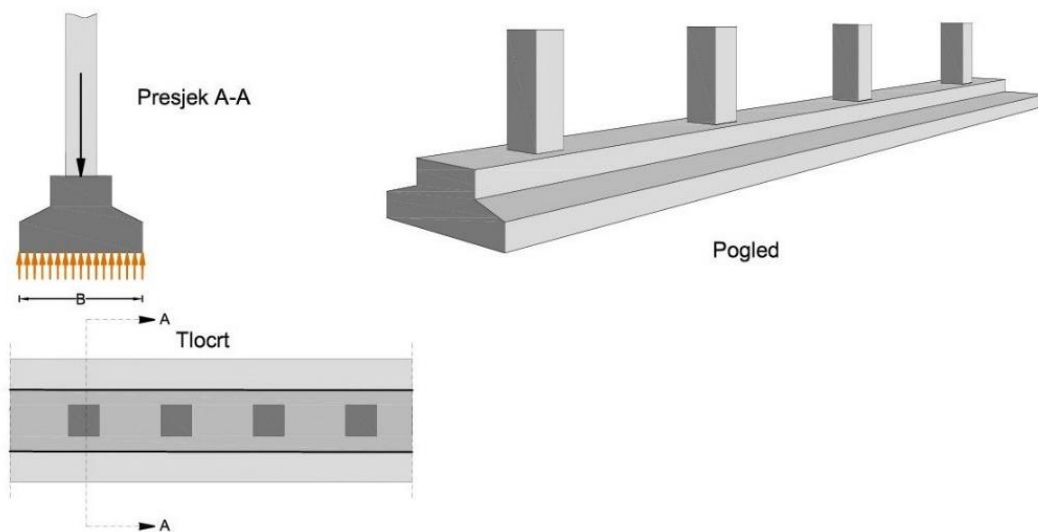
Na slici 3.1. prikazani su tipovi temeljnih traka i temeljnih nosača:



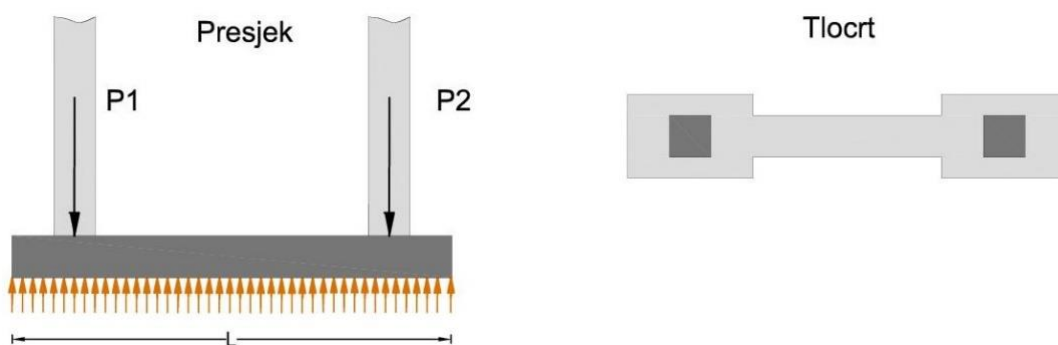
a) Temeljna traka ispod zida



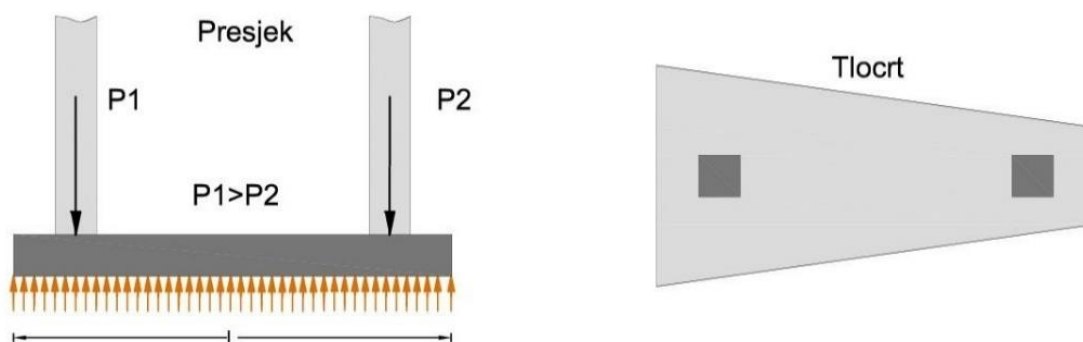
b) Temeljni nosač ispod pojedinačnih stupova



c) Temeljni nosač ojačan gredom na gornjoj strani



d) Temeljni samci spojeni temeljnim nosačem



e) Trapezni oblik temeljnog nosača

Slika 3.1. Tipovi temeljnih traka i nosača

### 3.2 Temeljni nosači – privremene građevine

Temeljni nosači koriste se i kao privremene građevine na gradilištu, tj. kao temelji za staze kranških dizalica. U velikim građevinskim projektima, posebno u visokogradnji, za potrebe vertikalnog ali i horizontalnog transporta na gradilištu, koriste se kranške dizalice. Da bi tlo izdržalo velika opterećenja (vlastita težina dizalice, težina tereta, djelovanje vjetra) koja dizalica prenosi preko temelja na njega, potreban je dobar temelj. Za izradu dobrog temelja potrebna su određena novčana sredstva koja direktno terete trošak projekta. Dakle, dodatni izazovi za inženjere na gradilištu su kako brzo i što točnije proračunati i dizajnirati ekonomične i sigurne temelje za kranšku dizalicu. Često se, zbog ekonomskih razloga ali i neshvaćanja važnosti privremenih temelja za kranške dizalice, zanemaruje njihova važnost te im se ne pridodaje potrebna pozornost kod izrade i proračuna.

Na slici 3.2. prikazana je kranška dizalica AL.SK190 nosivosti 4.300 tona. S obzirom na njezinu nosivost, vidljivo je da se na temeljnim nosačima mogu pojaviti velika opterećenja, od vlastite težine dizalice, tereta i utjecaja vjetra, koje oni moraju prenijeti na tlo. U takvim se slučajevima mora ozbiljno pristupiti proračunu i izradi temeljnih nosača koji služe za temeljenje kranške staze.



Slika 3.2. Kranška dizalica AL.SK nosivosti 4300 tona na trakastom temeljnom nosaču; Izvor: <https://www.ale-heavylift.com/knowledge-centre/case-studies/lifting-portal-beams-with-the-al-sk190-at-earls-court-uk/>



### 3.3 Temeljni nosači u lukama

Često je korištenje temeljnih nosača i u teretnim brodskim lukama. Sve veći brodovi iziskuju i sve veće dizalice, koje će što brže izvršiti istovar kontejnera. Tako sada dizalice istovremeno mogu podizati i nekoliko kontejnera. Sve to zahtijeva dobre i kvalitetne temelje koji će pružiti dobar i siguran oslonac dizalicama, bez diferencijalnih slijeganja.

Za temeljenje kranskih staza, po kojima se kreću dizalice, služe temeljni nosači. Oni moraju prenijeti i distribuirati na tlo velike sile, a da istovremeno naprezanja u tlu budu manja od onih koje tlo može podnijeti.



Slika 3.3. Dizalica u luci za pretovar kontejnera; Izvor: <https://www.gantrail.com/sectors/marine-sector/>

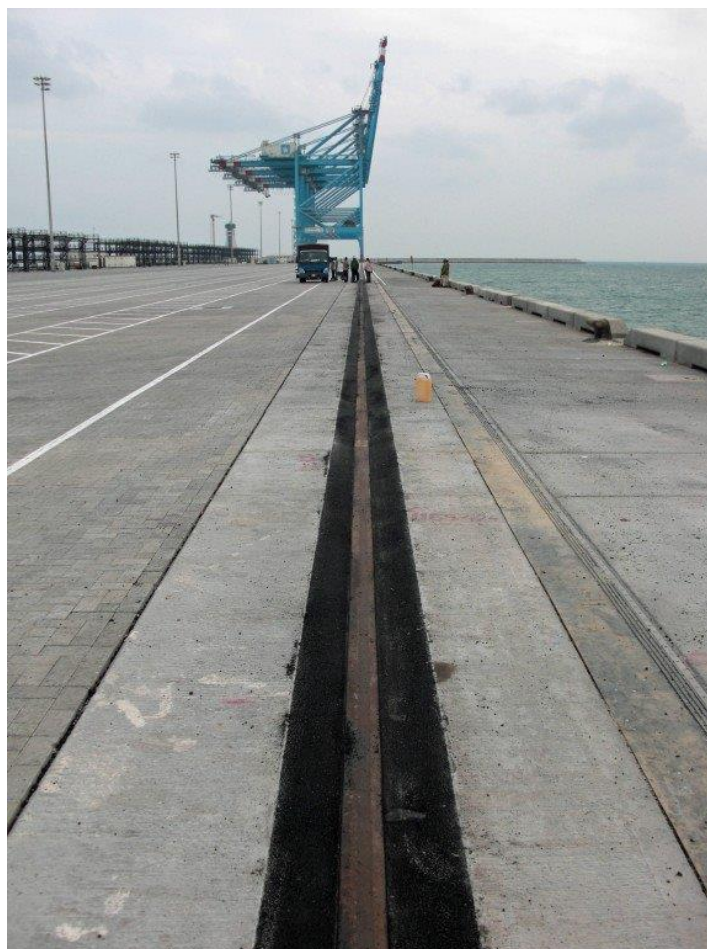
Osim opterećenja od samih dizalica, u lukama je prisutno i opterećenje od prometa vozila za manipulaciju kontejnerima. Sve to dodatno opterećenje doprinosi stvaranju velikog aktivnog tlaka na obalni zid. Kako bi se dodatna opterećenja prenijela što dublje u tlo, tako da imaju minimalni utjecaj na stabilnost obalnog zida, temeljne nosače potrebno je podupri pilotima. Također, nepovoljni utjecaj na temeljne nosače ima i neravnomjerno korištenje kranskih staza. Dizalice intenzivnije koriste pojedine dijelove staze, dok pojedine dijelove gotovo i ne koriste.



Slika 3.4. Piloti na koji će se izgraditi temeljni nosač za kransku stazu lučne dizalice; Izvor: <https://mapio.net/pic/p-2522726/>



Slika 3.5. Armiranje temeljnog nosača kranske staze za lučnu dizalicu; Izvor: <https://mapio.net/pic/p-2353656/>



Slika 3.6. Detalj kranske staze na temeljnom nosaču za lučnu dizalicu; Izvor: <https://mapio.net/pic/p-17545940/>



Slika 3.7. Tračnica kranske staze, Izvor: [httpm.sincholdrail.cominfocrane-rail-installation\\_19583596.html](httpm.sincholdrail.cominfocrane-rail-installation_19583596.html)

### 3.4 Željeznička pruga, nosač na elastičnoj podlozi

Željeznička pruga također predstavlja nosač na elastičnoj podlozi. Teoriju proračuna savitljiv temeljnih konstrukcija, kao što su kontinuirani temeljni nosači, temeljni roštilji, temeljne ploče i ploče izložene prometnom opterećenju, razvijena je iz proračuna vertikalnih deformacija u željezničkom kolosijeku. Teoriju proračuna je Zimmerman (1888) praktično primijenio za proračun vertikalnih deformacija na željezničkom kolosijeku, a zasnovana je na konceptu modula reakcije podloge koju je u primijenjenu mehaniku uveo Winkler (1867).



Slika 3.8. Željeznička pruga -nosač na elastičnoj podlozi; Izvor: <https://www.zeljeznice.net/forum/index.php?forum/11-infrastruktura/>



Slika 3.9. Željeznička pruga-nosač na elastičnoj podlozi; Izvor: <https://www.palfinger.com/en-in/products/railway-systems/safety-standards>

## 4. ANALITIČKE METODE PRORAČUNA PREDMETNIH METODA

### 4.1 Općenito

Ključni aspekt u proračunu elastičnih temeljnih konstrukcija, koji se danas često susreću u praksi, je sposobnost inženjera da „osjeti“ i odabere najpovoljniju metodu izračuna koje će dati najrealnije rezultate. Tlo, kao izuzetno heterogen i anizotropan materijal, ne može se definirati jednostavnim odnosima i matematičkim izrazima, te proračuni nosivosti tla zahtijevaju određena pojednostavljenja, jer bi u suprotnom problem bio nerješiv ili bi rješenje bilo ekonomski neopravdano. Imajući to u vidu, najveći broj rješenja je razvijen za tlo kao linearno-elastičan, homogen i izotropan kontinuum. Ova rješenja su relativno jednostavna, međutim zbog grube idealizacije, u nekim slučajevima mogu dati nerealne i/ili potpuno pogrešne rezultate. Zbog toga, svaki rezultat treba prije primjene kritički preispitati sa aspekta ulaznih pretpostavki i učinjene idealizacije, kojim je dat fizički model, sveden na pojednostavljen matematički model. U tom smislu, svaki rezultat uvijek treba tumačiti kao posljedicu proračuna idealiziranog, a ne realnog fizičkog modela.[21]

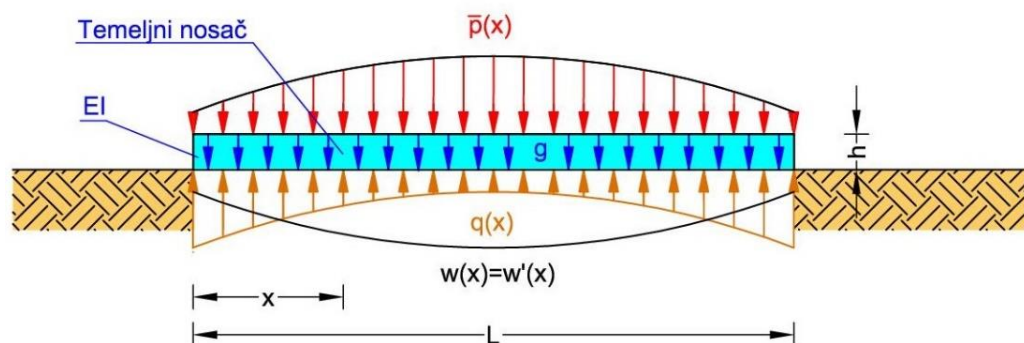
Određivanje realnog modela interakcije temeljnog tla i elastičnih temeljnih konstrukcija zahtijeva složenu analizu čiji je rezultat što realnija raspodjela reakcije podloge ( $q$ ) po površini temeljnog nosača ( $A$ ) ( $A=b \times L$ ).

Prema [11], proračun stvarne raspodjele napona između temeljnog nosača i tla provodi se na više načina:

- Linearno deformabilno tlo, poznato kao Winklerov poluprostor
- Linearno elastičan homogen beskonačan poluprostor
- Nehomogeno i nelinearno stišljivo tlo

Raspodjela napona na kontaktnoj plohi temelja ovisi o krutosti temelja i deformacijskim osobinama tla. Uzima se da je vertikalni pomak točaka, po osi temeljnog nosača, jednak slijeganju tla ispod iste te točke. Na temelju ovakvog odnosa, kod svih rješenja polazi se od poznate diferencijalne jednadžbe elastičnosti grede poprečno opterećene, a ona prema [11] glasi:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = \bar{p}(x) \quad 4.1.$$



Slika 4.1. Elastični temeljni nosač na tlu

gdje je:

- $EI$  – krutost temeljnog nosača ( $kN/m^2$ )
- $w$  – progib nosača ( $m$ )
- $w'$  – slijeganje tla ispod nosača
- $q$  – reakcija tla
- $g$  – vlastita težina temeljnog nosača
- $\bar{p}(x)$  – naprezanje u smjeru pozitivnog progiba

Na ovaj način dobivamo funkcionalnu ovisnost između pomaka točaka osi temeljnog nosača  $w(x)$  i pomaka na površini tla ispod temeljnog nosača  $w'(x)$ . Ova ovisnost ovisi o elastičnim osobinama temeljnog nosača i deformacijskim osobinama tla.

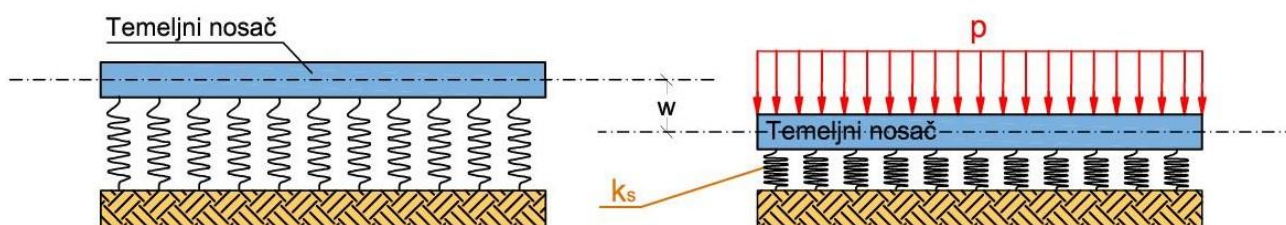


Slika 4.2. Armiranje elastičnih temeljnih nosača na tlu; Izvor: [https://www.youtube.com/watch?v=4G3a\\_xkg8k8](https://www.youtube.com/watch?v=4G3a_xkg8k8)

## 4.2 Jednparametarski model tla

Jednparametarski model tla, najjednostavniji je model tla. Zasnovan je na konceptu modula reakcije tla. U mehaniku tla, ovaj model uveo je Winkler, a Zimmermann (1888) ga je prvi put praktično primijenio na proračun napona u željezničkim tračnicama, koje su oslonjene na pragove, a koji leže na sloju tucanika. Zimmermann je željezničke tračnice modelirao kao kontinuirani nosač na nizu deformabilnih oslonaca. Pošto su pragovi međusobno nezavisni i dovoljno udaljeni, opterećenje na jednom osloncu ima utjecaj samo na taj oslonac dok je slijeganje susjednih oslonaca nula. Ovo je osnovna radna hipoteza u konceptu modula reakcije tla ili tzv. Winklerove podloge. Pošto se podloga opisuje jednim parametrom, naziva se i jednparametarski model tla.

Postupno se ta teorija počela primjenjivati i u proračun savitljivih temeljnih konstrukcija, kao što su kontinuirani temeljni nosači, temeljni roštilji, temeljne ploče te ploče izložene promjetnom opterećenju. U prvoj polovini XX stoljeća, metoda je proširena na proračun pilota i zaštitnih zidova u tlu opterećenih bočnim silama. Za razliku od temeljnih nosača gdje se tlo modelira sistemom vertikalnih elastičnih opruga, kod bočno opterećenih pilota i savitljivih zaštitnih zidova u tlu, tlo se modelira sistemom horizontalnih elastičnih opruga.



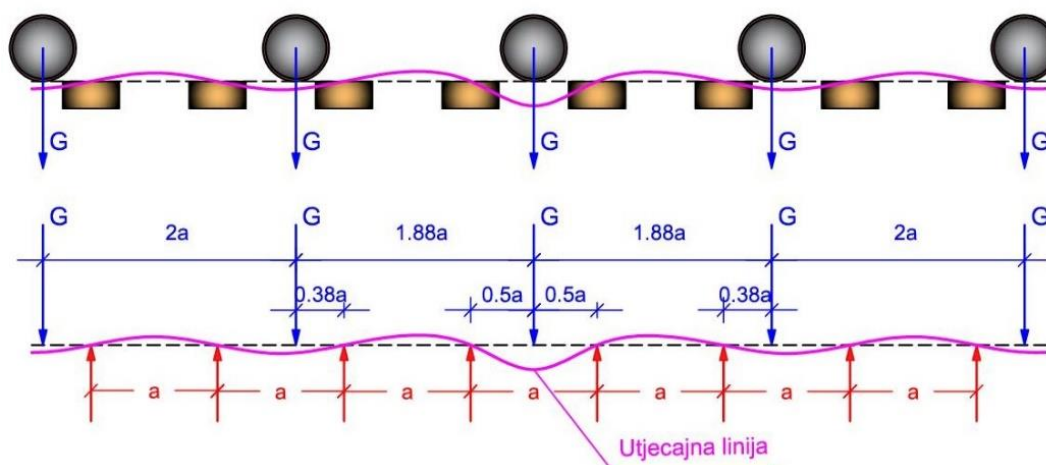
Slika 4.3. Model podloge sa oprugama (Winklerov model)

$$p = k \cdot w \Rightarrow k = \frac{p}{w} \quad 4.2.$$

Pretpostavka o tlu kao sistemu nezavisnih opruga ne odgovara realnom ponašanju tla. Tlo je kontinuum, u kojem se utjecaj iz jedne točke prenosi na okolne točke. Međutim Winklerov model se zbog jednostavnosti zadržao u upotrebi do danas i može se koristiti za neke jednostavne inženjerske proračune.[21]

## 4.2.1 Proračun nosivosti gornjeg ustroja željezničke pruge po Winkler-u

Prvi proračun gornjeg ustroja dao je Winkler 1875. godine. Proračun je temeljio na nekoliko pretpostavki: tračnicu promatra kao kontinuirani nosač bez težine s čvrstim osloncima (pragovima) raspoređenim na jednakim međusobnim razmacima "a", a nosač je opterećen prema shemi, gdje je vidljivo da je opterećenje kotača u svakom drugom polju.



Slika 4.4. Shema opterećenja tračnica prema Winkleru

Ovakvom shemom opterećenja dobiva se najveći moment:

$$M = 0,189 \cdot G \cdot a \text{ [Ncm]} \quad 4.3.$$

gdje je:

- a – razmak željezničkih pragova (cm)
- G – opterećenje po kotaču (N)

Da bi se dobilo dinamičko naprezanje u tračnici uslijed pokretnog opterećenja, Winkler je upotrijebio dinamički koeficijent  $\alpha$

$$\alpha = \frac{I}{I - 0,0000007 \cdot G \cdot a \cdot V^2} \quad 4.4.$$

gdje je:

- I – moment tromosti tračnice (cm<sup>4</sup>)
- V – maksimalna dozvoljena brzina vlaka (km/h)

Iz navedenog izraza vidljivo je da je za  $V=0$ ,  $\alpha=I$ .



Proračun dinamičkog koeficijenta primjenjiv je za brzine 30 do 40 km/h, kakve su i prevladavale u vrijeme Winklera. Ako se u proračun uvedu brzine koje prevladavaju na današnjim prugama ( $V=200$  km/h) vrijednost dinamičkog koeficijenta poprima vrijednost  $\alpha = \infty$ , što je besmisleno, jer pri takvim brzinama ipak ne dolazi do razaranja kolosijeka.

Udruženje srednjoeuropskih željeznica odredilo je empirijskim postupkom dinamički koeficijent  $\alpha$ :

$$\alpha = 1 + \frac{V^2}{30000} \quad 4.5.$$

Navedeni izraz daje dobre rezultate za brzine do 120 km/sat.

Za proračun koeficijenta  $\alpha$ , Njemačke željeznice (DB) koriste izraz Schramma, koji se koristi za brzine do 300 km/sat, a glasi:

$$\alpha = 1 + \frac{4,5 \cdot V^2}{10^5} - \frac{1,5 \cdot V^3}{10^7} \quad 4.6.$$

Nedostaci kod Winklerovog proračuna su:

- Ležajevi nisu čvrsti i nepomični već popuštaju pod opterećenjem
- Veličina opterećenja kotača nije konstantna, već se opterećenja mogu međusobno znatno razlikovati i time utjecati na veličinu momenta

Winklerovu koncepciju razvijali su i dopunjavali drugi znanstvenici kako bi ona dala što realnije rezultate ponašanja realnog tla. Među njima ističu se Zimmermann i Jaehn [5]

#### 4.2.2 Proračun nosivosti gornjeg ustroja željezničke pruge po Zimmermann-u:

Karakteristike:

- Uzima u obzir elastičnost podloge
- Tračnicu promatra kao uzdužni nosač bez težine (vodi računa o istrošenosti tračnice)
- Uvodi pojam „koeficijent podloge“ –  $c$  [ $\text{N}/\text{cm}^3$ ]
- Tračnica je opterećena ravnomjerno podijeljenim opterećenjem „ $p$ “ [ $\text{N}/\text{cm}^2$ ]
- Tlak koji nastaje u zastornoj prizmi proporcionalan je upadanju praga ( $y_r$ ), tj  $p=c \times y_r$
- Uvodi u proračun kvalitetu pragova, tj. trulost pragova
- Dopuštena naprezanja dana su u ovisnosti o brzini vožnje

Proračun gornjeg ustroja željezničkih pruga s poprečnim pragovima, prema Zimmermann-u, u prvom je fazi bio kompliciran. Postao je pristupačan tek nakon tabelarnog prikaza određenih konstanti koje su ovisne o dimenzijama pragova [5].

Veličina progiba, tj utiskivanja praga u podlogu iznosi:

$$y_r = \frac{k \cdot P}{b \cdot c} \eta_\rho \quad 4.7.$$

gdje je:

- $c$  – koeficijent podloge ( $\text{N/cm}^3$ )
- $b$  – širina praga (cm)
- $[\eta_\rho]$  – bezdimenzionalna veličina koja se dobije tablično

$$k = \frac{1}{L} = \sqrt[4]{\frac{bc}{4E_p I_p}} \Rightarrow L = \sqrt[4]{\frac{4E_p I_p}{bc}} \quad 4.8.$$

Ako je  $y_r=1$ , iz jednadžbe 4.7., dobije se slijedeće:

$$P = \frac{bc}{k \cdot \eta_\rho} = D \quad 4.9.$$

Navedeno predstavlja veličinu sile koja na mjestu hvatišta sile utiskuje prag za 1cm, a to predstavlja krutost praga. Navedeni izraz pojednostavljen je izrazom Diehl-a [5]:

$$D = 2bc\acute{u} \quad 4.10.$$

gdje je:

- $\acute{u}$  – razmak od osi tračnice do kraja praga
- $b$  – širina praga (cm)
- $c$  – koeficijent podloge ( $\text{N/cm}^3$ )

Promjena mehaničkih karakteristika drveta, kod drvenih pragova na HŽ-u, naziva se trulost pragova. Trulost pragova u proračun ulazi preko krutosti pragova, koja se izračunava se pomoću slijedećeg izraza:

$$D' = \frac{D \cdot D''}{D + D''} \quad 4.11.$$

Veličina  $D''$  izračunava se prema

$$D'' = D_0 \cdot f \quad 4.12.$$

gdje je:

- $D$  – krutost pragova po Diehl – u
- $D'$  – krutost praga [daN/cm]
- $D_0$  – stanje pragova (tablica 4.1.)
- $f$  – površina nalijeganja na prag

Tablica 4.1. Dozvoljeno opterećenje praga s obzirom na stanje praga (trulost)

Trulost pragova %	≤10	10 – 15	15 – 20	>20
$D_0$ [daN/cm <sup>3</sup> ]	100	70	50	31

Koeficijent podloge prema Zimmermann-u se dobije pomoću slijedećeg izraza:

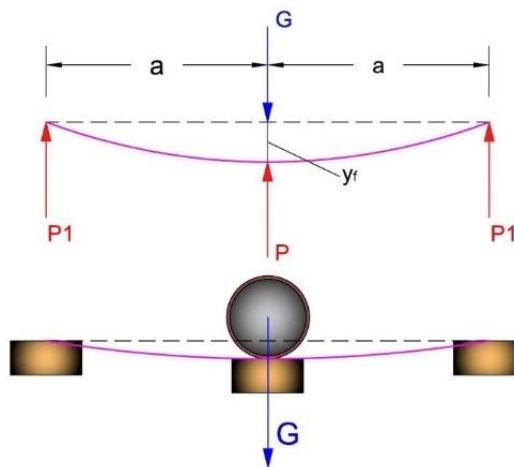
$$c = \frac{\frac{3}{4} \sqrt{\frac{G}{y_r + \sqrt{\frac{4E_p I_p}{b} \cdot b}}}}{\eta_\rho} \quad 4.13.$$

Kako bi mogli izračunati moment savijanja tračnice u sredini između dva praga, potrebno je proračunati veličinu  $P$ .

#### 4.2.2.1 Proračun reakcijske sile $P$ prema pojedinim autorima:

- *Schwedler*

Prema njegovom modelu opterećenje kotača  $G$  raspoređuje se na tri praga te tračnica ima dva polja, slika 4.4.[5]:



Slika 4.5. Shema opterećenja prema Schwedler-u

$$P = \frac{\gamma + 2}{3 \cdot \gamma + 2} \cdot G \quad 4.14.$$

$$\gamma = \frac{B}{D} \quad 4.15.$$

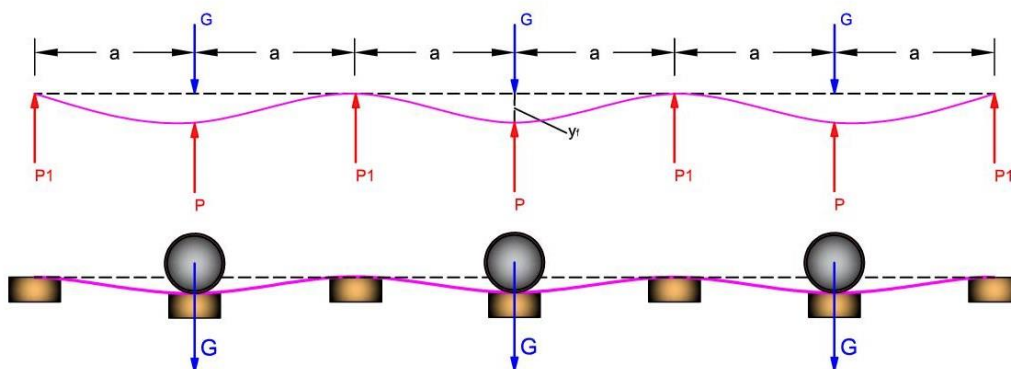
$$B = \frac{6 \cdot E_t I_t}{a^3} \quad 4.16.$$

gdje je:

- $\gamma$  – omjer krutosti praga i tračnice
- $B$  – krutost tračnice
- $G$  – opterećenje pojedinog kotača
- $D$  – krutost praga

- **Hofman**

Njegov model pretpostavlja opterećenje kotača  $G$  na svakom drugom pragu na tračnici beskonačne duljine, slika 4.5.:



Slika 4.6. Shema opterećenja prema Hofman-u

$$P = \frac{4\gamma + 1}{8\gamma + 1} \cdot G \quad 4.17.$$

Iz gornjih izraza proračunava se reakcijska sila  $P$  dok se iz niže navedenih formula izračunava progib ( $y_r$ ), moment savijanja praga ( $M_r$ ) i opterećenje na podlogu za poprečni prag ( $p$ ):

$$y_r = \frac{k \cdot P}{b \cdot c} [\eta_\rho] \quad 4.18.$$

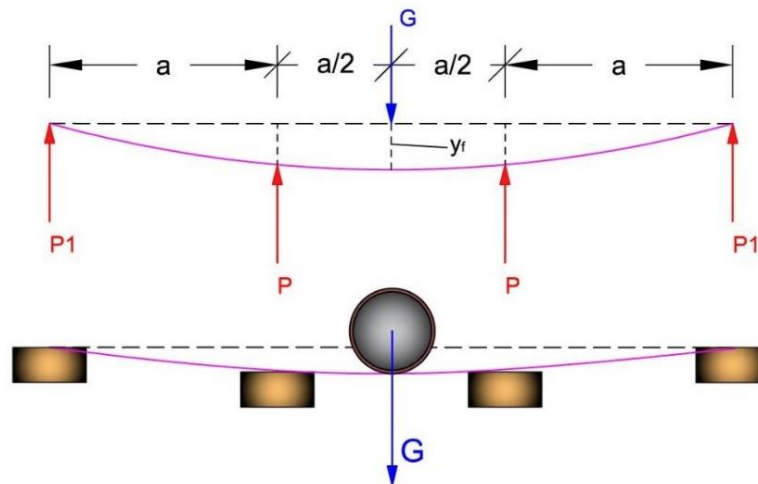
$$M_r = \frac{P}{2 \cdot k} [\eta_\rho] \quad 4.19$$

$$p = c \cdot y_r \quad 4.20.$$

#### 4.2.2.2 Proračun momenata savijanja tračnica prema pojedinim autorima

- *Zimmermann*

Prema njegovom modelu opterećenje kotača  $G$  raspoređuje se na četiri praga te tračnica ima tri polja, slika 4.6.[5]:

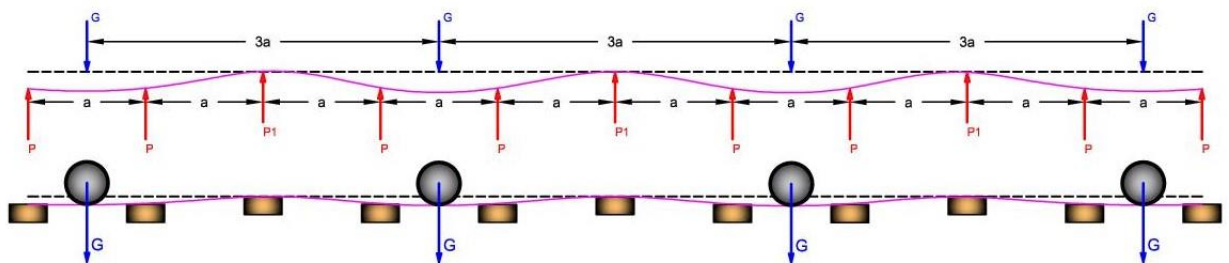


Slika 4.7. Opterećenje kotača prema Zimmermann-u

$$M = \frac{8\gamma + 7}{4\gamma + 10} \cdot \frac{G \cdot a}{4} \quad 4.21.$$

- *Engesser*

Prema njegovom modelu opterećenje kotača  $G$  nalazi se u sredini svakog trećeg polja tračnice beskonačne duljine, slika 4.7.:

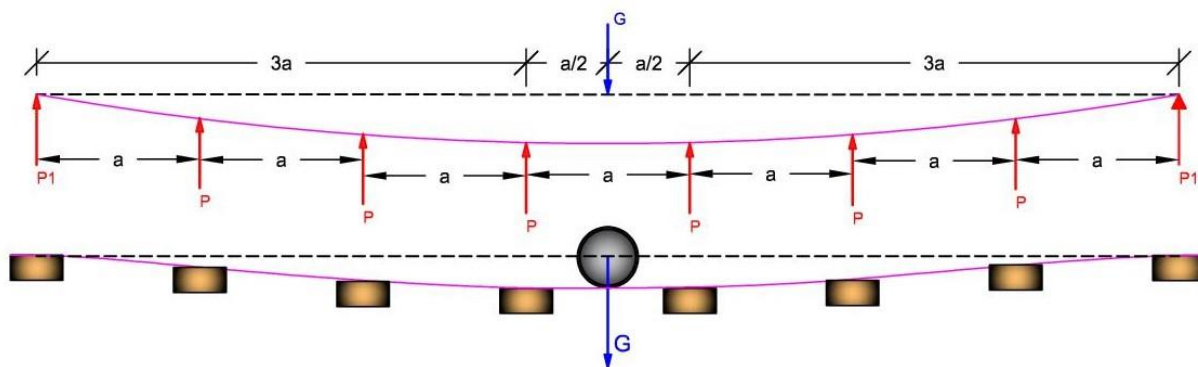


Slika 4.8. Shema opterećenja prema Engesser-u

$$M = \frac{19\gamma + 4}{3\gamma + 1} \cdot \frac{G \cdot a}{24} \quad 4.22.$$

- *Schwedler*

Prema njegovom modelu opterećenje kotača  $G$  raspoređuje se na osam pragova te tračnica ima sedam polja, slika 4.8.:



Slika 4.9. Shema opterećenja prema Schwedler-u

$$M = \frac{32\gamma^3 + 524\gamma^2 + 568\gamma + 97}{4\gamma^3 + 194\gamma^2 + 330\gamma + 71} \cdot \frac{G \cdot a}{8} \quad 4.23.$$

Navedeni izrazi mogu se pojednostaviti i svesti na slijedeći izraz:

$$M = k \cdot G \cdot a \quad 4.24.$$

gdje je:

$$k = \frac{1}{4} \left( \frac{8\gamma + 7}{4\gamma + 10} \right) \quad - \text{ Prema Zimmermann-u} \quad 4.25.$$

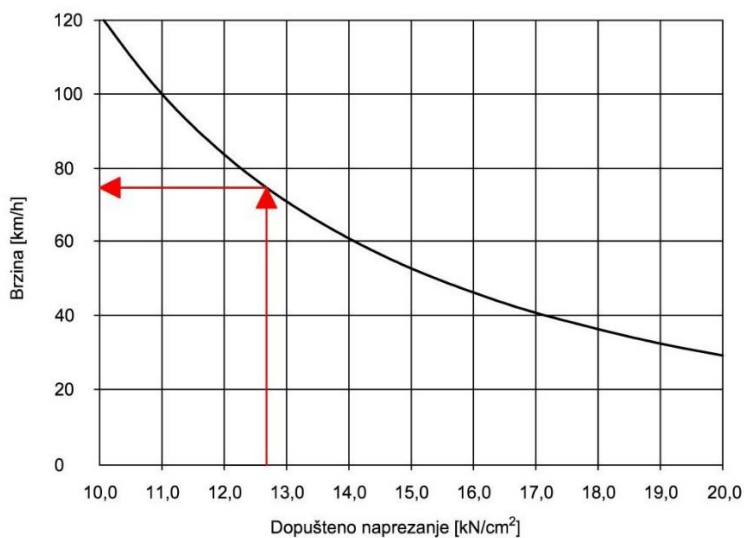
$$k = \frac{1}{24} \left( \frac{19\gamma + 4}{3\gamma + 1} \right) \quad - \text{ Prema Engesser-u} \quad 4.26.$$

$$k = \frac{1}{8} \left( \frac{32\gamma^3 + 524\gamma^2 + 568\gamma + 97}{4\gamma^3 + 194\gamma^2 + 330\gamma + 71} \right) \quad - \text{ Prema Schwedler-u} \quad 4.27.$$

Maksimalno dozvoljeno naprezanje dobije se iz slijedeće formule:

$$\sigma = \frac{M}{W_t} \quad 4.28.$$

te se iz dijagrama, koji se nalazi na slici 4.9., očita maksimalna dozvoljena brzina za određeno naprezanje.



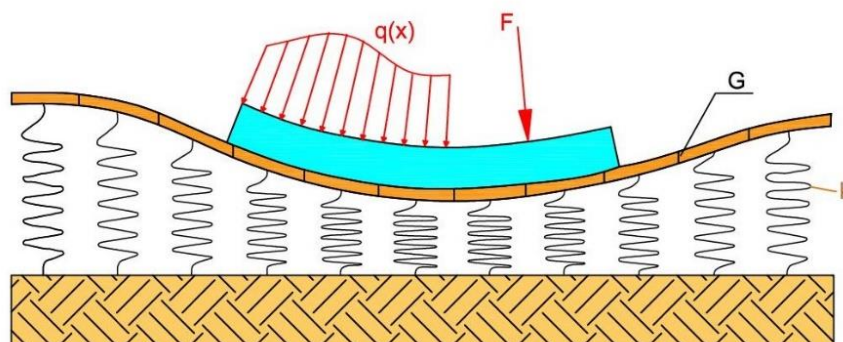
Slika 4.10. Odnos dopuštenog naprezanja i brzine po Zimmermann-u



Slika 4.11. Johann Wilhelm Schwedler, (1823-1894), Njemački inženjer građevinarstva, autor Scwedlerove teorije koja definira odnos posmične sile i momenta savijanja; Izvor: [https://en.wikipedia.org/wiki/Johann\\_Wilhelm\\_Schwedler](https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Wilhelm_Schwedler)

### 4.3 Dvoparametarski model tla

Dvoparametarskim modelom tla pokušavaju se eliminirati nedostaci koji se javljaju kod jednoparametarskog modela tla. Dvoparametarski model tla pokušava povezati susjedne opruge jednoparametarskog modela pomoću različitih vrsta međusobne veze, poput fleksibilnih elemenata, npr. zategnute elastične membrane, ploče sa fleksibilnom krutošću itd..



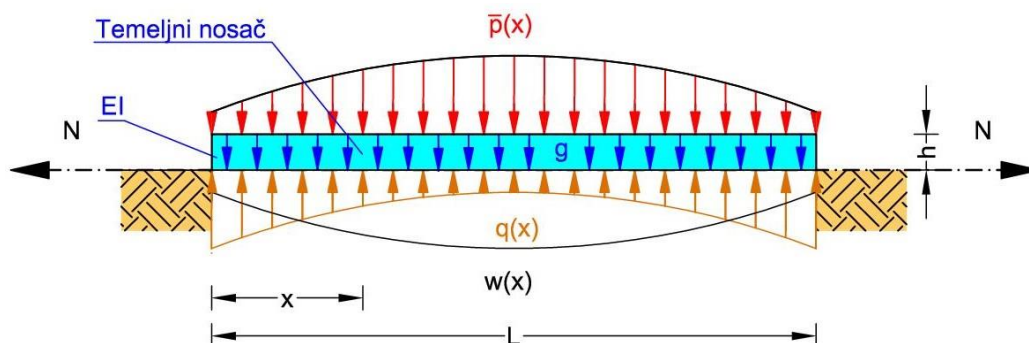
Slika 4.12. Elastični temeljni nosač na dvoparametarskom tlu

Model temeljnog tla kojeg je predložio Mikhail Filonenko-Borodich (1940), postiže kontinuitet između pojedinih opruga u Winklerovom modelu spajajući ih tankom elastičnom membranom pod stalnom napetošću.

Prema ovom modelu, naprezanje u tlu ispod temeljnog nosača, glasi:

$$q(x) = kw(x) - N \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad 4.29.$$

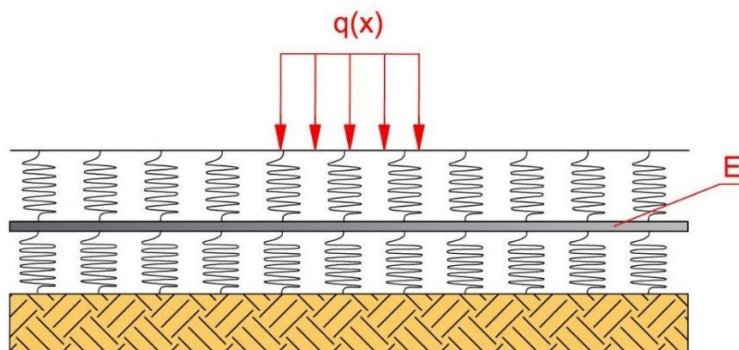
U ovoj jednadžbi poznati su svi pojmovi osim  $k$  i  $N$ .



Slika 4.13. Shematski prikaz dvoparametarskog modela tla



Hetenyi (1946. i 1950.) je stvorio interakciju među oprugama u Winklerovom modelu, umetanjem fiktivne ploče sa krutošću na savijanje  $EI$ .



Slika 4.14. Dvoparametarski model tla, Hetenyi

Prema ovom modelu, modul reakcije tla je dan sa:

$$q(x) = kw(x) - D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} \quad 4.30.$$

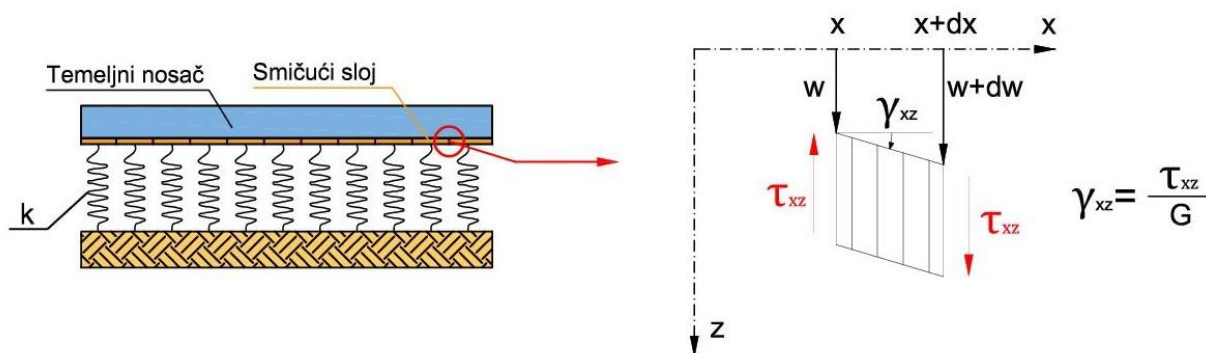
$$D = \frac{EI}{1 - \nu^2} \quad 4.31.$$

U ovoj jednadžbi poznati su svi pojmovi osim  $k$  i  $D$ .

- Pasternakov model -  $G$  parametar predstavlja modul smicanja zamišljenog sloja koji povezuje vertikalne opružne elemente;

$$q(x) = kw(x) - Gw''(x) \quad 4.32.$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 4.33.$$



Slika 4.15. Model podloge sa oprugama i smičućim slojem – Pasternak model tla

Treba napomenuti da u pomenutim modelima deformabilne podloge, parametri  $k$ ,  $N$ ,  $D$  i  $G$  nisu karakteristike tla koje se mogu odrediti ispitivanjem, već predstavljaju fiktivne veličine koje se mogu odrediti indirektno.

U ovom radu, razmatrati ćemo samo model tla, koji je predložio Filonenko-Borodich (1940), a kojim se postiže kontinuitet između pojedinih opruga u Winklerovom modelu spajajući ih tankom elastičnom membranom pod stalnom napetošću.



Slika 4.16. Miklos Hetenyi (1906-1984)-poznati stručnjak u mehanici tla, 1946. godine objavio knjigu *Beams on Elastic Foundations*; Izvor: <https://me.stanford.edu/people/miklos-hetenyi>

## 5. ODREĐIVANJE PARAMETARA TLA

### 5.1 Određivanje koeficijenta reakcije podloge $k_s$

Koeficijent reakcije podloge „ $k_s$ “ je deformacijsko svojstvo tla kojim se opisuje ponašanje tla pod opterećenjem tako, kao da je zamijenjeno nizom elastičnih opruga. Koeficijent reakcije podloge je deformacijsko svojstvo koje odražava ponašanje tla pri kratkotrajnom koncentriranom opterećenju.

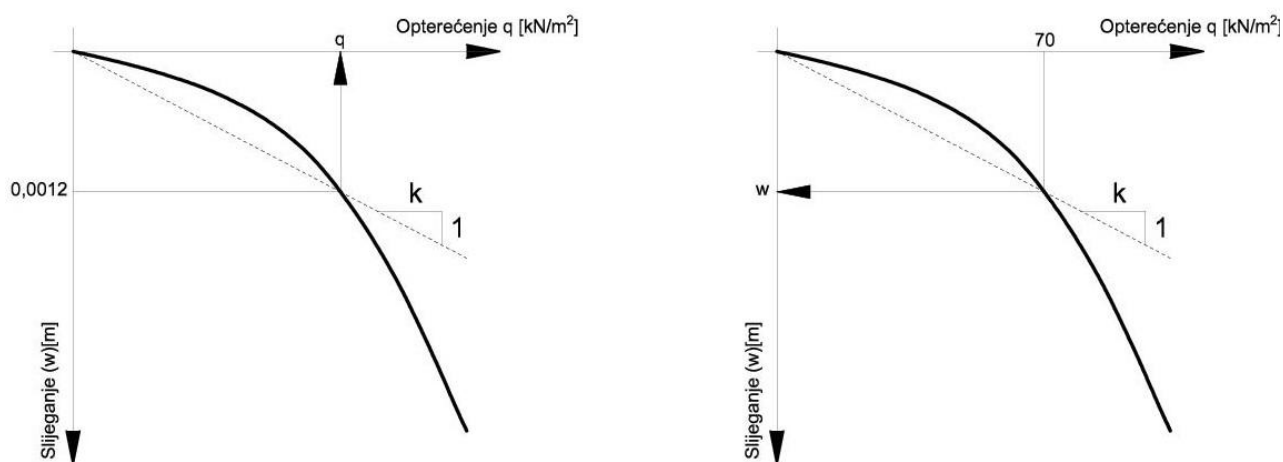
Ovo svojstvo nema nikakve veze s modulom stišljivosti,  $E_s$ , koji predstavlja deformacijsko svojstvo pri trajnoj deformaciji u tlu, nastaloj dodatnim, stalnim opterećenjem na površini.

Modul reakcije podloge može se odrediti na sljedeće načine:

- pomoću kružne ploče
- proračunom slijeganja tla
- pomoću tablice karakterističnih vrijednosti i korelacija

Uobičajeni način dobivanja modula reakcije tla je nanošenjem opterećenja na tlo preko kružne ploče. [22]

Westergard je 1920. godine dao svoje rješenje za određivanje koeficijenta reakcije podloge. Ta veza nije linearna, a veličina koeficijenta ovisi o veličini opterećene površine. Westergardovo rješenje prikazano je na slici 5.1.:



Slika 5.1. Određivanje modula reakcije tla  $k_s$  po Westergardu

Vrijednost koeficijenta reakcije podloge dobije se iz sljedećih izraza:

$$k_s = \frac{70 \text{ [kN/m}^2\text{]}}{w \text{ [m]}} \quad 5.1.$$

ili

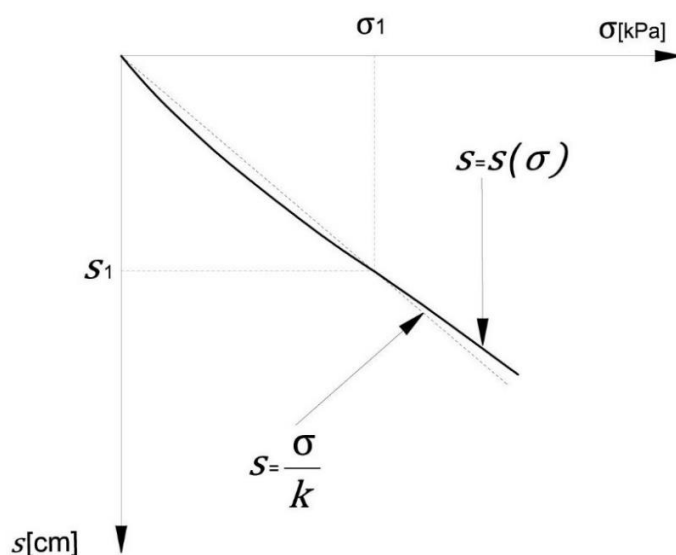
$$k_s = \frac{q \text{ [kN/m}^2\text{]}}{0,0012 \text{ [m]}} \quad 5.2.$$

gdje je:

- $k_s$  – modul reakcije podloge ( $\text{kN/m}^3$ )
- $q$  – naprezanje tla na kontaktu temelj-tlo ( $\text{kN/m}^2$ )
- $w$  – slijeganje krutog temelja (m)

Veliki doprinos istraživanju vrijednosti  $k_s$  dao je i Vesić (1961) koji je standardizirao pokus iz kojeg se dobije Winklerov koeficijent reakcije podloge uz pomoć probne ploče.

On je uveo koeficijent  $k_0$ , a koji se dobije za slijeganje ploče od 2,5 cm i uz pripadajuće naprezanje  $\sigma_1$ . Treba biti oprezan, jer u ovom slučaju, koeficijent reakcije tla  $k_0$ , dobiven ispitivanjem krutom probnom pločom 30×30 cm, i modul reakcije tla  $k_s$  koji se koristi za simulaciju krutosti opruge u proračunima, se razlikuju.



Slika 5.2. Postupak određivanja koeficijenta reakcije podloge prema Vesiću [11]

$$k_0 = \frac{\sigma_1}{s_1} \quad 5.3.$$

Prema Vesićevom standardiziranom pokusu, Terzaghi (1955) predlaže određivanje koeficijenta reakcije tla  $k_s$  pomoću Vesićevog jediničnog koeficijenta  $k_0$  i prema stvarnoj širini temelja B, prema jednadžbi:

$$k_s = k_0 \left( \frac{B + 0,30}{2B} \right)^2 \quad 5.4.$$

Nedostatak ove metode je u tome što se opterećuje samo sloj manje debljine, u odnosu na sloj koji je opterećen temeljnim nosačem ili temeljnom pločom.

Koeficijent reakcije podloge može također biti procijenjen na osnovu predviđenog slijeganja stvarnog temelja. U tom slučaju može se pretpostaviti da je temelj apsolutno krut i izložen pritisku koji odgovara ukupnom opterećenju na temelj. Slijeganje se predviđa standardnim metodama mehanike tla. U tom slučaju modul reakcije podloge ( $k_s$ ) se računa prema slijedećoj formuli [22]:

$$k_s = \frac{q}{w} \quad 5.5.$$

gdje je:

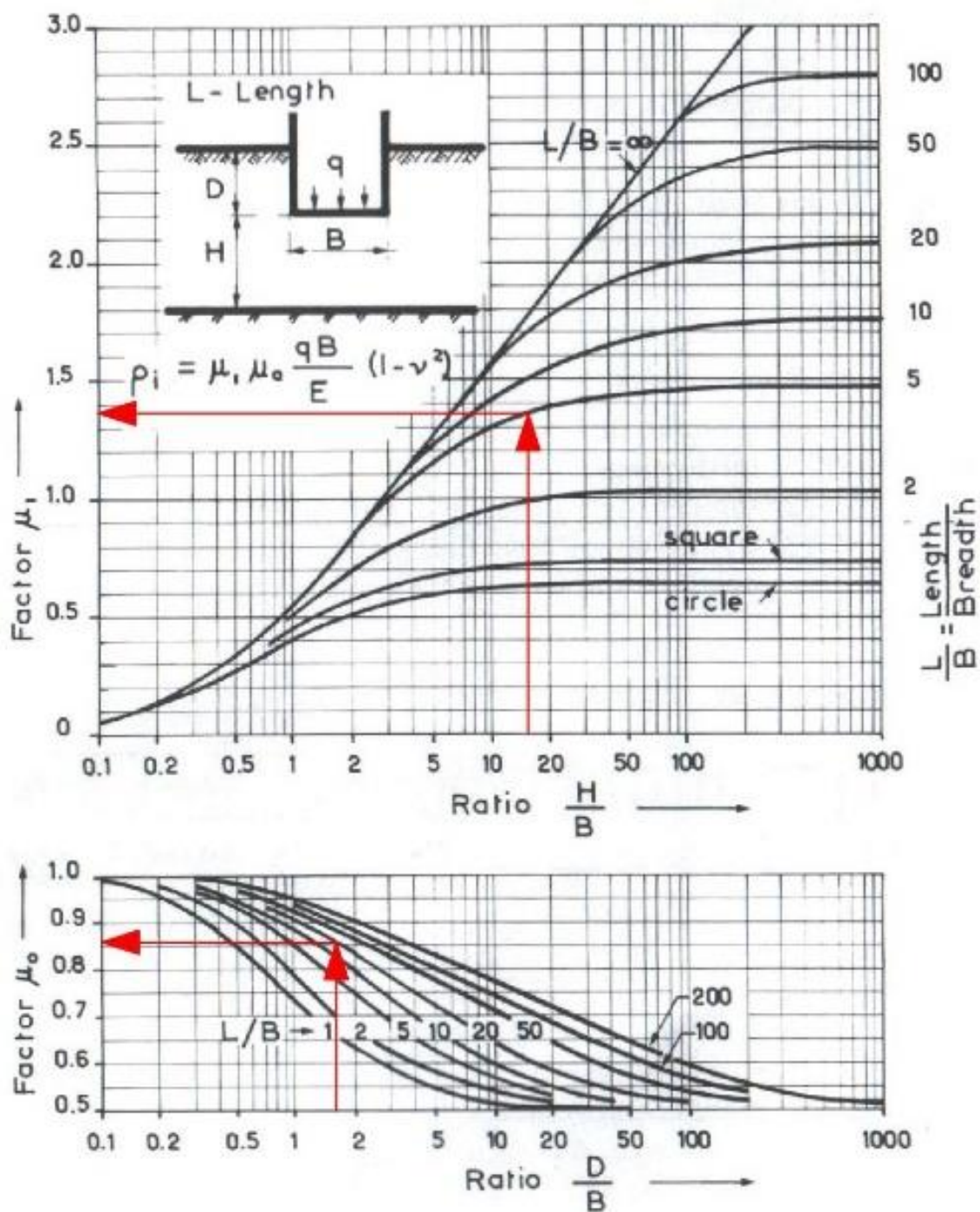
- $k_s$  – modul reakcije podloge ( $kN/m^3$ )
- $q$  – naprezanje na kontaktu temeljni nosač-tlo ( $kN/m^2$ )
- $w$  – slijeganje krutog temelja (m)

Također, modul reakcije podloge  $k_s$  može se izračunati na temelju faktora  $\mu_1$  i  $\mu_0$  koji se očitavaju iz Bjernumovih dijagrama te modula stišljivosti temeljnog tla  $E_s$ , prema slijedećoj formuli:

$$k_s = \frac{E_s}{(1 - \nu^2) \cdot B \cdot \mu_1 \cdot \mu_0} \quad 5.6.$$

Faktor  $\mu_1$  očitamo iz dijagrama na temelju omjera, veličine H (debljina stišljivog dijela tla) / širina temelja B te omjera duljine temelja L / širina temelja B.

Faktor  $\mu_0$  očitamo iz dijagrama na temelju omjera, dubina temeljenja D / širina temelja B i duljina temelja L / širina temelja B.



Slika 5.3. Bjerumovi dijagrami-princip očitavanja vrijednosti

Prema [11] modul reakcije tla  $k_s$  ovisi o opterećenju  $q$ , o obliku i veličini opterećene površine, pa nije konstanta tla. Terzaghi (1955) je proučavao vrijednosti modula reakcije raznih vrsta tla, kod različite zbijenosti. Dobivene vrijednosti, navedene u tablici 5.1., dobivene su analiziranjem većeg broja izvedenih probnih opterećenja pločom  $30 \times 30$  cm.

Tablica 5.1. Moduli reakcije tla  $k_1$  za ploču  $30 \times 30$  cm ( $10^4$  kN/m<sup>3</sup>)[11]

Pijesak	Rahli	Srednje zbijen	Jako zbijen
Suh ili vlažan	0,6 – 1,9	1,9 – 9,6	9,6 – 32
Djelomično potopljen	1,3	4,2	16,0
Potopljen	0,8	2,6	9,6
Konzistencija			
Glina	Kruta	Vrlo kruta	Čvrsta
$q_u$ (kN/m <sup>3</sup> )	100 – 200	200 – 400	400
Granične vrijednosti	1,6 – 3,2	3,2 – 6,4	6,4
Djelomično potopljeno	2,4	4,8	9,6

Za opterećene plohe drugih dimenzija treba module reducirati jer jedinično opterećenje jednakog intenziteta izaziva veće slijeganje djeluje li na većoj površini. Na osnovi eksperimentalne provjere i teorijskih istraživanja Terzaghi (1959) je predložio slijedeće formule:

- za koherentno tlo

$$k_s = \frac{0,3 \cdot k_1}{B} \quad 5.7.$$

- za nekoherentno tlo

$$k_s = k_1 \left( \frac{B + 0,3}{2 \cdot B} \right)^2 \quad 5.8.$$

- uključujući debljinu temeljenja (D)

$$k_s = k_1 \left( \frac{B + 0,3}{2 \cdot B} \right) \cdot \left( \frac{0,3 + 2D}{B} \right) \leq \left( \frac{B + 0,3}{2B} \right)^2 \quad 5.9.$$

Ako opterećena ploha nije kvadratična, nego četverokutna, sa  $L = m \times B$  izraz će prema Terzaghi-jevu prijedlogu biti:

$$k_s = k_1 \frac{1 + 0,5 \cdot B/L}{1,5} \quad 5.10.$$

Izraz za povezivanje modula reakcije tla sa modulom stišljivosti  $E_s$ , koji možemo utvrditi u laboratoriju ispitujući neporemećene uzorke, prema [11] predložio je Vesić(1961), a on glasi:

$$k_s = \frac{0,65}{B} \cdot \sqrt[12]{\frac{E_s \cdot B^4}{E \cdot I} \cdot \frac{E_s}{1 - \nu^2}} \quad 5.11.$$

gdje je:

- $E_s$  – modul stišljivost tla
- $E$  – modul elastičnosti temelja
- $I$  – moment tromosti temelja
- $\nu$  - Poissonov koeficijent za tlo
- $B$  – širina temelja
- $L$  – duljina temelja

Uz gore navedenog Vesića, izraze za određivanje modula reakcije tla, dali su i razni drugi autori, a nalaze se u tablici 5.2.

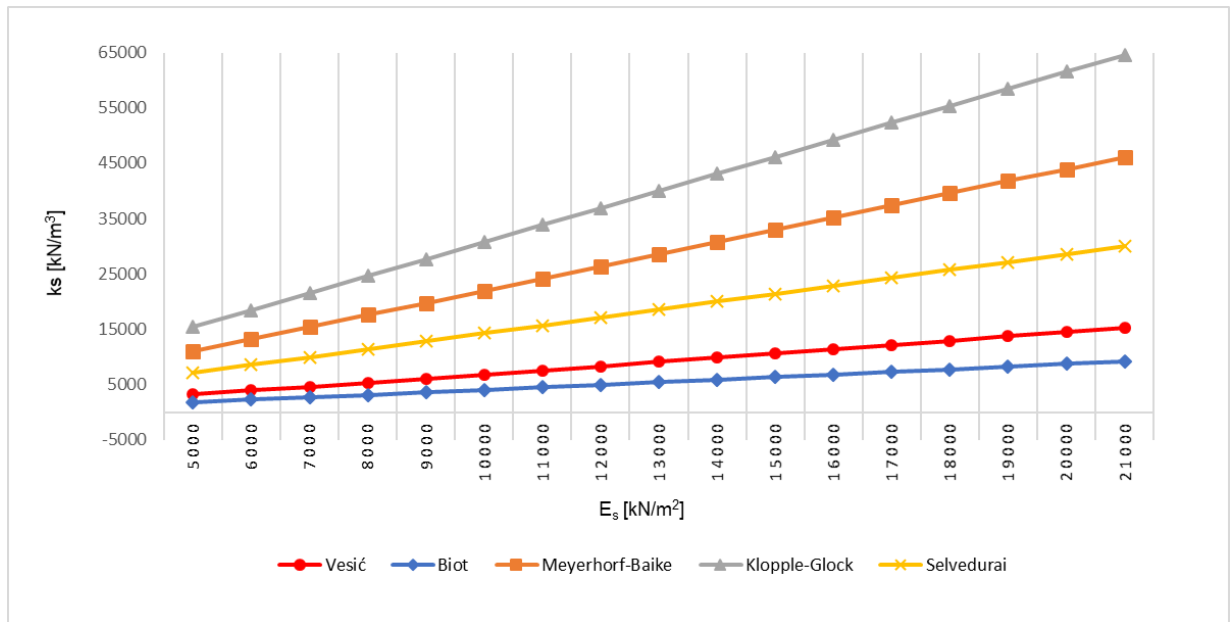
Tablica 5.2. Izrazi za izračun  $k_s$  raznih autora iz literature[20]

Autor	Izraz	
Biot	$k_s = \frac{0,95 \cdot E_s}{(1 - \nu_s^2)} \cdot \left[ \frac{B^4 \cdot E_s}{(1 - \nu_s^2) \cdot EI} \right]^{0,108}$	5.12.
Meyerhorf i Baike	$k_s = \frac{E_s}{B \cdot (1 - \nu_s^2)}$	5.13.
Klopple i Glock	$k_s = \frac{2E_s}{B \cdot (1 + \nu_s)}$	5.14.
Selvadurai	$k_s = \frac{0,65E_s}{B \cdot (1 - \nu_s^2)}$	5.15.

gdje je:

- $E_s$  – modul stišljivost tla
- $E$  – modul elastičnosti temelja
- $I$  – moment tromosti temelja
- $\nu$  – Poissonov koeficijent za tlo
- $B$  – širina temelja





Slika 5.4. Koeficijent reakcije tla prema različitim autorima za temelj širine  $B=1m$

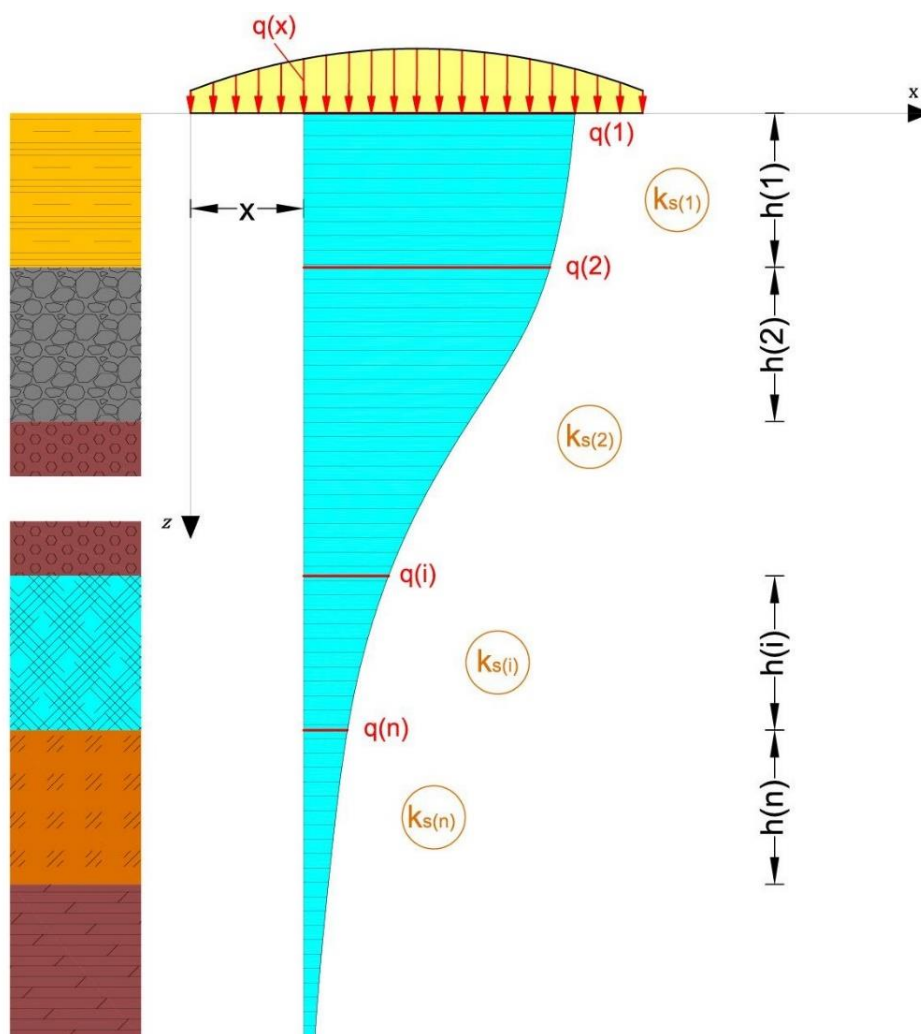
Kod višeslojnog, horizontalno uslojenog poluprostora, sa  $n$  horizontalno uslojenih slojeva  $h_1, h_2, h_i, h_n$ , različitih koeficijenta reakcije podloge, postupak određivanja  $k_s$  -a vrši se uz pretpostavku da će se pod opterećenjem, koje je rasprostrto na dijelu granične ravnine u poluprostoru, razviti naprezanje kao i kod sume više jednoslojnih tla. Slijeganje svakog pojedinog sloja biti će:

$$w_i = \frac{q_i}{k_i} \quad 5.16.$$

Prema navedenom, ukupno slijeganje biti će zbroj slijeganja svakog pojedinog sloja:

$$\sum_{i=1}^n w = \frac{q_1 \cdot h_1}{k_{s1}} + \frac{q_2 \cdot h_2}{k_{s2}} + \dots + \frac{q_i h_i}{k_{si}} + \dots + \frac{q_n h_n}{k_{sn}} \quad 5.17.$$

Prema tome, možemo koeficijente reakcije podloge  $k_s$  uslojenog tla, zamijeniti jednim  $k_s$  - om, kod kojeg će slijeganje biti jednako zbroju slijeganja pojedinih slojeva. Navedeno se i koristi u praksi jer kod izračuna slijeganja opterećujemo sve slojeve tla te iz naprezanja i pripadajuće slijeganja izračunavamo koeficijent reakcije podloge.



Slika 5.5. Raspodjela vertikalnih naprezanja po dubini u uslojenom poluprostoru

Kako se vrijednost  $k_s$ , u diferencijalnoj jednadžbi elastične grede (2.1) nalazi pod četvrtim korijenom, neznatno utječe na dobiveni rezultat te se u inženjerskoj praksi izračuni mogu vršiti i pomoću približnih vrijednosti iz tablice 5.1.

Koeficijent  $k_s$  u posljednje se vrijeme sve više koristi jer je sadržan u teoretskoj bazi numeričkih programa, a koji su baza rada računala. Analize bazirane na Winklerovom modelu, uz upotrebu koeficijenta reakcije podloge  $k_s$ , imaju mnogo nedostataka ali ipak u mnogim slučajevima daju sasvim prihvatljive rezultate.

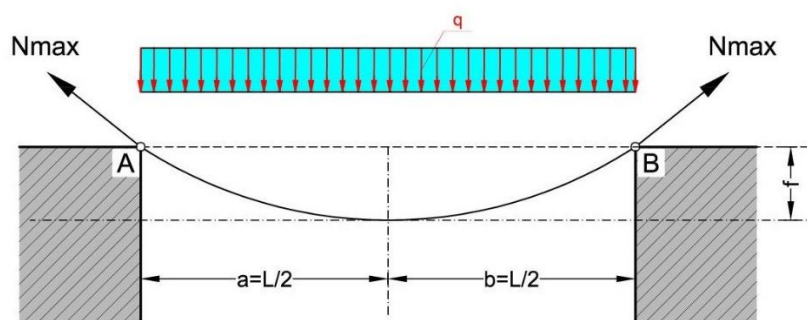
## 5.2 Određivanje parametra $N$

U literaturi se navodi da parametar  $N$  ovisi o debljini sloja ispod nosača i svojstvima tla.

$$N = \frac{E_s \cdot H}{6 \cdot (1 + \nu)} \quad 5.18.$$

Odabir tog parametra može se ispostaviti kao problem, jer se može javiti dosta nedorečenosti, posebno ako nam je nepoznat sloj tla koji se nalazi ispod nosača i njegove karakteristike. Postoji više načina odabira parametara  $N$  koji se mogu naći u literaturi (kao npr. iz krivulje slijeganja jednoliko opterećenog nosača).

Jedna od zamisli je, da je parametar  $N$  sila u membrani ili lančanici nosača ovješnog (oslonjenog) na dva oslonca.



Slika 5.6. Lančanica

Ako su oba oslonaca, točke ( $A$  i  $B$ ), učvršćenja lančanice na istoj razini, zbog simetrije, najniža se točka užeta nalazi u sredini raspona  $l$ , tj.  $a=b=l/2$ , a  $f_1=f_2=f$ . Provjes užeta  $f$  dobivamo prema slijedećem izrazu, koji nalazimo u literaturi [6]:

$$f = \frac{ql^2}{8H} \quad 5.19.$$

gdje je:

- $f$  – provjes užeta
- $H$  – napetost užeta, tj. sila u lančanici
- $l$  – udaljenost točaka učvršćenja

Sila u lančanici povećava se od najniže točke lančanice pa prema točkama učvršćenja ( $A$  i  $B$  – slika 5.6.) u kojima postiže najveću vrijednost  $N_{max}$  [6]:

$$N_{max} = \sqrt{\left(\frac{ql^2}{8f}\right)^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2} = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + 16 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2} \quad 5.20.$$

Ako provjes užeta, u lančanici poistovjetimo sa progibom proste grede koja se izračunava prema formuli:

$$f = \frac{5ql^4}{384EI} \quad 5.21.$$

te ako u formulu lančanice 5.20., umjesto provjesa užeta ( $f$ ), uvrstimo formulu 5.21 za progib proste grede, dobijemo izraz za izračun sile zatezanja u membrani ( $N$ ) na kontaktu temeljnog tla i temeljnog nosača, a koja glasi:

$$N = \frac{384EI}{40l^2} \sqrt{1 + 16 \cdot \left(\frac{5ql^3}{384EI}\right)^2} \quad 5.22.$$

gdje je:

- $l$  – raspon nosača
- $q$  – opterećenje nosača
- $EI$  – krutost temeljnog nosača

Uvođenjem membranskih sila u analizu ponašanja elastičnog nosača na tlu uzeto je u obzir da je tlo kontinuirani medij kod kojeg deformacija jedne točke izaziva i određenu deformaciju u drugoj točki. Ovaj model naime pretpostavlja da se tlo pod opterećenjem ponaša kao stanovita kombinacija međudjelovanja niza opruga i membrane.



Slika 5.7. Lančanica-teorijski oblik lanca koji je obješen za svoja dva kraja na istoj visini, koji je u ravnoteži i na kojeg djeluje uniformna gravitacijska sila (težina).; Izvor: [httpsen.wikipedia.org/wiki/Catenary#mediaFile-Kette\\_Kettenkurve\\_Catenary\\_2008\\_PD.JPG](httpsen.wikipedia.org/wiki/Catenary#mediaFile-Kette_Kettenkurve_Catenary_2008_PD.JPG)

## 6. NUMERIČKE METODE PRORAČUNA

### 6.1 Metoda konačnih elemenata MKE

Metoda konačnih elemenata (MKE) najprimjenjenija je i najraširenija numerička metoda, koja se koristi za približno rješavanje složenih inženjerskih zadataka. Osnovni koncept ove metode je da se realni model kontinuuma, s beskonačno stupnjeva slobode, podijeli na više manjih dijelova koji imaju određeni broj stupnjeva slobode [19]. Tako dobivamo konačan broj elemenata povezanih u čvorove, a taj postupak određivanja konačnih elemenata naziva se diskretizacija. Unutar jednog konačnog elementa postave se odnosi između pomaka čvorova i pomaka u bilo kojoj točki unutar elementa, s time da budu zadovoljeni uvjeti ravnoteže u čvorovima uz zadovoljavanje kontinuiteta te rubnih uvjeta na konturi. Ova zavisnost određuje se izborom interpolacijskih funkcija (najčešće polinomi). Rješavanjem pomaka u čvorovima iz poznatih relacija teorije elastičnosti odrede se naprezanja. Određuje se matrica krutosti pojedinog elementa sa pomacima u čvorovima kao nepoznicama. Globalna matrica krutosti u koju su ušli doprinosi svih krutosti elemenata pomnožena sa vektorom nepoznatih pomaka daje nam vektor napadnih sila u smjerovima pomaka.

$$[K] \cdot \{u\} = \{P\} \quad 6.1.$$

gdje je:

- $[K]$  – matrica krutosti
- $\{u\}$  – vektor nepoznatih pomaka
- $\{P\}$  – vektor poznatih sila u smjeru pomaka

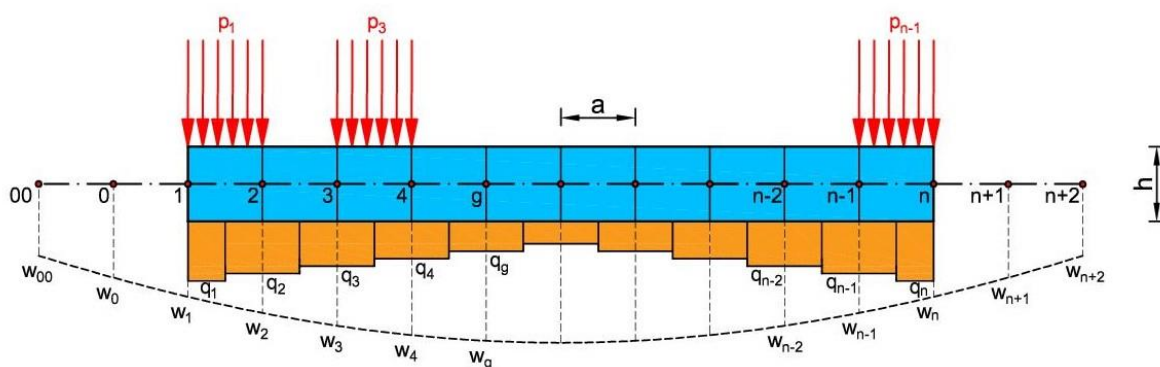
Točna rješenja parcijalnih jednadžbi, u rješavanju ovih problema, dobivaju se samo u čvorovima, a kvaliteta i točnost rješenja unutar elemenata ovisi o složenosti konačnog elementa, tj. gušća mreža daje točnije podatke. MKE daje točne rezultate samo u konačnom broju čvorova, zbog čega se kaže da daje približna rješenja inženjerskih i znanstvenih zadataka. MKE koriste razni kompjuterski programi, i to: SAP2000, AutoDesk-Robot, TOWER, GEO5,....

Bez obzira koji se računalni program koristi pri modeliranju, nužno je rezultate uzeti sa oprezom i napraviti kontrolu istih, kako bi smo bili sigurni u ispravnost istih. Inženjer statičar, nužno mora provjeriti kvalitetu ulaznih podataka kao i dobivenih rezultata proračunom.

U ovom radu koristiti ćemo program TOWER za izračun temeljnog nosača na jednoparametarskom tlu metodom konačnih elemenata, te rezultate usporediti sa analitičkim proračunima u programu GEO5 „Greda“ – Demo i MS Excel.

## 6.2 Metoda konačnih razlika MKR

Metoda konačnih razlika zamjenjuje glavnu diferencijalnu jednadžbu sa algebarskom jednadžbom koja povezuje pomak promatrane točke u odnosu na susjedne točke. Ona se postavlja u svaku točku mreže na površini nosača i na taj način nastaje sustav algebarskih jednadžbi koji se zasniva na pravokutnom koordinatnom sustavu, opterećenju te fizičkim i elastičnim konstantama opterećenog nosača. Ova, opterećenje-deformacija, jednadžba uspostavlja linearnu vezu između opterećenja u žarišnoj točki i nepoznatu veličinu deformacije nosača u toj točki i ostalim aktivnim točkama, te se rješavanjem ove jednadžbe dobivaju aproksimativne vrijednosti deformacije nosača u aktivnim točkama mreže. Pogušćivanjem mreže povećava se red matrice sustava, odnosno raste složenost algoritma čije bi rješavanje bilo gotovo nemoguće bez upotrebe računala.[22]



Slika 6.1. Temeljni nosač podijeljen na  $n$  elemenata s promatranom točkom na rubu elementa

Jednadžba diferencijalne grede za točku  $i$  glasi:

$$\frac{EI}{a^4}(w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}) + q_i = p_i + g \quad 6.2.$$

Diferencijalna jednadžba u matricnom obliku glasi:

$$[D][U] + [\lambda]\{q\} = \{f\} \quad 6.3.$$

gdje je:

- $[D]$  – matrica diferencijalnog operatora
- $[\lambda]$  – dijagonalna matrica
- $[U]$  – matrica utjecajnih slijeganja
- $\{q\}$  – nepoznati vektor reakcije tla
- $\{f\}$  – vektor vanjskog djelovanja

U matricnoj jednadžbi 6.2. nepoznati su samo reakcijski pritisci tla na nosač.

Ako u jednadžbu 6.2. uvedemo slijedeću supstituciju  $[D][U]+[\lambda]=A$  dobijemo slijedeće:

$$[A]\{q\} = \{f\} \Rightarrow \{q\} = [A]^{-1}\{f\} \quad 6.4.$$

Nakon što riješimo sustav jednadžbi, izračunaju se slijeganja čvornih točaka pomoću jednadžbe:

$$w = [U]\{q\} \quad 6.5.$$

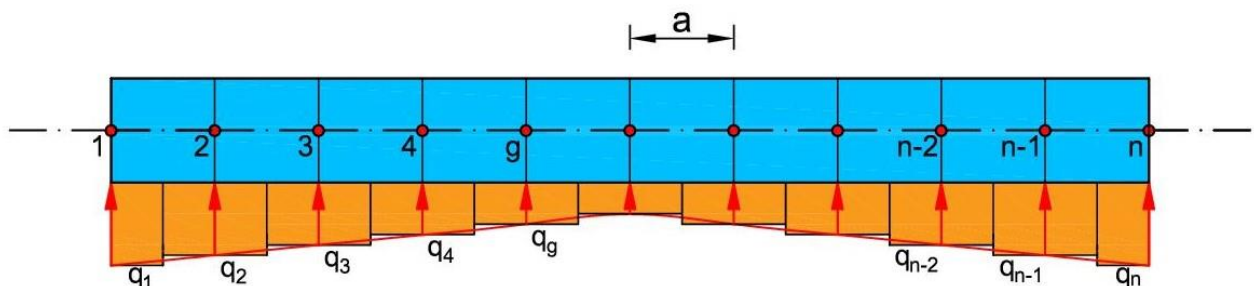
te moment savijanja pomoću jednadžbe:

$$M_i = -\frac{EI}{a^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \quad 6.6.$$

i poprečna sila:

$$Q_i = -\frac{EI}{2a^3}(w_{i-2} + 2w_{i-1} - 2w_{i+1} + w_{i+2}) \quad 6.7.$$

Time su riješeni sva slijeganja, reakcije tla, momenti savijanja i poprečne sile u svim diskretnim točkama, tj čvorovima.



Slika 6.2. Reakcije tla po dužini nosača

Kontrola točnosti provodi se na način da označena površina na nosaču i zbroj sila koje djeluju na nosač trebaju biti jednaki.

$$\int_0^L q_i dx = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot a + \frac{q_2 + q_3}{2} \cdot a + \dots + \frac{q_{n-1} + q_n}{2} \cdot a \cong P_1 + P_2 \quad 6.8.$$

## 7. PRIMJERI PRORAČUNA SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA

### 7.1 Temeljni nosač na jednoparametarskom modelu tla

Polazi se od diferencijalne jednadžbe ravnog elastičnog nosača poprečno opterećenog na njegovu os koja povezuje nepoznatu funkciju pomaka nosača i poznato vanjsko opterećenje nosača:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = \bar{p}(x) \quad 7.1.$$

$$\bar{p}(x) = p(x) + g - q(x) \quad 7.2.$$

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + q(x) = p(x) + g \quad 7.3.$$

Ova jednadžba povezuje krutost nosača i djelujuće opterećenje s njegovim savijanjem, pošto se u njoj javljaju dvije nepoznanice  $q(x)$  i  $w(x)$  ista je nerješiva. Stoga je potrebno uvesti drugu jednadžbu da bi smo povezali nepoznate funkcije.

Ovdje uvodimo osnovnu pretpostavku Winkler-ovog modela, a koja nam je sljedeća dodatna veza između pomaka  $w$  i reaktivnih pritisaka tla  $q$ :

$$q(x) = k_s \cdot w(x) \quad 7.4.$$

Kod temeljnih nosača, gdje opterećenje djeluje samo na krajevima nosača u obliku koncentriranih sila, a zanemarimo li vlastitu težinu temeljnog nosača dobijemo slijedeće:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + k_s \cdot w(x) = 0 \quad 7.5.$$

Opće rješenje takve homogene diferencijalne jednadžbe izraženo preko deformacije temeljnog nosača, tj. preko slijeganja  $w$  glasi:

$$w(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x \quad 7.6.$$

Integracijske konstante  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$  određuju se na osnovi rubnih uvjeta, dok  $\alpha$  predstavlja bezdimenzionalni parametar krutosti sistema temeljni nosač-podloga (tlo):



$$\alpha = \left( \sqrt{\frac{k_B}{4EI}} \right)^{0,5} \quad 7.7.$$

gdje je:

- $k_B = k_s \cdot b$
- $E$  – modul elastičnosti temelja
- $I$  – moment tromosti poprečnog presjeka temelja

Kod rubnih uvjeta, u analitičkim postupcima proračuna nosača, silu na kraju nosača uzimamo kao poprečnu silu. U slučaju da na nosač djeluje više sila, on se rastavlja na dijelove tako da sile djeluju na krajevima, a dijelovi se zbroje. U numeričkim postupcima ne postoji to ograničenje pa se vanjska sila uzima kao vanjsko opterećenje na stvarnom mjestu djelovanja.

Momenti savijanja  $M$  izračuna se pomoću izraza:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad 7.8.$$

Poprečne sile  $Q$  izračunaju se pomoću izraza:

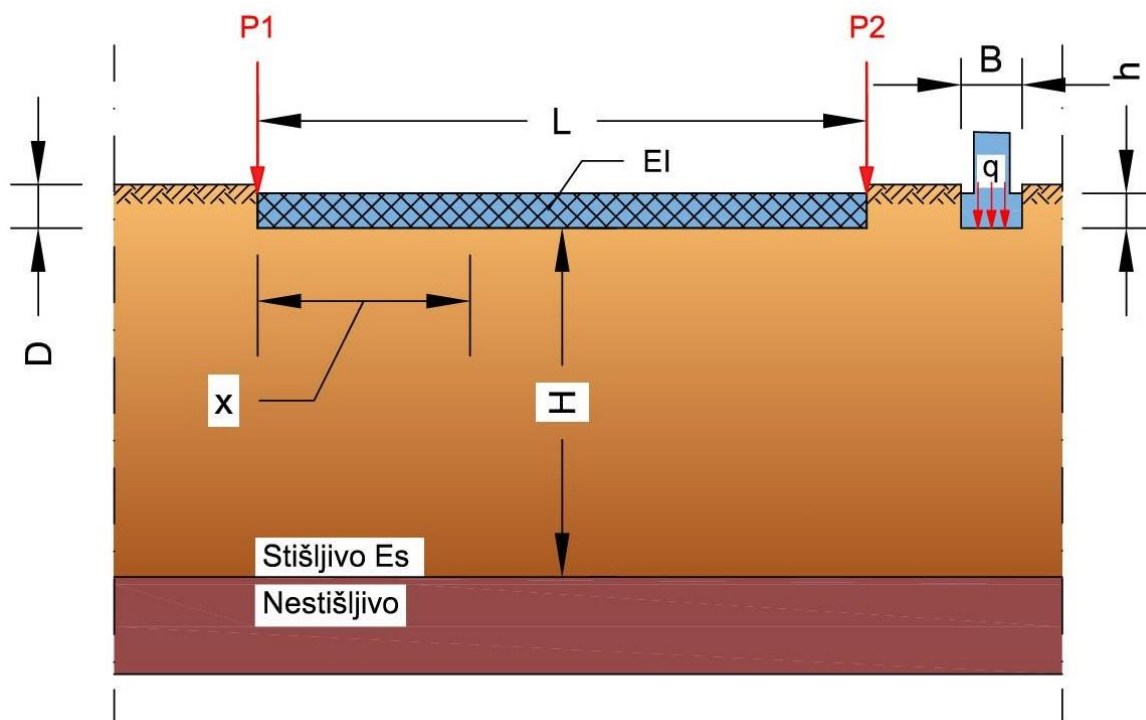
$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \quad 7.9.$$

Reakcija tla na kontaktu temeljnog nosača i tla izračuna se pomoću jednadžbe 7.4.

Za određivanje reznih sila u nosaču i zadovoljenja rubnih uvjeta, preko određivanja vrijednosti integracionih konstanti  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$ , dolazimo do pripadnih derivacija funkcije općeg rješenja diferencijalne jednadžbe 7.6.

$$w(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x \quad 7.10.$$

Primjer proračuna provest ćemo za nosač: dužine  $L=14$  m, širine  $B=1,0$  m, visine  $h=0,8$  m, opterećen je na rubu sa silama  $P_1=1300$  kN, i  $P_2=800$  kN, koji leži na tlu modula elastičnosti  $E_s=20000$  kN/m<sup>2</sup>. Debljina stišljivog sloja ispod temeljnog nosača  $H=10$ m.



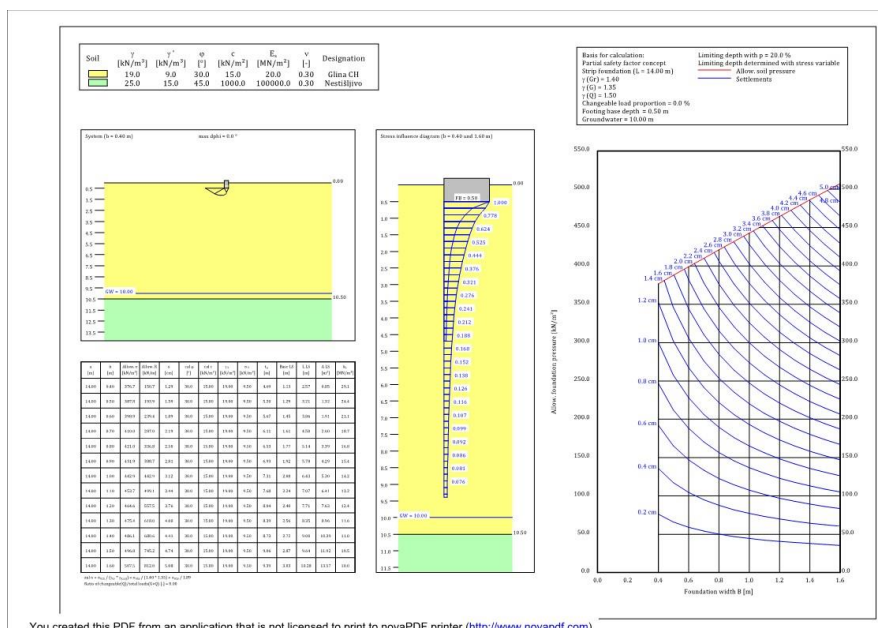
Slika 7.1. Shema djelujućeg opterećenja

$$I = \frac{B \cdot h^3}{12} = \frac{1,0 \cdot 0,8^3}{12} = 0,04267 \text{ m}^4$$

$$EI = E_{bet} \cdot I = 1280000 \text{ kNm}^2$$

$$q = \frac{P_1 + P_2}{B \cdot L} = 150 \text{ kN/m}^2$$

Početno slijeganje očitati smo iz računalnog programa GGU, te ono u našem slučaju iznosi 0,91cm, za zadano naprezanje  $q=150$  kN/m<sup>2</sup>.



Slika 7.2. Grafikon iz računalnog programa GGU

$$w(GGU) = 0,00910 \text{ m}$$

$$k_s = \frac{q}{w} = 16483,52 \text{ kN/m}^3$$

$$k_B = k_s \cdot B = 16483,52 \text{ kN/m}^2$$

Parametar krutosti sistema temeljni nosač-tlo:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_B}{4EI}} = 0,23820177 \text{ rad}$$

Ulazni podaci za proračun su slijedeći, a unosimo ih u računalni program Excel u kojem smo kreirali sve potrebne formule kako bi došli do konačnog rješenja:

Tablica 7.1. Tablica ulaznih podataka za proračun jednodimenzionalnog tla

$E_{bet} =$	30000	MN/m <sup>2</sup>			
$E_s =$	20000	kN/m <sup>2</sup>			
$I =$	0,04267	m <sup>4</sup>			
$P_1 =$	1300	kN	$P_2 =$	800	kN
$EI =$	1280000	kNm <sup>2</sup>	$k_B =$	16483,52	kN/m <sup>2</sup>
$B =$	1,0	m	$e =$	2,71828183	
$h =$	0,8	m	$D =$	0,5	m
$L =$	14,00	m	$H =$	10,0	m
$\nu =$	0,3		$w(GGU) =$	0,00910	m

Derivacije jednadžbe slijeganja za određivanje integracijskih konstanti:

$$w(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x$$

$$w'(x) = C_1 \alpha e^{\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) + C_2 \alpha e^{\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) - C_3 \alpha e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + C_4 \alpha e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x)$$

$$w''(x) = -C_1 2\alpha^2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_2 2\alpha^2 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_3 2\alpha^2 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + C_4 2\alpha^2 e^{-\alpha x} \cos \alpha x$$

$$w'''(x) = -C_1 2\alpha^3 e^{\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + C_2 2\alpha^3 e^{\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) + C_3 2\alpha^3 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) + C_4 2\alpha^3 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

Rubni uvjeti:

$$\underline{x = 0}$$

$$M(x) = M(0) = 0$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \Rightarrow w''(x) = 0$$

$$w''(0) = 2\alpha^2 [e^{\alpha 0} (C_2 \cos \alpha 0 - C_1 \sin \alpha 0) - e^{-\alpha 0} (C_4 \cos \alpha 0 - C_3 \sin \alpha 0)] = 0$$

$$w''(0) = 2\alpha^2 (C_2 - C_4) \Rightarrow C_2 - C_4 = 0$$

$$Q(x) = Q(0) = -Q_1 = -1300 \text{ kN}$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -Q_1 \Rightarrow w'''(x) = \frac{Q_1}{EI} = \frac{1300}{1,28 \cdot 10^6}$$

$$w'''(x) = 2\alpha^3 \{ e^{\alpha x} [\cos \alpha x (C_2 - C_1) - \sin \alpha x (C_2 + C_1)] + 2\alpha^3 \{ e^{-\alpha x} [\cos \alpha x (C_3 + C_4) - \sin \alpha x (C_3 - C_4)] \} = \frac{Q_1}{EI}$$

$$w'''(0) = 2\alpha^3 \{ e^{\alpha 0} [\cos \alpha 0 (C_2 - C_1) - \sin \alpha 0 (C_2 + C_1)] + 2\alpha^3 \{ e^{-\alpha 0} [\cos \alpha 0 (C_3 + C_4) - \sin \alpha 0 (C_3 - C_4)] \}$$

$$w''' = 2\alpha^3 (-C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \Rightarrow -C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0,03757$$

$$\underline{x = L = 14m}$$

$$M(x) = M(L) = 0$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \Rightarrow w''(L) = 0$$

$$w''(x) = 2\alpha^2 [e^{\alpha x} (C_2 \cos \alpha x - C_1 \sin \alpha x) - e^{-\alpha x} (C_4 \cos \alpha x - C_3 \sin \alpha x)] = 0$$

$$w''(L) = [e^{\alpha L} (C_2 \cos \alpha L - C_1 \sin \alpha L) - e^{-\alpha L} (C_4 \cos \alpha L - C_3 \sin \alpha L)] = 0$$

$$w''(L) = 5,3910C_1 - 27,5510C_2 - 0,0068C_3 + 0,0350C_4 = 0$$

$$Q(x) = Q(L) = Q_2 = 800kN$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_2 \Rightarrow w'''(x) = \frac{-Q_2}{EI} = -\frac{800}{1,28 \cdot 10^6}$$

$$w'''(x) = 2\alpha^3 \{e^{\alpha x} [\cos \alpha x (C_2 - C_1) - \sin \alpha x (C_2 + C_1)]\} + \\ + 2\alpha^3 \{e^{-\alpha x} [\cos \alpha x (C_3 + C_4) - \sin \alpha x (C_3 - C_4)]\} = -\frac{Q_2}{EI}$$

$$w'''(L) = 2\alpha^3 \{e^{\alpha L} [\cos \alpha L (C_2 - C_1) - \sin \alpha L (C_2 + C_1)]\} + \\ + 2\alpha^3 \{e^{-\alpha L} [\cos \alpha L (C_3 + C_4) - \sin \alpha L (C_3 - C_4)]\}$$

$$w''' = 2\alpha^3 (32,9419C_1 - 22,1600C_2 - 0,0281C_3 - 0,0418C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32,9419C_1 - 22,1600C_2 - 0,0281C_3 - 0,0418C_4 = -0,02312$$

Konačni sustav jednadžbi glasi:

$$\left| \begin{array}{cccc} -\sin \alpha 0 e^{\alpha 0} & \cos \alpha 0 e^{\alpha 0} & \sin \alpha 0 e^{-\alpha 0} & -\cos \alpha 0 e^{-\alpha 0} \\ (-\cos \alpha 0 - \sin \alpha \alpha 0) e^{\alpha 0} & (\cos \alpha 0 - \sin \alpha \alpha 0) e^{\alpha 0} & (\cos \alpha 0 - \sin \alpha \alpha 0) e^{-\alpha 0} & (\cos \alpha 0 + \sin \alpha \alpha 0) e^{-\alpha 0} \\ -\sin \alpha L e^{\alpha L} & \cos \alpha L e^{\alpha L} & \sin \alpha L e^{-\alpha L} & -\cos \alpha L e^{-\alpha L} \\ (-\cos \alpha L - \sin \alpha \alpha L) e^{\alpha L} & (\cos \alpha L - \sin \alpha \alpha L) e^{\alpha L} & (\cos \alpha L - \sin \alpha \alpha L) e^{-\alpha L} & (\cos \alpha L + \sin \alpha \alpha L) e^{-\alpha L} \end{array} \right| = \begin{array}{l} M_1/2\alpha^2 EI \\ Q_1/2\alpha^3 EI \\ M_2/2\alpha^2 EI \\ Q_2/2\alpha^3 EI \end{array}$$

Numerički:

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 C_1 & 1 C_2 & 0 C_3 & -1 C_4 & = & 0 \\
 -1 C_1 & 1 C_2 & 1 C_3 & 1 C_4 & = & 0,03757 \\
 5,3910 C_1 & -27,5510 C_2 & -0,0068 C_3 & 0,0350 C_4 & = & 0 \\
 32,9419 C_1 & -22,1600 C_2 & -0,0281 C_3 & -0,04180 C_4 & = & -0,02312
 \end{array}$$

Sustav ima sljedeća rješenja (rješenje pomoću determinanti i La Place-ovim razvojem sustava determinanti):

$$D = \begin{vmatrix} 0,00000 & 1,00000 & 0,00000 & -1,00000 \\ -1,00000 & 1,00000 & 1,00000 & 1,00000 \\ 5,39100 & -27,55098 & -0,00684 & 0,03496 \\ 32,94198 & -22,15998 & -0,02812 & -0,04180 \end{vmatrix} \quad D = 785,9730$$

$$A = \begin{vmatrix} 0,00000 & 1,00000 & 0,00000 & -1,00000 \\ 0,03757 & 1,00000 & 1,00000 & 1,00000 \\ 0,00000 & -27,55098 & -0,00684 & 0,03496 \\ -0,02312 & -22,15998 & -0,02812 & -0,04180 \end{vmatrix} \quad A = -0,61253$$

$$B = \begin{vmatrix} 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & -1,00000 \\ -1,00000 & 0,03757 & 1,00000 & 1,00000 \\ 5,39100 & 0,00000 & -0,00684 & 0,03496 \\ 32,94198 & -0,02312 & -0,02812 & -0,04180 \end{vmatrix} \quad B = -0,12726$$

$$E = \begin{vmatrix} 0,00000 & 1,00000 & 0,00000 & -1,00000 \\ -1,00000 & 1,00000 & 0,03757 & 1,00000 \\ 5,39100 & -27,55098 & 0,00000 & 0,03496 \\ 32,94198 & -22,15998 & -0,02312 & -0,04180 \end{vmatrix} \quad E = 29,172851$$

$$F = \begin{vmatrix} 0,00000 & 1,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ -1,00000 & 1,00000 & 1,00000 & 0,03757 \\ 5,39100 & -27,55098 & -0,00684 & 0,00000 \\ 32,94198 & -22,15998 & -0,02812 & -0,02312 \end{vmatrix} \quad F = -0,12726$$

Za izračun konstanti vrijedi:

$$C_1 = \frac{A}{D} = \frac{-0,61253}{785,9730} = -0,00078$$

$$C_2 = \frac{B}{D} = \frac{-0,12726}{785,9730} = -0,00016$$

$$C_3 = \frac{E}{D} = \frac{29,17285}{785,9730} = 0,03712$$

$$C_4 = \frac{F}{D} = \frac{-0,12726}{785,9730} = -0,00016$$

Sada kad smo odredili integracijske konstante možemo deriviranjem jednadžbe 7.10. te pomoću jednadžbi 7.4., 7.8. i 7.9. izračunati nepoznate elemente potrebne za dimenzioniranje nosača.

Konačni rezultati prema navedenim jednadžbama dani su u tablici:

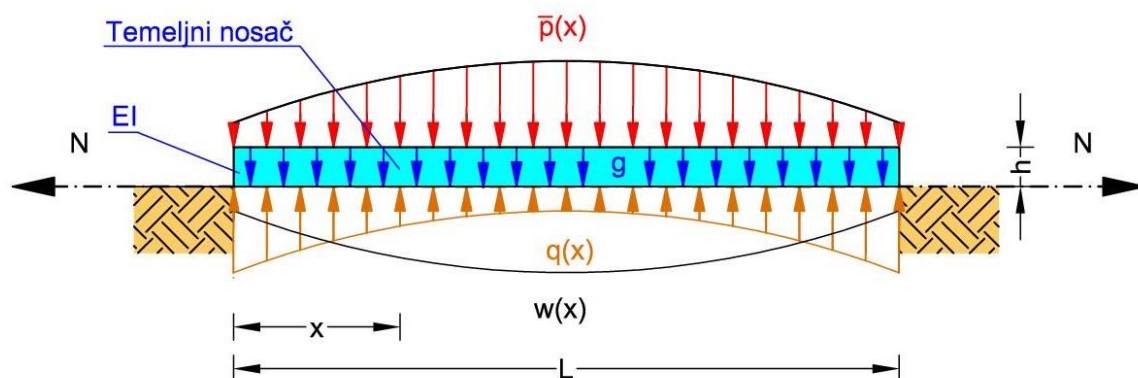
Tablica 7.2. Tablica rezultata temeljnog nosača na jednoparametarskom modelu tla

x (m)	w (x)	M(x)	Q (x)	q (x)
0	0,03634	0,0000	-1300,0000	598,97
0,5	0,03181	-578,2509	-1019,2316	524,27
1	0,02738	-1025,3969	-775,4273	451,39
1,5	0,02316	-1359,6273	-567,2965	381,78
2	0,01920	-1598,3215	-392,9194	316,53
2,5	0,01555	-1757,7773	-249,9154	256,39
3	0,01225	-1853,0167	-135,5833	201,91
3,5	0,00930	-1897,6555	-47,0170	153,37
4	0,00673	-1903,8250	18,8024	110,93
4,5	0,00453	-1882,1342	64,9345	74,61
5	0,00269	-1841,6636	94,4264	44,35
5,5	0,00121	-1789,9813	110,2752	20,02
6	0,00009	-1733,1746	115,4040	1,44
6,5	-0,00070	-1675,8909	112,6483	-11,55
7	-0,00116	-1621,3826	104,7519	-19,15
7,5	-0,00131	-1571,5530	94,3687	-21,53
8	-0,00114	-1526,9997	84,0685	-18,84
8,5	-0,00068	-1487,0546	76,3453	-11,24
9	0,00007	-1449,8203	73,6248	1,15
9,5	0,00110	-1412,2017	78,2709	18,20
10	0,00241	-1369,9373	92,5871	39,81
10,5	0,00399	-1317,6293	118,8127	65,82
11	0,00583	-1248,7787	159,1106	96,06
11,5	0,00791	-1155,8283	215,5465	130,33
12	0,01021	-1030,2190	290,0558	168,30
12,5	0,01271	-862,4657	384,3979	209,58
13	0,01539	-642,2600	500,0962	253,62
13,5	0,01818	-358,6061	638,3617	299,71
14	0,02105	0,0000	800,0000	346,94

## 7.2 Temeljni nosač na dvoparametarskom modelu tla

Dvoparametarski model tla izveden je iz osnovnog Winklerovog modela. Ovaj model je definiran s dvije nezavisne elastične konstante i omogućava povezivanje Winklerovih opruga sa zategnutom elastičnom membranom, elastičnim slojevima koji omogućava pojavu posmičnih deformacija.

Kao što je navedeno u poglavlju 4.3., Filonenko-Borodich (1940.-1945.) predložio je model koji opruge povezuje (Winklerov model) s elastičnom membranom u kojoj postoji stalna sila zatezanja  $N$ .



Jednadžba reakcije podloge, tj. tla ima oblik:

$$q(x) = k_s \cdot w(x) - N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad 7.11.$$

gdje je:

- $N$  – sila zatezanja u membrani na kontaktu temeljnog tla i nosača
- $k_s$  – modul reakcije podloge tj. tla
- $w$  – slijeganje tla

Sredinom 20. stoljeća, godine 1949. Vlasov i 1966. Vlasov i Leontiev razvijaju dvoparametarski model. Diferencijalna jednadžba nosača opterećenog koncentriranim silama na rubu, za dvoparametarski model prema hipotezi Leontieva i Vlasova glasi:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} + k_s \cdot w = 0 \quad 7.12.$$

gdje je:

- $N$  – sila zatezanja u membrani na kontaktu temeljnog tla i nosača



- $k_s$  – modul reakcije podloge tj.tla
- $w$  – slijeganje tla

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe 7.12. glasi:

$$w = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + A_3 e^{m_3 x} + A_4 e^{m_4 x} \quad 7.13.$$

gdje su:

$$m_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{N}{2EI} \pm i \sqrt{\frac{k_s}{EI} - \left(\frac{N}{2EI}\right)^2}} \quad 7.14.$$

S obzirom na veličinu parametra  $N$  razlikujemo tri slučaja:

- $N = 2\sqrt{k_s EI}$  –  $m$  nije definiran
- $N > 2\sqrt{k_s EI}$  –  $m$  je kompleksni broj
- $N < 2\sqrt{k_s EI}$  –  $m$  je realni broj

Za slučaj  $N < 2\sqrt{k_s EI}$  rješenje diferencijalne jednadžbe glasi:

$$w = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{-\alpha x} \cos \beta x + C_3 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \beta x \quad 7.15.$$

- gdje su:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_s \cdot B}{4EI}} \quad 7.16.$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{N}{4EI}} \quad 7.17.$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{N}{4EI}} \quad 7.18.$$

Reakcija temeljnog tla  $q$  tada glasi:

$$q(x) = k_s \cdot w(x) - N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad 7.19.$$

Momenti savijanja  $M$  izračuna se pomoću izraza:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad 7.20$$

Poprečne sile  $Q$  izračunaju se pomoću izraza:

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \quad 7.21.$$

Za određivanje reznih sila u nosaču i zadovoljenja rubnih uvjeta, preko određivanja vrijednosti integracionih konstanti  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$ , dolazimo do pripadnih derivacija funkcije općeg rješenja diferencijalne jednadžbe 7.15.:

Druga derivacija slijeganja  $w$  glasi:

$$\begin{aligned} w(x)'' = & C_1[\alpha(ae^{\alpha x} \cos\beta x - \beta e^{\alpha x} \sin\beta x) - \beta(ae^{\alpha x} \sin\beta x + \beta e^{\alpha x} \cos\beta x)] + \\ & + C_2[-\alpha(-ae^{-\alpha x} \cos\beta x - \beta e^{-\alpha x} \sin\beta x) - \beta(-ae^{-\alpha x} \sin\beta x + \beta e^{-\alpha x} \cos\beta x)] + \\ & + C_3[\alpha(ax^{\alpha x} \sin\beta x + \beta e^{\alpha x} \cos\beta x) + \beta(ae^{\alpha x} \cos\beta x - \beta e^{\alpha x} \sin\beta x)] + \\ & + C_4[-\alpha(-ae^{-\alpha x} \sin\beta x + \beta e^{-\alpha x} \cos\beta x) + \beta(-ae^{-\alpha x} \cos\beta x - \beta e^{-\alpha x} \sin\beta x)] \end{aligned} \quad 7.22.$$

Sređivanjem gornje jednadžbe dobije se izraz:

$$\begin{aligned} w(x)'' = & C_1(\alpha^2 e^{\alpha x} \cos\beta x - \alpha\beta e^{\alpha x} \sin\beta x - \alpha\beta e^{\alpha x} \sin\beta x - \beta^2 e^{\alpha x} \cos\beta x) + \\ & + C_2(\alpha^2 e^{-\alpha x} \cos\beta x + \alpha\beta e^{-\alpha x} \sin\beta x + \alpha\beta e^{-\alpha x} \sin\beta x - \beta^2 e^{-\alpha x} \cos\beta x) + \\ & + C_3(\alpha^2 e^{\alpha x} \sin\beta x + \alpha\beta e^{\alpha x} \cos\beta x + \alpha\beta e^{\alpha x} \cos\beta x - \beta^2 e^{\alpha x} \sin\beta x) + \\ & + C_4(\alpha^2 e^{-\alpha x} \sin\beta x - \alpha\beta e^{-\alpha x} \cos\beta x - \alpha\beta e^{-\alpha x} \cos\beta x - \beta^2 e^{-\alpha x} \sin\beta x) \end{aligned} \quad 7.23.$$

Daljnijm sređivanjem gornje jednadžbe dobijemo:

$$\begin{aligned} w(x)'' = & e^{\alpha x}[\cos\beta x(C_1\alpha^2 - C_1\beta^2 + C_3\alpha\beta + C_3\alpha\beta) \\ & + \sin\beta x(-C_1\alpha\beta \cdot 2 + C_3\alpha^2 - C_3\beta^2)] + \\ & + e^{-\alpha x}[\cos\beta x(C_2\alpha^2 - C_2\beta^2 - 2C_4\alpha\beta) + \sin\beta x(2C_2\alpha\beta + C_4\alpha^2 - C_4\beta^2)] \end{aligned} \quad 7.24.$$

U proračun uvodimo nove konstante  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$

$$A = C_1(\alpha^2 - \beta^2) + 2C_3\alpha\beta$$

$$B = -2C_1\alpha\beta + C_3(\alpha^2 - \beta^2)$$

$$C = C_2(\alpha^2 - \beta^2) - 2C_4\alpha\beta$$

$$D = 2C_2\alpha\beta + C_4(\alpha^2 - \beta^2)$$

Konačni izraz za  $w(x)''$  glasi:

$$w(x)'' = Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x + Ce^{-\alpha x} \cos \beta x + De^{-\alpha x} \sin \beta x \quad 7.25.$$

Treća derivacija slijeganja  $w$  glasi:

$$w(x)''' = A(\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x) + B(\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x) + \\ + C(-\alpha e^{-\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{-\alpha x} \sin \beta x) + D(-\alpha e^{-\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{-\alpha x} \cos \beta x) \quad 7.26.$$

Daljnijm sređivanjem gornje jednadžbe dobije se:

$$w(x)''' = (A\alpha + B\beta)e^{\alpha x} \cos \beta x + (B\alpha - A\beta)e^{\alpha x} \sin \beta x + \\ + (D\beta - C\alpha)e^{-\alpha x} \cos \beta x - (D\alpha + C\beta)e^{-\alpha x} \sin \beta x \quad 7.27.$$

Prema rubnim uvjetima određujemo uvjetne jednadžbe, koje glase:

Za lijevi rub nosača, tj.  $x=0$ :

$$M(x) = -EIw'' = 0 \Rightarrow w'' = 0 \quad 7.28.$$

$$A + B + C + D = 0 \quad 7.29.$$

$$Q(x) = -EIw''' = -P_1 \quad 7.30.$$

$$w''' = \frac{P_1}{EI} \quad 7.31.$$

Za desni rub nosača, tj.  $x=l$ :

$$M(l) = -EIw'' = 0 \Rightarrow w'' = 0 \quad 7.32.$$

$$A + B + C + D = 0 \quad 7.33.$$

$$Q(x) = -EIw''' = P_2 \quad 7.34.$$

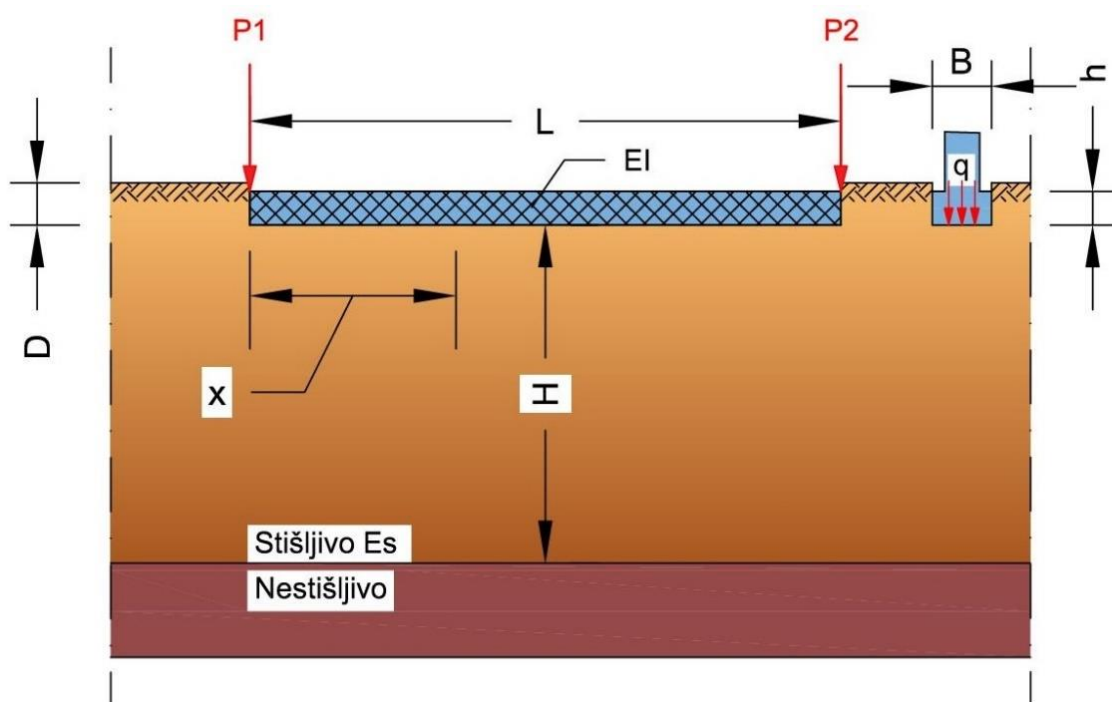
$$w''' = \frac{-P_2}{EI} \quad 7.35.$$

Radi lakšeg izračuna potrebno je jednadžbu 7.27. sređiti te dobivamo:

$$w(x)''' = A(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x)e^{\alpha x} + B(\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x)e^{\alpha x} - \\ - C(\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x)e^{-\alpha x} + D(\beta \cos \beta x - \alpha \sin \beta x)e^{-\alpha x} \quad 7.36.$$

## 7.2.1 Proračun dvoparametarskog modele tla – parametar N -sila u lančanicima

Primjer proračuna provest ćemo za nosač: dužine  $L=14$  m, širine  $B=1,0$  m, visine  $h=0,8$  m, opterećen je na rubu sa silama  $P_1=1300$  kN, i  $P_2=800$  kN, koji leži na tlu modula elastičnosti  $E_s=20000$  kN/m<sup>2</sup>. Proračun se provodi na dva načina, gore navedenom metodom lančanice, te prema hipotezi Leontieva i Vlasova za izračun parametra N prema formuli iz literature, na nosaču opterećenom koncentriranim silama na rubu.



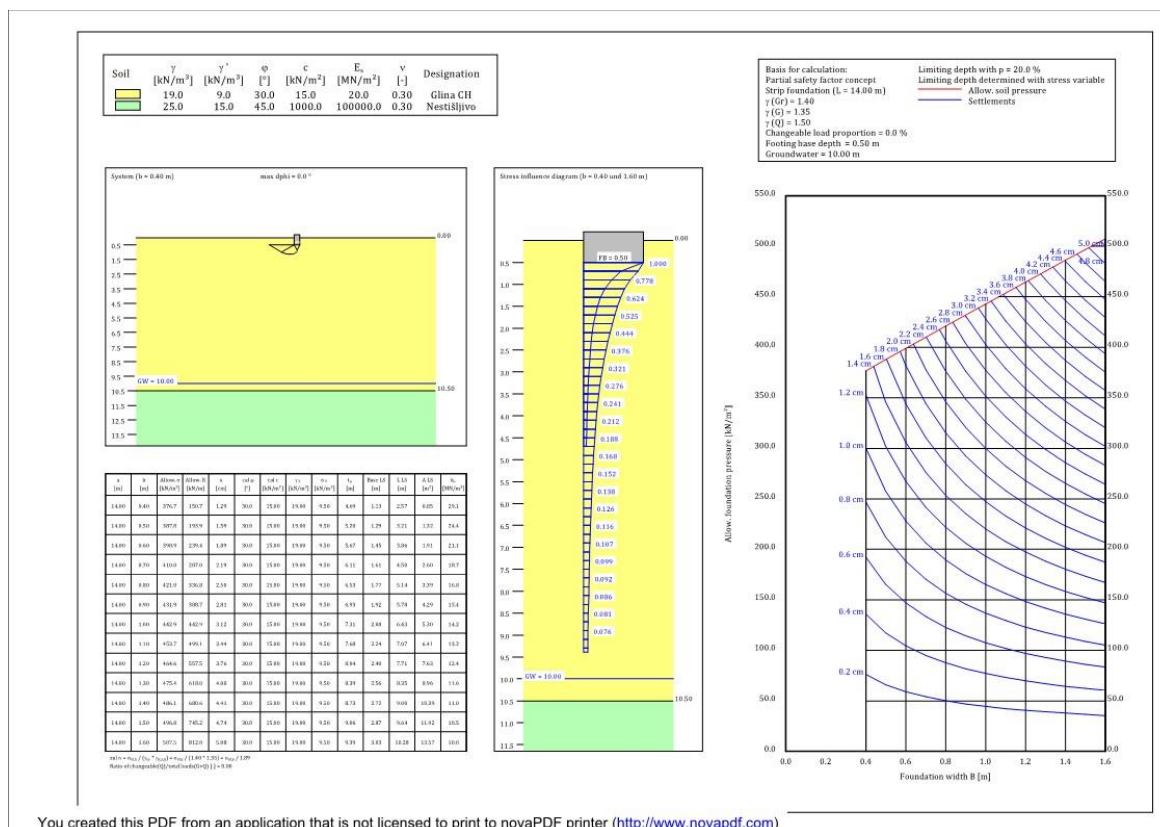
Slika 7.3. Shema djelujućeg opterećenja

$$I = \frac{B \cdot h^3}{12} = \frac{1,0 \cdot 0,8^3}{12} = 0,04267 \text{ m}^4$$

$$EI = E_{bet} \cdot I = 1280000 \text{ kNm}^2$$

$$q = \frac{P_1 + P_2}{B \cdot L} = 150 \text{ kN/m}^2$$

Početno slijeganje očitati smo iz računalnog programa GGU, te ono u našem slučaju iznosi 0,91cm, za zadano naprezanje  $q=150$  kN/m<sup>2</sup>.



Slika 7.4. Grafikon iz računalnog programa GGU

$$w(GGU) = 0,00910 \text{ m}$$

$$k_s = \frac{q}{w} = 16483,52 \text{ kN/m}^3$$

$$k_B = k_s \cdot B = 16483,52 \text{ kN/m}^2$$

$$N_{max} = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{f}{l}\right)^2} = \frac{384EI}{40l^2} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{5ql^3}{384EI}\right)^2} = 62702,67 \text{ kN/m}$$

$$N = 2 \cdot \sqrt{k_B EI} = 290509,22 \Rightarrow N_{max} < N$$

Kako je  $N_{max}$  manji od  $N$ ,  $m$  je realan broj pa rješenje tražimo pomoću jednadžbe 7.15.

Koeficijente  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\lambda$  izračunavamo pomoću jednadžbi 7.16., 7.17. i 7.18. na slijedeći način:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_s \cdot B}{4EI}} = \frac{16483,52 \cdot 1,0}{4 \cdot 1,28 \cdot 10^6} = 0,23820$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{N}{4EI}} = \sqrt{0,23820^2 + \frac{62702,67}{4 \cdot 1,28 \cdot 10^6}} = 0,262653$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{N}{4EI}} = \sqrt{0,23820^2 - \frac{62702,67}{4 \cdot 1,28 \cdot 10^6}} = 0,210935$$

Ulazni podaci za proračun su slijedeći, a unosimo ih u računalni program Excel u kojem smo kreirali sve potrebne formule kako bi došli do konačnog rješenja:

Tablica 7.3. Tablica ulaznih podataka za dvoparametarski model tla

$E_{bet} =$	30000	MN/m <sup>2</sup>			
$E_s =$	20000	kN/m <sup>2</sup>			
$I =$	0,04267	m <sup>4</sup>			
$P_1 =$	1300	kN	$P_2 =$	800	kN
$EI =$	1280000	kNm <sup>2</sup>	$k_B =$	16483,52	kN/m <sup>2</sup>
$B =$	1,0	m	$e =$	2,71828183	
$h =$	0,8	m	$D =$	0,5	m
$L =$	14,0	m	$H =$	10,0	m
$v =$	0,3		$w$ (iz GGU) =	0,0091	m

Nakon određivanja ovih konstanti potrebno je uz upotrebu rubnih uvjeta i uvjetnih jednadžbi odrediti vrijednosti najprije konstanti A, B, C, D, a zatim i glavnih konstanti C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> i C<sub>4</sub>.

Rubni uvjeti:

**$x = 0$**

$$M(x) = M(0) = 0$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \Rightarrow w''(x) = 0$$

$$w(0)'' = Ae^{\alpha 0} \cos \beta 0 + Be^{\alpha 0} \sin \beta 0 + Ce^{-\alpha 0} \cos \beta 0 + De^{-\alpha 0} \sin \beta 0$$

$$w''(0) = A + C \Rightarrow A + C = 0$$

$$Q(x) = Q(0) = -Q_1 = -1300 \text{ kN}$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -Q_1 \Rightarrow w'''(x) = \frac{Q_1}{EI} = \frac{1300}{1,28 \cdot 10^6}$$

$$w(x)''' = (A\alpha + B\beta)e^{\alpha x} \cos\beta x + (B\alpha - A\beta)e^{\alpha x} \sin\beta x + (D\beta - C\alpha)e^{-\alpha x} \cos\beta x - (D\alpha + C\beta)e^{-\alpha x} \sin\beta x = \frac{Q_1}{EI}$$

$$w''' = A\alpha + B\beta - C\alpha + D\beta = 0,001016$$

$$\Rightarrow A \cdot 0,262653 + B \cdot 0,210935 - C \cdot 0,262653 + D \cdot 0,210935 = 0,001016$$

**x = L = 14m**

$$M(x) = M(L) = 0$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \Rightarrow w''(L) = 0$$

$$w(L)'' = Ae^{\alpha L} \cos\beta L + Be^{\alpha L} \sin\beta L + Ce^{-\alpha L} \cos\beta L + De^{-\alpha L} \sin\beta L$$

$$w''(L) = A \cdot (-38,8330) + B \cdot 7,4082 + C \cdot (-0,0248) + D \cdot 0,0047 = 0$$

$$Q(x) = Q(L) = Q_2 = 800kN$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_2 \Rightarrow w'''(x) = \frac{-Q_2}{EI} = -\frac{800}{1,28 \cdot 10^6}$$

$$w(x)''' = A(\alpha \cos\beta x - \beta \sin\beta x)e^{\alpha x} + B(\beta \cos\beta x + \alpha \sin\beta x)e^{\alpha x} - C(\alpha \cos\beta x + \beta \sin\beta x)e^{-\alpha x} + D(\beta \cos\beta x - \alpha \sin\beta x)e^{-\alpha x} = -\frac{800}{EI}$$

$$w''' = A \cdot (-11,7623) + B \cdot (-6,2454) - C \cdot 0,0055 + D \cdot (-0,0065) = -0,000625$$

Konačni sustav jednadžbi glasi:

$\cos \beta 0 e^{\alpha 0}$	$\sin \beta 0 e^{\alpha 0}$	$\cos \beta 0 e^{-\alpha 0}$	$\sin \beta 0 e^{-\alpha 0}$	=	$M_1/EI$
$(\alpha \cos \beta 0 - \beta \sin \beta 0) e^{\alpha 0}$	$(\beta \cos \beta 0 + \alpha \sin \beta 0) e^{\alpha 0}$	$-(\alpha \cos \beta 0 + \beta \sin \beta 0) e^{-\alpha 0}$	$(\beta \cos \beta 0 - \alpha \sin \beta 0) e^{-\alpha 0}$	=	$Q_1/EI$
$\cos \beta L e^{\alpha L}$	$\sin \beta L e^{\alpha L}$	$\cos \beta L e^{-\alpha L}$	$\sin \beta L e^{-\alpha L}$	=	$M_2/EI$
$(\alpha \cos \beta L - \beta \sin \beta L) e^{\alpha L}$	$(\beta \cos \beta L + \alpha \sin \beta L) e^{\alpha L}$	$-(\alpha \cos \beta L + \beta \sin \beta L) e^{-\alpha L}$	$(\beta \cos \beta L - \alpha \sin \beta L) e^{-\alpha L}$	=	$Q_2/EI$

Numerički:

$$\begin{array}{cccc|c}
 & A & 0 & C & 0 & = & 0 \\
 & 0,2627A & 0,2109B & -0,2627C & 0,210935 & = & 0,001016 \\
 & -38,8330A & 7,4082B & -0,0248C & 0,0047D & = & 0 \\
 & -11,7623A & -6,2454B & -0,0055C & -0,0065D & = & -0,000625
 \end{array}$$

Sustav ima sljedeća rješenja (riješeno pomoću determinanti i La Place-ovim razvojem sustava determinanti) u računalnom programu Excel:

$$D = \begin{vmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,2627 & 0,2109 & -0,2627 & 0,2109 \\ -38,8330 & 7,4082 & -0,0248 & 0,0047 \\ -11,7623 & -6,2454 & 0,0055 & -0,0065 \end{vmatrix} = 69,4396$$

$$E = \begin{vmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0010 & 0,2109 & -0,2627 & 0,2109 \\ 0,0000 & 7,4082 & -0,0248 & 0,0047 \\ -0,0006 & -6,2454 & 0,0055 & -0,0065 \end{vmatrix} = 0,0010$$

$$F = \begin{vmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,2627 & 0,0010 & -0,2627 & 0,2109 \\ -38,8330 & 0,0000 & -0,0248 & 0,0047 \\ -11,7623 & -0,0006 & 0,0055 & -0,0065 \end{vmatrix} = 0,0048$$

$$G = \begin{vmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,2627 & 0,2109 & 0,0010 & 0,2109 \\ -38,8330 & 7,4082 & 0,0000 & 0,0047 \\ -11,7623 & -6,2454 & -0,0006 & -0,0065 \end{vmatrix} = -0,0010$$

$$H = \begin{vmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,2627 & 0,2109 & -0,2627 & 0,0010 \\ -38,8330 & 7,4082 & -0,0248 & 0,0000 \\ -11,7623 & -6,2454 & 0,0055 & -0,0006 \end{vmatrix} = 0,3272$$

Za izračun konstanti vrijedi:

$$A = \frac{E}{D} = \frac{0,0010}{69,4396} = 0,00001379$$



$$B = \frac{F}{D} = \frac{0,0048}{69,4396} = 0,00006920$$

$$C = \frac{G}{D} = \frac{-0,0010}{69,4396} = -0,00001379$$

$$D = \frac{H}{D} = \frac{0,3272}{69,4396} = 0,00471134$$

Iz dobivenih konstanti A, B, C i D tražimo nove konstante C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> i C<sub>4</sub>.

$$A = C_1(\alpha^2 - \beta^2) + 2C_3\alpha\beta$$

$$B = -2C_1\alpha\beta + C_3(\alpha^2 - \beta^2)$$

$$C = C_2(\alpha^2 - \beta^2) - 2C_4\alpha\beta$$

$$D = 2C_2\alpha\beta + C_4(\alpha^2 - \beta^2)$$

Sustav jednažbi glasi:

$$\begin{array}{cccc|c} \alpha^2-\beta^2 & 0 & 2\alpha\beta & 0 & = & A \\ -2\alpha\beta & 0 & \alpha^2-\beta^2 & 0 & = & B \\ 0 & \alpha^2-\beta^2 & 0 & 2\alpha\beta & = & C \\ 0 & 2\alpha\beta & 0 & \alpha^2-\beta^2 & = & D \end{array}$$

Numerički:

$$\begin{array}{cccc|c} 0,02449C_1 & 0 & 0,11081C_3 & 0 & = & 0,00001379 \\ -0,11081C_1 & 0 & 0,02449C_3 & 0 & = & 0,00006920 \\ 0 & 0,02449 C_2 & 0 & -0,11081 C_4 & = & -0,00001379 \\ 0 & 0,11081 C_2 & 0 & 0,02449 C_4 & = & 0,00471134 \end{array}$$

Sustav ima sljedeća rješenja (riješeno pomoću determinanti i La Place-ovim razvojem sustava determinanti) u računalnom programu Excel:

$$D = \begin{vmatrix} 0,0244932 & 0,0000000 & 0,1108054 & 0,0000000 \\ -0,1108054 & 0,0000000 & 0,0244932 & 0,0000000 \\ 0,0000000 & 0,0244932 & 0,0000000 & -0,1108054 \\ 0,0000000 & 0,1108054 & 0,0000000 & 0,0244932 \end{vmatrix} \quad D = -0,0001658$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} 0,0000138 & 0,0000000 & 0,1108054 & 0,0000000 \\ 0,0000692 & 0,0000000 & 0,0244932 & 0,0000000 \\ -0,0000138 & 0,0244932 & 0,0000000 & -0,1108054 \\ 0,0047113 & 0,1108054 & 0,0000000 & 0,0244932 \end{vmatrix} & A = 0,0000001 \\
 B &= \begin{vmatrix} 0,0244932 & 0,0000138 & 0,1108054 & 0,0000000 \\ -0,1108054 & 0,0000692 & 0,0244932 & 0,0000000 \\ 0,0000000 & -0,0000138 & 0,0000000 & -0,1108054 \\ 0,0000000 & 0,0047113 & 0,0000000 & 0,0244932 \end{vmatrix} & B = -0,0000067 \\
 E &= \begin{vmatrix} 0,0244932 & 0,0000000 & 0,0000138 & 0,0000000 \\ -0,1108054 & 0,0000000 & 0,0000692 & 0,0000000 \\ 0,0000000 & 0,0244932 & -0,0000138 & -0,1108054 \\ 0,0000000 & 0,1108054 & 0,0047113 & 0,0244932 \end{vmatrix} & E = 0,0000000 \\
 F &= \begin{vmatrix} 0,0244932 & 0,0000000 & 0,1108054 & 0,0000138 \\ -0,1108054 & 0,0000000 & 0,0244932 & 0,0000692 \\ 0,0000000 & 0,0244932 & 0,0000000 & -0,0000138 \\ 0,0000000 & 0,1108054 & 0,0000000 & 0,0047113 \end{vmatrix} & F = -0,0000015
 \end{aligned}$$

Za izračun konstanti vrijedi:

$$C_1 = \frac{A}{D} = \frac{0,0000001}{-0,0001658} = -0,0005692$$

$$C_2 = \frac{B}{D} = \frac{-0,0000067}{-0,0001658} = 0,0405121$$

$$C_3 = \frac{E}{D} = \frac{0,00000004}{-0,0001658} = 0,0002503$$

$$C_4 = \frac{F}{D} = \frac{-0,0000015}{-0,0001658} = 0,0090795$$

Sada kad smo odredili integracijske konstante možemo pomoću slijedećih jednadžbi izračunati nepoznate elemente potrebne za dimenzioniranje nosača:

- slijeganje  $w$ , jednadžba 7.15.
- reakcija tla  $q$ , jednadžba 7.19.
- momenti savijanja  $M$ , jednadžba 7.25.
- poprečne sile  $Q$ , jednadžba 7.27.

Konačni rezultati prema navedenim jednadžbama dani su u tablici:

Tablica 7.4. Rezultati izračuna na dvoparametarskom modelu tla; N-lančanica

x (m)	w	w'	w''	w'''	M(x)	Q (x)	q (x)
					El×w''	El×w'''	k <sub>b</sub> ×w-N×w''
0	0,03994	-0,00882	0,000000	0,00102	0,00	-1300,00	658,40
0,5	0,03555	-0,00871	0,000447	0,00078	-571,97	-996,25	558,00
1	0,03127	-0,00839	0,000785	0,00058	-1004,26	-740,56	466,24
1,5	0,02718	-0,00794	0,001031	0,00041	-1319,81	-528,52	383,41
2	0,02335	-0,00737	0,001203	0,00028	-1539,31	-355,66	309,50
2,5	0,01982	-0,00674	0,001313	0,00017	-1681,26	-217,56	244,33
3	0,01661	-0,00607	0,001377	0,00009	-1761,96	-109,94	187,55
3,5	0,01375	-0,00537	0,001403	0,00002	-1795,59	-28,68	138,74
4	0,01124	-0,00467	0,001402	-0,00002	-1794,39	30,05	97,41
4,5	0,00908	-0,00397	0,001382	-0,00005	-1768,69	69,89	63,05
5	0,00727	-0,00329	0,001349	-0,00007	-1727,09	94,18	35,16
5,5	0,00579	-0,00263	0,001310	-0,00008	-1676,58	106,04	13,26
6	0,00464	-0,00198	0,001268	-0,00008	-1622,64	108,37	-3,08
6,5	0,00380	-0,00136	0,001226	-0,00008	-1569,36	103,83	-14,22
7	0,00327	-0,00076	0,001187	-0,00007	-1519,53	94,96	-20,48
7,5	0,00304	-0,00017	0,001152	-0,00007	-1474,72	84,13	-22,09
8	0,00310	0,00040	0,001121	-0,00006	-1435,34	73,62	-19,21
8,5	0,00344	0,00095	0,001094	-0,00005	-1400,68	65,65	-11,95
9	0,00405	0,00149	0,001069	-0,00005	-1368,91	62,40	-0,31
9,5	0,00493	0,00202	0,001045	-0,00005	-1337,12	66,07	15,73
10	0,00607	0,00254	0,001017	-0,00006	-1301,31	78,88	36,27
10,5	0,00746	0,00304	0,000982	-0,00008	-1256,34	103,11	61,45
11	0,00910	0,00352	0,000934	-0,00011	-1195,91	141,12	91,42
11,5	0,01097	0,00397	0,000869	-0,00015	-1112,51	195,36	126,36
12	0,01306	0,00438	0,000779	-0,00021	-997,42	268,34	166,43
12,5	0,01534	0,00474	0,000657	-0,00028	-840,61	362,67	211,75
13	0,01779	0,00503	0,000493	-0,00038	-630,76	480,97	262,35
13,5	0,02036	0,00523	0,000278	-0,00049	-355,21	625,89	318,19
14	0,02300	0,00530	0,000000	-0,00063	0,00	800,00	379,05

## 7.2.2 Proračun dvoparametarskog modele tla – parametar N -formula iz literature

Tijek samog proračuna identičan je prethodnom proračunu, tj. proračunu u kojem se parametar N tretira kao sila u lančanici. U ovom ćemo odlomku prikazati izračun koeficijenta N prema jednadžbi 5.18 te rezultate dobivenog proračuna.

$$N_{max} = \frac{E_s \cdot H}{6 \cdot (1 + \nu)} = \frac{20000 \cdot 10}{6 \cdot (1 + 0,3)} = 25641,03 \text{ kN/m}$$

$$N = 2 \cdot \sqrt{k_B EI} = 290509,22 \Rightarrow N_{max} < N$$

Kako je  $N_{max}$  manji od N, m je realan broj pa rješenje tražimo pomoću jednadžbe 7.15.

Koeficijente  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\lambda$  izračunavamo pomoću jednadžbi 7.16., 7.17. i 7.18. na slijedeći način:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_s \cdot B}{4EI}} = \frac{16483,52 \cdot 1,0}{4 \cdot 1,28 \cdot 10^6} = 0,23820$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{N}{4EI}} = \sqrt{0,23820^2 + \frac{25641,03}{4 \cdot 1,28 \cdot 10^6}} = 0,248492$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{N}{4EI}} = \sqrt{0,23820^2 - \frac{25641,03}{4 \cdot 1,28 \cdot 10^6}} = 0,227447$$

Ulazni podaci za proračun su slijedeći, a unosimo ih u računalni program Excel u kojem smo kreirali sve potrebne formule kako bi došli do konačnog rješenja:

Konačni rezultati prema navedenim jednadžbama dani su u tablici:

Tablica 7.5. Rezultati izračuna na dvoparametarskom modelu tla;  $N$ - formula iz literature

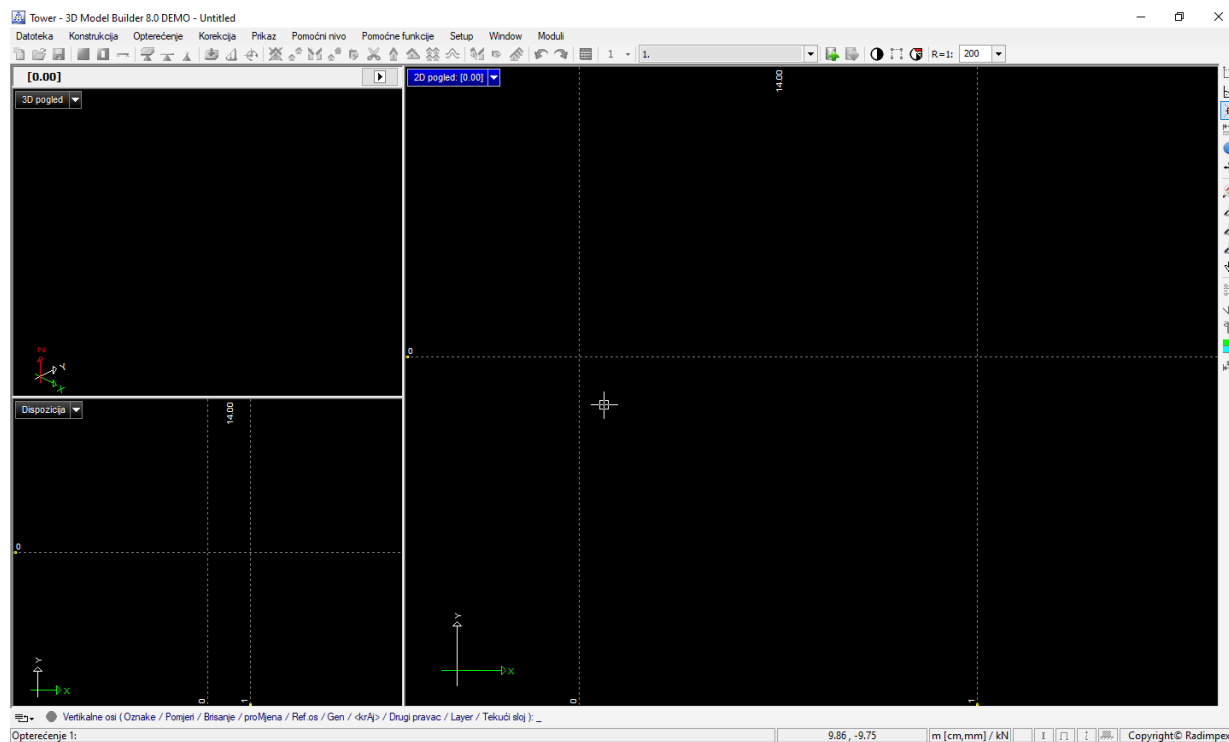
x (m)	w	w'	w''	w'''	M(x)	Q (x)	q (x)
					$EI \times w''$	$EI \times w'''$	$k_b \times w - N \times w''$
0	0,03785	-0,00898	0,000000	0,00102	0,00	-1300,00	623,82
0,5	0,03337	-0,00886	0,000450	0,00079	-575,61	-1009,56	538,59
1	0,02901	-0,00855	0,000794	0,00059	-1016,48	-760,65	457,88
1,5	0,02485	-0,00809	0,001049	0,00043	-1342,77	-550,75	382,71
2	0,02095	-0,00751	0,001229	0,00029	-1573,25	-376,91	313,75
2,5	0,01735	-0,00687	0,001348	0,00018	-1725,15	-235,90	251,41
3	0,01409	-0,00617	0,001417	0,00010	-1814,06	-124,36	195,87
3,5	0,01118	-0,00546	0,001448	0,00003	-1853,85	-38,89	147,14
4	0,00863	-0,00473	0,001451	-0,00002	-1856,72	23,90	105,11
4,5	0,00645	-0,00401	0,001432	-0,00005	-1833,18	67,31	69,58
5	0,00462	-0,00330	0,001400	-0,00007	-1792,11	94,52	40,30
5,5	0,00315	-0,00261	0,001360	-0,00008	-1740,85	108,60	16,99
6	0,00201	-0,00194	0,001317	-0,00009	-1685,21	112,46	-0,63
6,5	0,00120	-0,00129	0,001273	-0,00009	-1629,63	108,87	-12,83
7	0,00071	-0,00067	0,001232	-0,00008	-1577,14	100,49	-19,84
7,5	0,00053	-0,00006	0,001195	-0,00007	-1529,51	89,86	-21,87
8	0,00065	0,00053	0,001162	-0,00006	-1487,25	79,42	-19,08
8,5	0,00106	0,00110	0,001133	-0,00006	-1449,66	71,56	-11,60
9	0,00175	0,00166	0,001105	-0,00005	-1414,87	68,59	0,50
9,5	0,00272	0,00221	0,001078	-0,00006	-1379,87	72,81	17,15
10	0,00395	0,00274	0,001047	-0,00007	-1340,48	86,50	38,34
10,5	0,00545	0,00325	0,001009	-0,00009	-1291,41	111,90	64,03
11	0,00720	0,00375	0,000958	-0,00012	-1226,25	151,27	94,19
11,5	0,00919	0,00421	0,000889	-0,00016	-1137,44	206,83	128,78
12	0,01141	0,00463	0,000794	-0,00022	-1016,36	280,76	167,66
12,5	0,01382	0,00500	0,000667	-0,00029	-853,27	375,17	210,64
13	0,01639	0,00529	0,000498	-0,00038	-637,44	492,04	257,42
13,5	0,01909	0,00549	0,000279	-0,00049	-357,19	633,14	307,51
14	0,02186	0,00556	0,000000	-0,00062	0,00	800,00	360,28

### 7.3 Proračun pomoću računalnog programa Tower 8 Demo

Program Tower služi za statičku i dinamičku analizu ravninskih i prostornih konstrukcija. Proračun se provodi metodom konačnih elemenata, a geometrija modela se definira grafički, iscrtavanjem samih konstruktivnih elemenata i opterećenja. Program se sastoji od četiri modula, koji su međusobno povezani [24]:

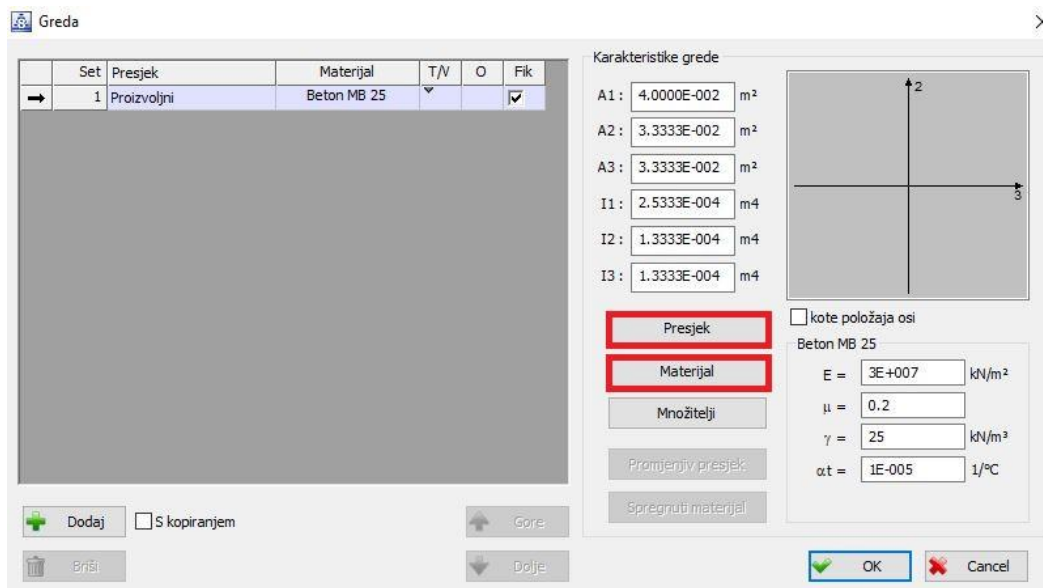
- Unos podataka
- Formiranje mreže
- Proračun
- Obrada rezultata

Pokretanjem računalnog programa Tower, otvara nam se početno sučelje koje vidimo na slici 7.5.:



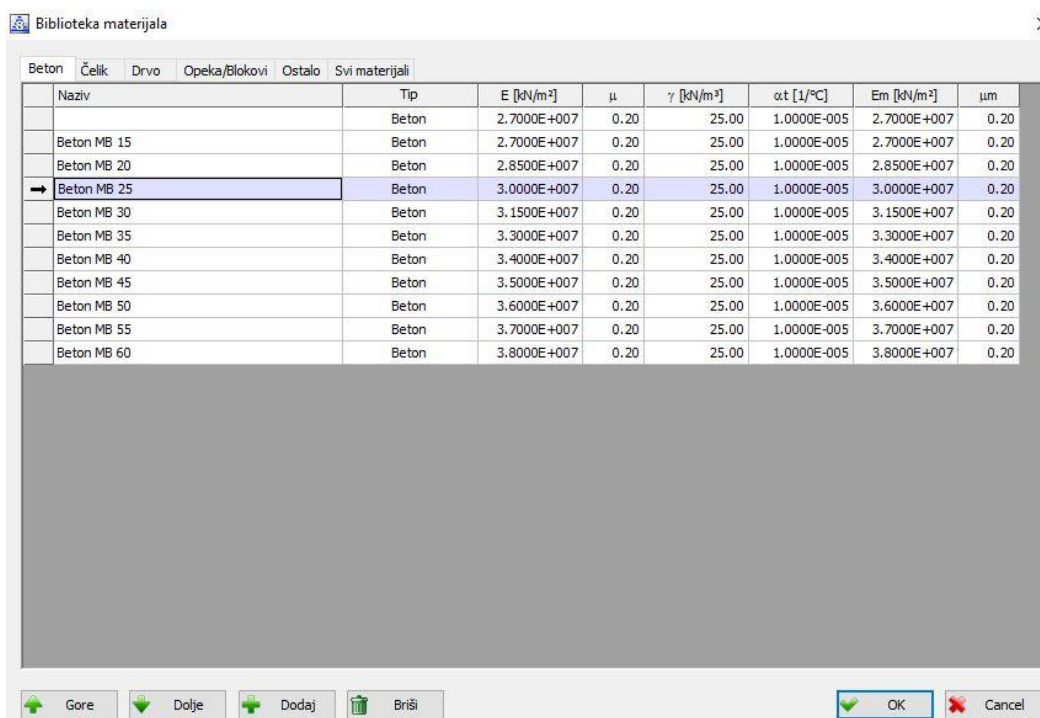
Slika 7.5. Početno sučelje programa Tower 8.0 DEMO

Nakon što smo formirali koordinatni sustav, odabiremo ikonu „Greda“ te ulazimo u proceduru postavljanja karakteristika grede. Odabiremo početnu i završnu točku grede. Pritiskom na tipku Enter otvara nam se prozor za definiranje karakteristika grede te u njemu definiramo poprečni presjek grede i materijal izrade iste.



Slika 7.6. Sučelje u kojem definiramo karakteristike grede.

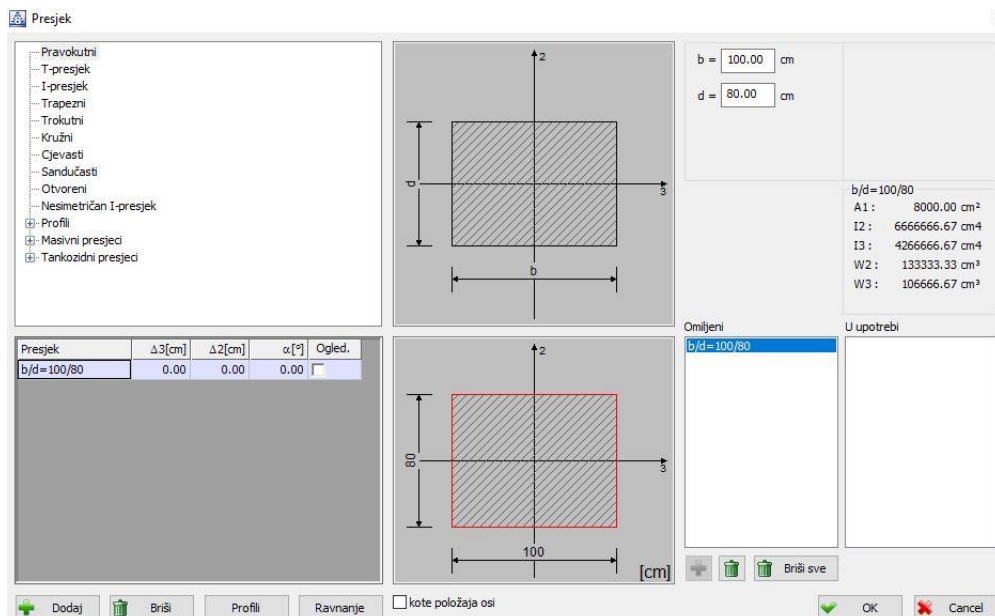
Parametri u kojima se definira kvaliteta materijala izrade grede aktiviraju se klikom na komandno polje „Materijal“ a otvara nam se slijedeći dijaloški okvir:



Slika 7.7. Dijaloški okvir "Biblioteka materijala"

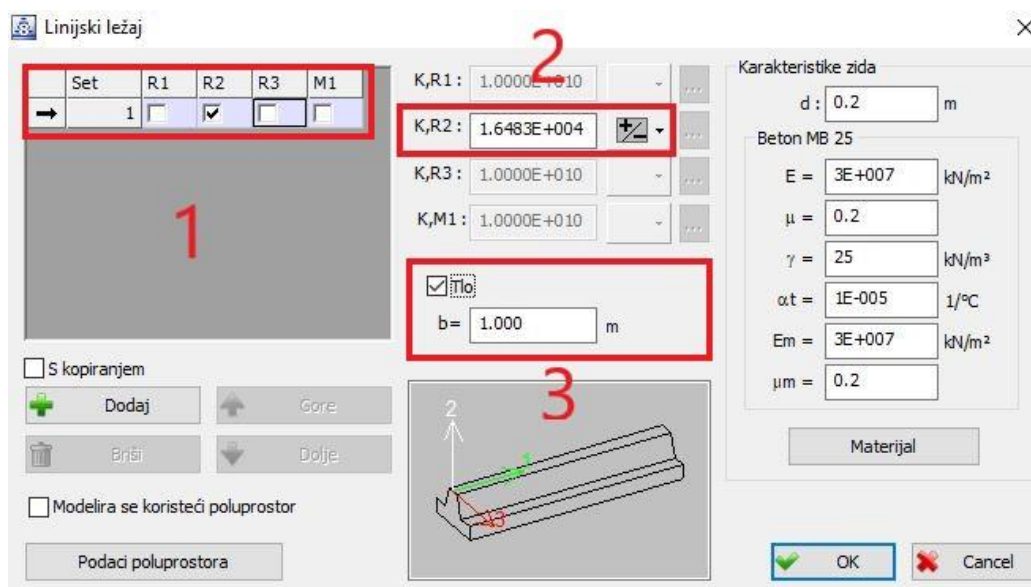
U dijaloškom okviru „Biblioteka materijala“ odabiremo klasu betona našeg temeljnog nosača. U našem slučaju to je beton modula stižljivosti  $E_{bet}=30000\text{MN/m}^2$ . Zatim otvaramo dijaloški okvir

„Presjek“ u kojem definiramo pravokutni poprečni presjek temeljnog nosača, za ovaj slučaj  $B=100\text{cm}$ ,  $h=80\text{cm}$ .



Slika 7.8. Dijaloški okvir za definiranje poprečnog presjeka nosača

Potvrdom odabranih karakteristika otvara nam se početni dijaloški okvir te pristupamo konstrukciji linijskog nosača pritiskom na ikonu „Linijski ležaj“. Nacrtamo linijski ležaj ispod našeg temeljnog nosača te nam se pritiskom na tipku „Enter“ otvara dijaloški okvir u koji je potrebno upisati karakteristike našeg linijskog nosača.

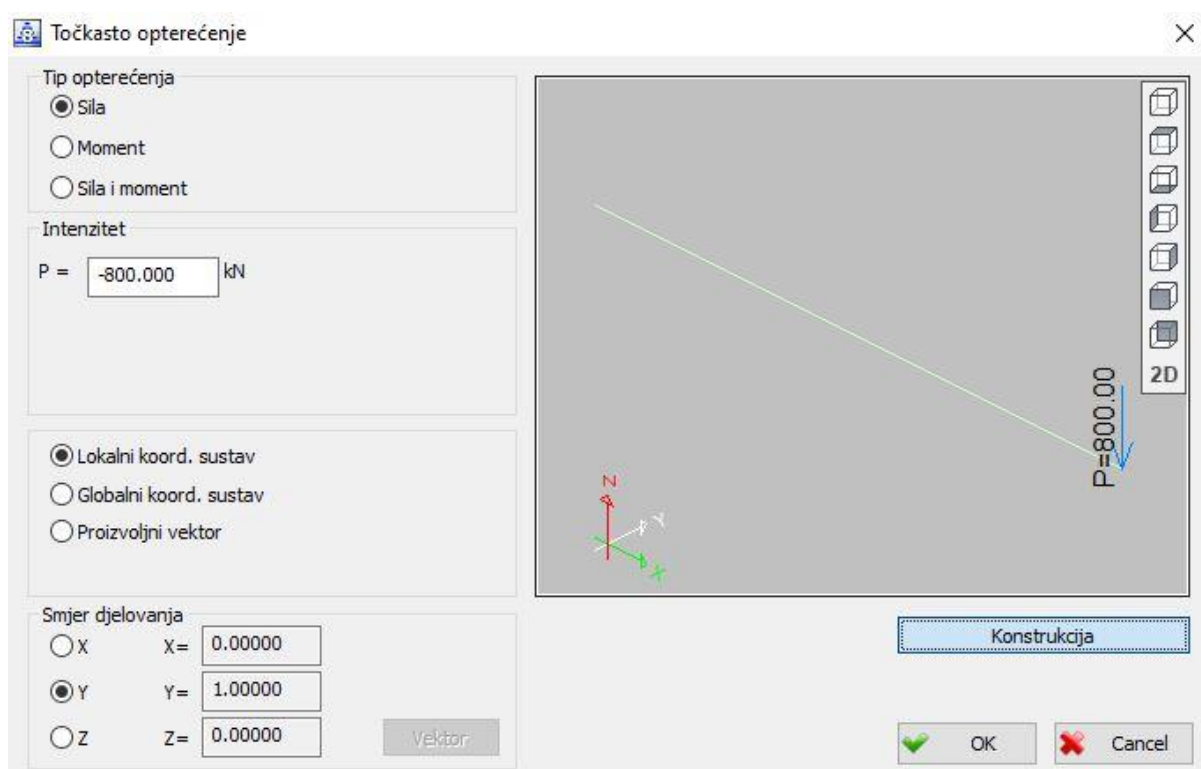


Slika 7.9. Karakteristike linijskog ležaja



Set linijskih oslonaca određen je sa četiri parametra, koji određuju da li je pomjeranje ili rotacija oslonca dozvoljena ili ne, u smjeru njegovih lokalnih osi. Navedeno je na slici 7.9. označeno brojem 1. S obzirom da je nosač na tlu, imamo spriječeno pomjeranje oslonca u smjeru lokalne osi R2, odnosno dobivamo reakcije u smjeru te osi. Da bi odredili krutost oslonca, u označenom pravokutniku 2 na slici 7.9., upisujemo koeficijent reakcije podloge, odnosno  $k_s$ . Nakon toga potrebno je još samo označiti da je linijsko nosač tlo i upisati širinu temeljnog nosača.

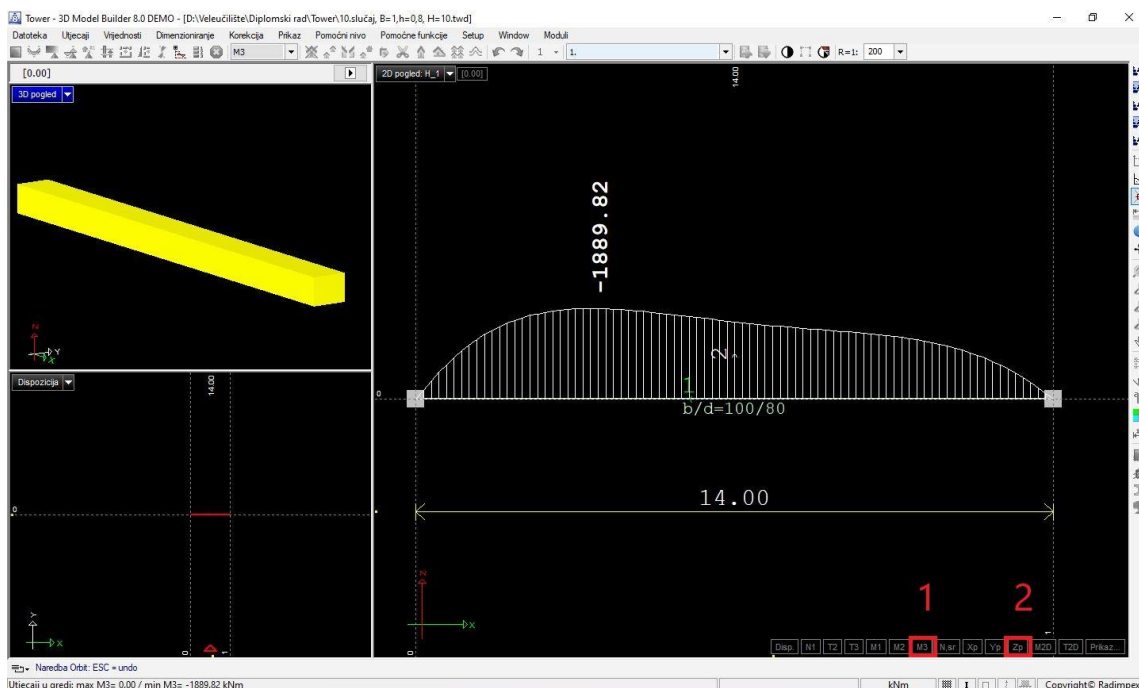
Za naš zadatak potrebno je još samo odrediti točkasta opterećenja na krajevima nosača.



Slika 7.10. Unos točkastog opterećenja

Time je unos podataka i definiranje našeg modela temeljnog nosača završen. Potrebno je još izvršiti formiranje mreže na kartici „Moduli“ te izvršiti proračun pritiskom na ikonu „Proračun“ na kartici „Moduli“.

Da bi vidjeli rezultate proračuna potrebno je pritisnuti ikonu „Utjecaji u gredi“ čime dobivamo grafički prikaz momenata savijanja (odabirom opcije M3, označeno na slici 7.11. brojem 1) i pripadajuće progibe grede (odabirom opcije Zp, označeno na slici 7.11. brojem 2).



Slika 7.11. Rezultati našeg proračuna, momenti savijanja

Za naprezanja u tlu i slijeganje potrebno je pritisnuti ikonu „Utjecaji u linijskim ležajevima“ čime dobivamo grafički prikaz naprezanja u tlu (odabirom opcije  $\sigma_{Tla}$ , označeno na slici 7.12. brojem 1) slijeganja (odabirom opcije  $s_{tla}$ , označeno na slici 7.12. brojem 2).



Slika 7.12. Rezultati proračuna, naprezanja u tlu

Da bi dobili numerički ispis rezultata potrebno je na kartici „Vrijednosti“ odabrati opciju „Tekstualni izvještaj“. Time je naš proračun gotov, a niže navedeno nalazi se numerički ispis rezultata.

Tablica 7.6. Tablica rezultata iz programa Tower-Poprečne sile i momenti

Rezne sile u gredama - Opterećenje: 1

Oznaka	LC	x [m]	T2 [kN]	M3 [kNm]
Nivo: [0.00 m]				
(1 - 29)	1	0,00	1300,00	0,00
		0,50	1019,55	-575,18
		1,00	776,16	-1019,50
		1,50	568,52	-1351,30
		2,00	394,63	-1588,00
		2,50	252,06	-1746,00
		3,00	138,06	-1840,10
		3,50	49,72	-1884,00
		4,00	-15,98	-1889,80
		4,50	-62,13	-1868,00
		5,00	-91,74	-1827,70
		5,50	-107,82	-1776,30
		6,00	-113,27	-1719,90
		6,50	-110,90	-1663,00
		7,00	-103,42	-1609,00
		7,50	-93,49	-1559,60
		8,00	-83,63	-1515,50
		8,50	-76,33	-1476,00
		9,00	-73,99	-1439,20
		9,50	-78,95	-1402,00
		10,00	-93,50	-1360,20
		10,50	-119,88	-1308,50
		11,00	-160,23	-1240,30
		11,50	-216,62	-1148,30
		12,00	-291,00	-1023,70
		12,50	-385,14	-857,27
		13,00	-500,59	-638,59
		13,50	-638,60	-356,68
		14,00	-800,00	0,00

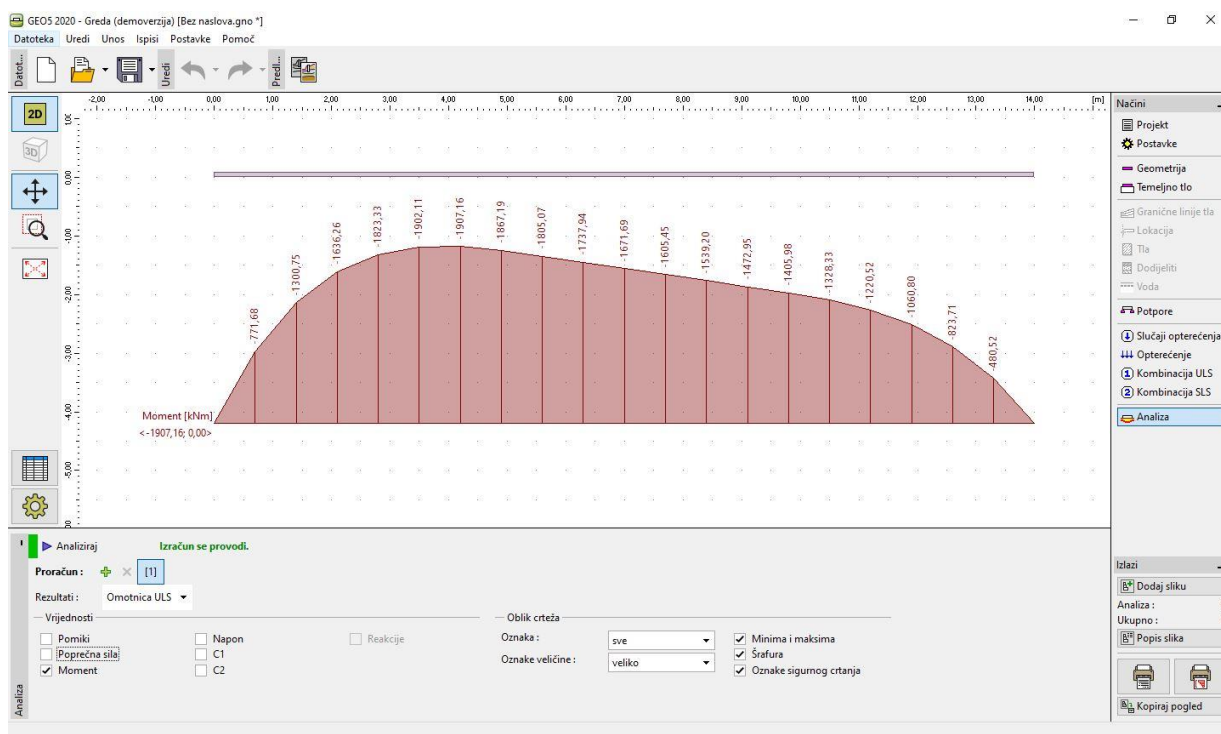
Tablica 7.7. Tablica rezultata iz programa Tower, Slijeganje i reakcija tla

Tower 8-Demo		Deformacija greda GLO - Opterećenje: 1		
Oznaka	LC	x [m]	w [mm]	q(ks×w)
Nivo: [0.00 m]				
(1 - 29)	1	0,00	-36,313	598,566
		0,50	-31,75	523,352
		1,00	-27,31	450,165
		1,50	-23,079	380,423
		2,00	-19,12	315,165
		2,50	-15,479	255,148
		3,00	-12,184	200,835
		3,50	-9,253	152,522
		4,00	-6,693	110,324
		4,50	-4,505	74,258
		5,00	-2,683	44,225
		5,50	-1,219	20,093
		6,00	-0,102	1,681
		6,50	0,678	-11,176
		7,00	1,134	-18,692
		7,50	1,277	-21,049
		8,00	1,115	-18,379
		8,50	0,657	-10,830
		9,00	-0,089	1,467
		9,50	-1,115	18,379
10,00	-2,416	39,824		
10,50	-3,984	65,670		
11,00	-5,808	95,736		
11,50	-7,877	129,841		
12,00	-10,173	167,687		
12,50	-12,673	208,896		
13,00	-15,344	252,923		
13,50	-18,146	299,110		
14,00	-21,024	346,549		

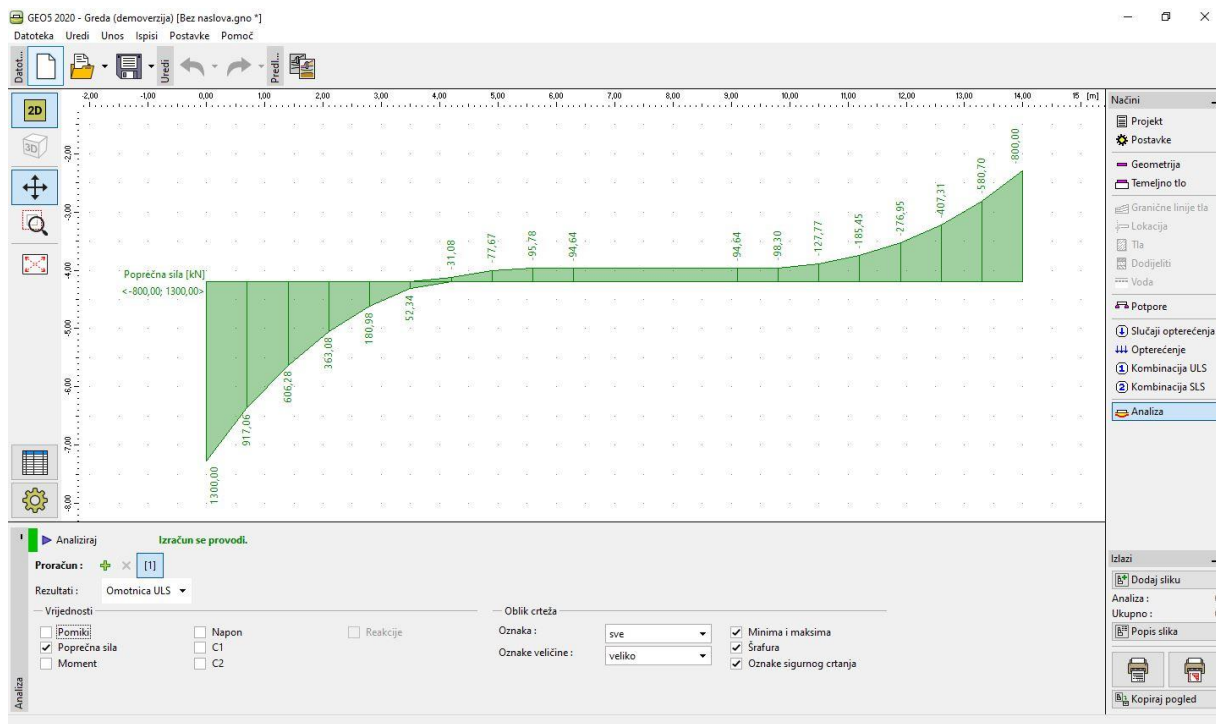
## 7.4 Proračun pomoću računalnog programa GEO5 2020 Demo

GEO5 je softverski paket za rješavanje geotehničkih problema koji se temelji na tradicionalnim analitičkim metodama i metodi konačnih elemenata (MKE). Individualni programi provjeravaju specifičan tip konstrukcije, što omogućava njihovu intuitivnost i jednostavnost korištenja. Program „Greda“, kojeg smo koristili u ovom primjeru, namijenjen je analizi temeljnih nosača na elastičnoj podlozi. Program koristi Winkler-Pasternak model i omogućuje izračunavanje C1 i C2 konstante iz deformacijskih svojstava tla, a u slučaju da imamo zadane konstante, iste se mogu i direktno upisivati.[25]

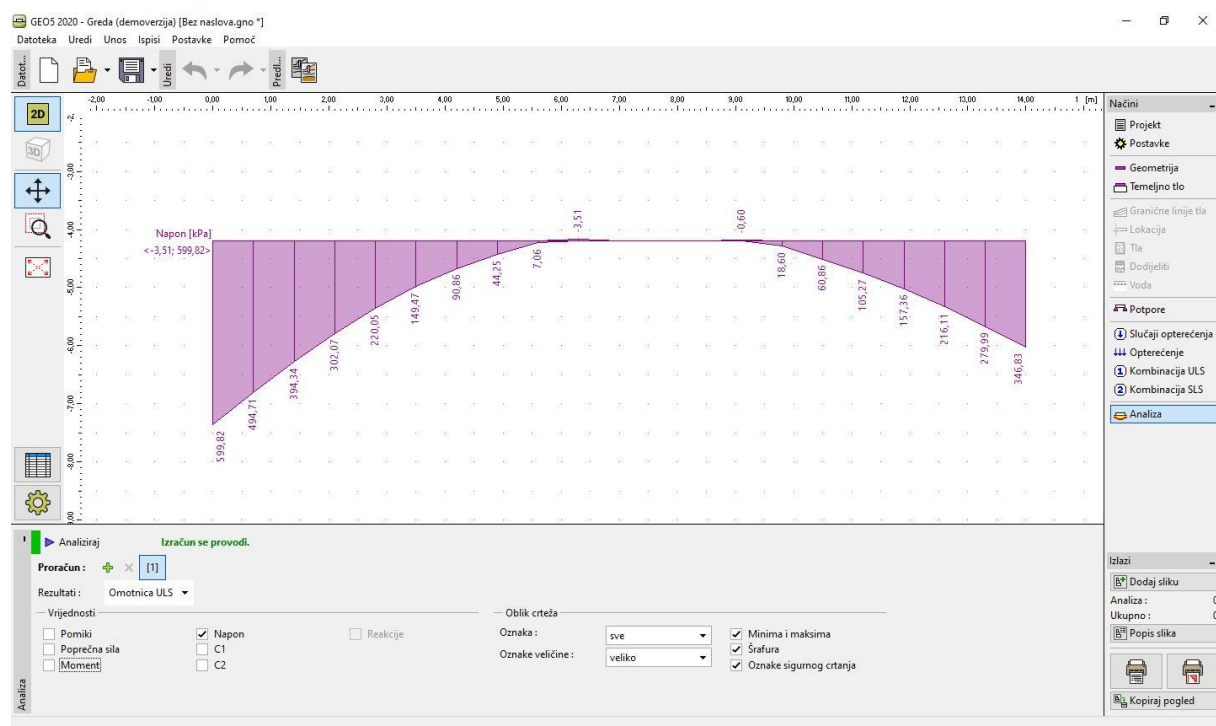
U ovom radu nećemo se baviti detaljima i postupkom samog proračuna već ćemo samo prikazati dobivene rezultate u grafičkom i tabličnom obliku.



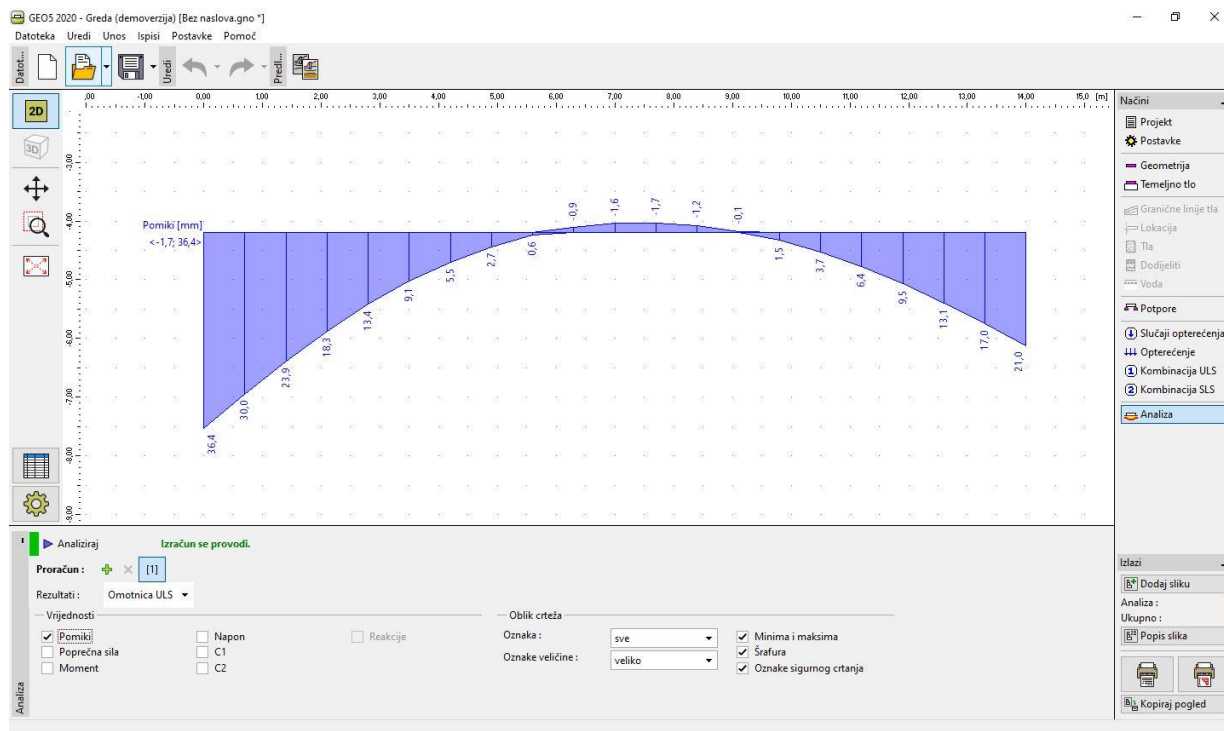
Slika 7.13. Grafički prikaz dobivenih rezultat u programu GEO5-Momenti savijanja



Slika 7.14. Grafički prikaz dobivenih rezultata u programu GEO5 - Poprečne sile



Slika 7.15. Grafički prikaz dobivenih rezultata u programu GEO5 - Naprežanja u tlu



Slika 7.16. Grafički prikaz dobivenih rezultata u programu GEO5 – Slijeganja

Tablica 7.8. Numerički prikaz dobivenih rezultata u programu GEO5

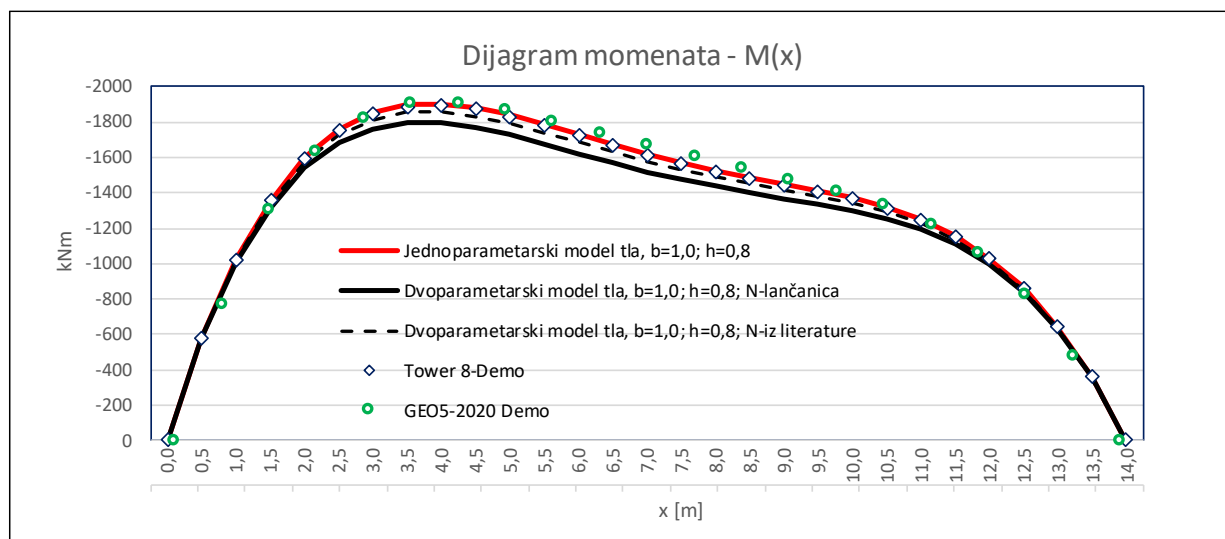
x [m]	Pomiki [mm]	Poprečna sila [kN]	Moment [kNm]	Napon [kPa]
0.00	36.40	1300.00	0.00	599.82
0.70	30.02	917.06	-771.68	494.71
1.40	23.93	606.28	-1300.75	394.34
2.10	18.33	363.08	-1636.26	302.07
2.80	13.35	180.98	-1823.33	220.05
3.50	9.07	52.34	-1902.11	149.47
4.20	5.51	-31.08	-1907.16	90.86
4.90	2.69	-77.67	-1867.19	44.25
5.60	0.57	-95.78	-1805.07	7.06
6.30	-0.85	-94.64	-1737.94	-3.51
7.00	-1.61	-94.64	-1671.69	0.00
7.70	-1.73	-94.64	-1605.45	0.00
8.40	-1.23	-94.64	-1539.20	0.00
9.10	-0.14	-94.64	-1472.95	-0.60
9.80	1.50	-98.30	-1405.98	18.60
10.50	3.69	-127.77	-1328.33	60.86
11.20	6.39	-185.45	-1220.52	105.27
11.90	9.55	-276.95	-1060.80	157.36
12.60	13.11	-407.31	-823.71	216.11
13.30	16.99	-580.70	-480.52	279.99
14.00	21.05	-800.00	0.00	346.83

## 8. REZULTATI I ANALIZA PREDMETNIH PRORAČUNA

### 8.1 Usporedba rezultata dobivenih različitim metodama proračuna

Rezultati proračuna elastičnog temeljnog nosača na tlu pokazuju minimalne razlike, što je zaista začuđujuće s obzirom da smo koristili analitičku metodu sa jednoparametarskim modelom tla, dvoparametarski model tla te računalne programe Tower i Geo5.

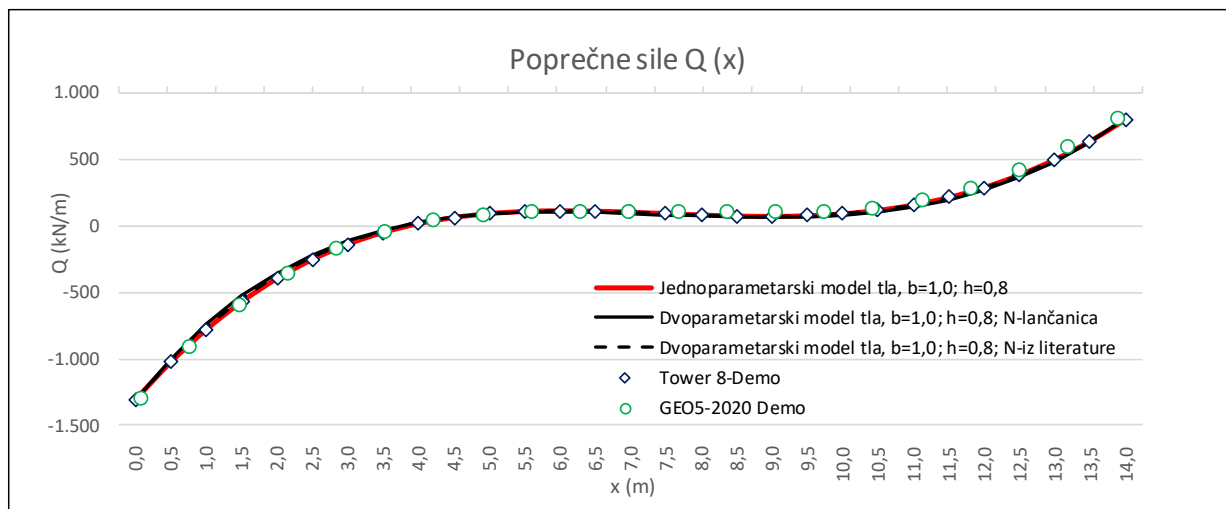
Na grafikonima se nalaze dijagrami za pojedine elemente proračuna, dakle grafički prikaz promjena vrijednosti za momente savijanja, poprečne sile, reakcija tla i slijeganje. Proračun smo izvršili na više načina, jednoparametarski i dvoparametarski model tla, te uz pomoć računalnih programe Tower i Geo5. Proračun sa dvoparametarskim modelom tla izvršen je uz različite načine izračuna parametra  $N$ , kao sile u lančanici i pomoću formule iz dostupne literature.



Slika 8.1. Dijagram momenata

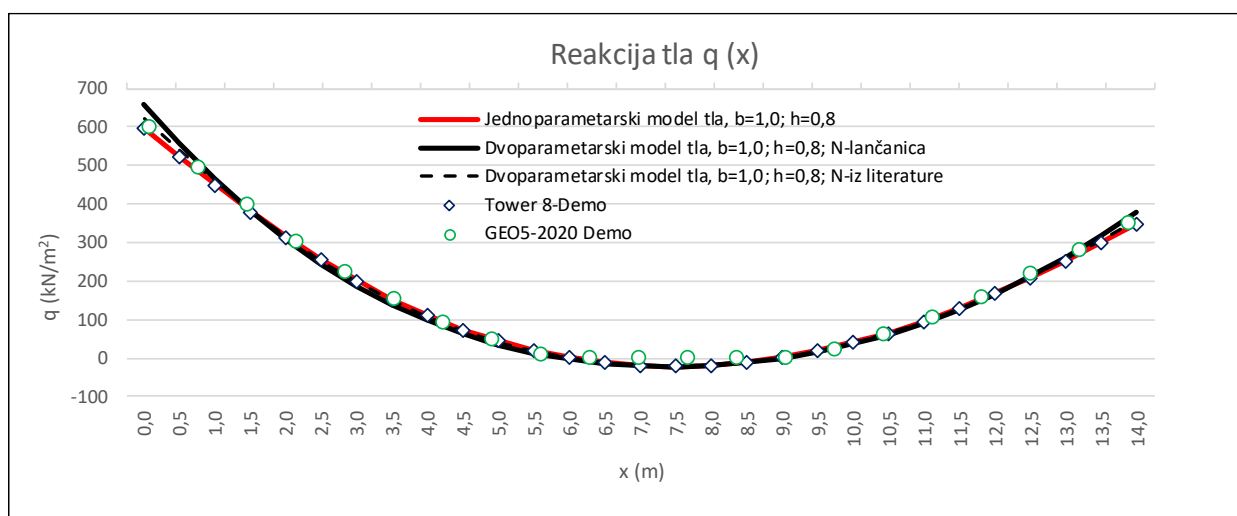
Analizirajući dijagram momenata svih proračuna, primjećujemo da su podaci dobiveni proračunom jednoparametarskog tla i računalnog programa Tower skoro identični. Tek nešto veći su momenti dobiveni uz pomoć softvera GEO5, dok su najmanji momenti dobiveni izračunom uz pomoć dvoparametarskog modela tla u kojem je parametar  $N$  određen kao sila u lančanici. Vrijednosti momenata dobivene proračunom parametarskog modela tla u kojem je parametar  $N$  određen iz debljine stišljivog sloja ispod nosača te mehaničkih karakteristika istog, nešto su manje od vrijednosti dobivenih jednoparametarskim modelom.





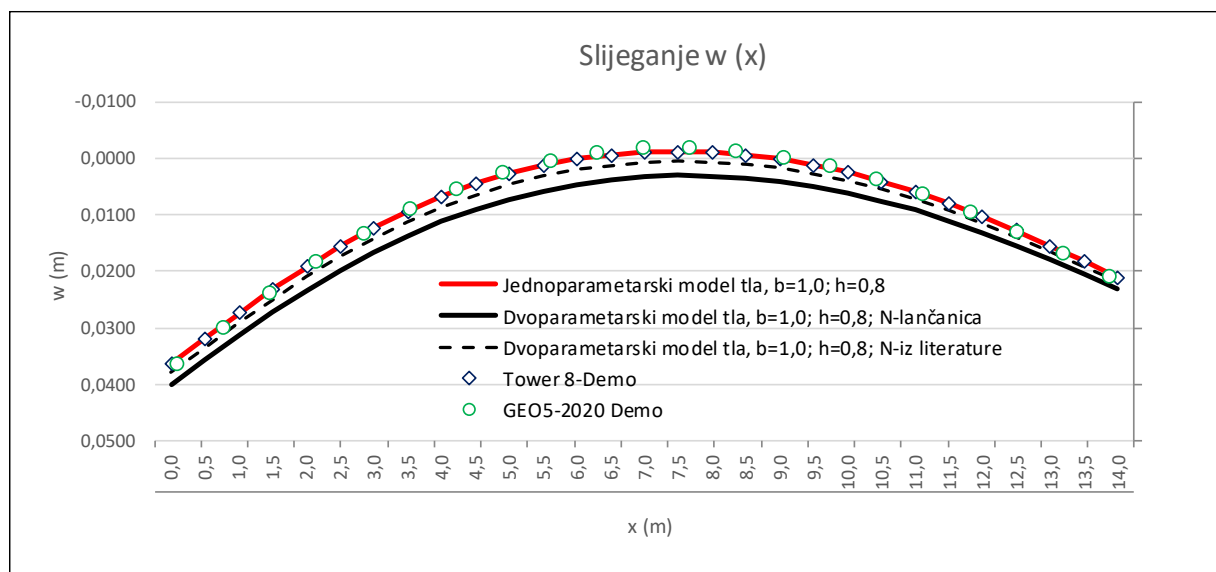
Slika 8.2. Dijagram poprečnih sila

U dijagramu poprečnih sila ne vidimo veće rasipanje dobivenih rezultata proračuna. Svih pet načina proračuna daje približno jednake rezultate za poprečne sile.



Slika 8.3. Dijagram reakcije tla

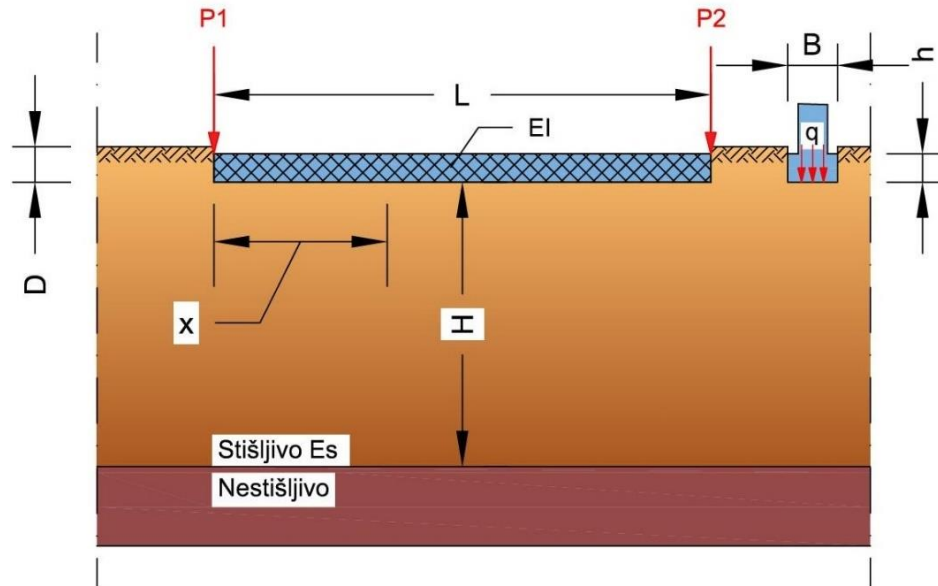
Reakcija tla kod svih načina proračuna približno je jednaka. Jedino odstupanje vidljivo je na krajevima temeljnog nosača, kod proračuna dvoparametarskim modelom tla, gdje dolazi do većih napreznja u tlu. Također, kod proračuna u softtveru GEO5, u sredini nosača primjećujemo manji dio nosača gdje nema napreznja, tj. isto je 0, dok kod ostalih proračuna na tom mjestu imamo negativno, tj. fiktivno napreznje.



Slika 8.4. Dijagram slijeganja

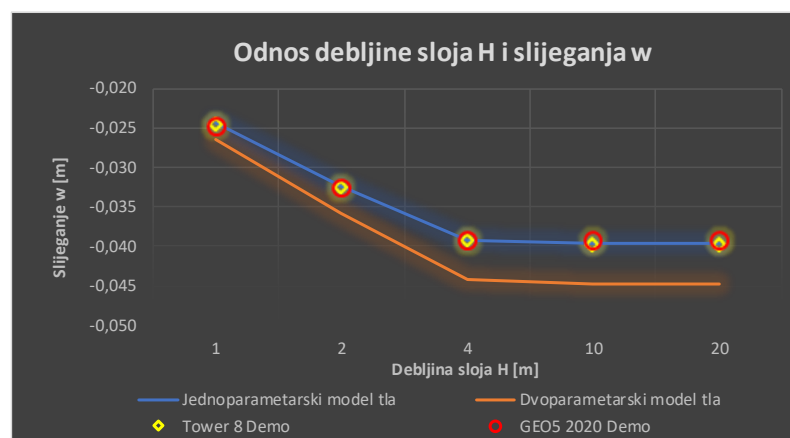
Računalni programi Tower i GEO5 najbliži su po rezultatima proračunu temeljnog nosača na jednaparametarskog modelu tla. To je vidljivo i na dijagramu slijeganja, gdje su slijeganja jednaparametarskog modela tla i slijeganja dobivena računalnim programima skoro identična. Što i nije toliko začuđujuće, s obzirom da smo kod modeliranja unosili samo jedan parametar tla, a to je  $k_s$ . Najviše odskoče dvoparametarski model tla, sa silom u lančanici kao parametar N, te su i slijeganja tim načinom proračuna najveća. Razlika u slijeganju između jednaparametarskog modela i spomenutog dvoparametarskog modela tla iznosi najviše 4mm.

## 8.2 Utjecaj debljine stišljivog sloja H na rezultate proračuna

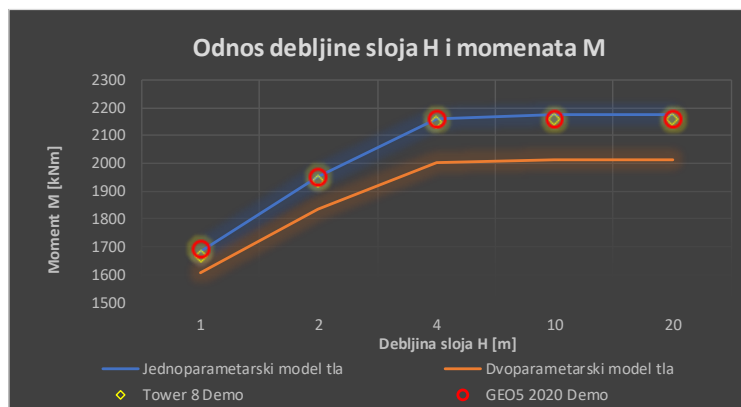


Slika 8.5. Stišljivi sloj ispod temeljnog nosača debljine H

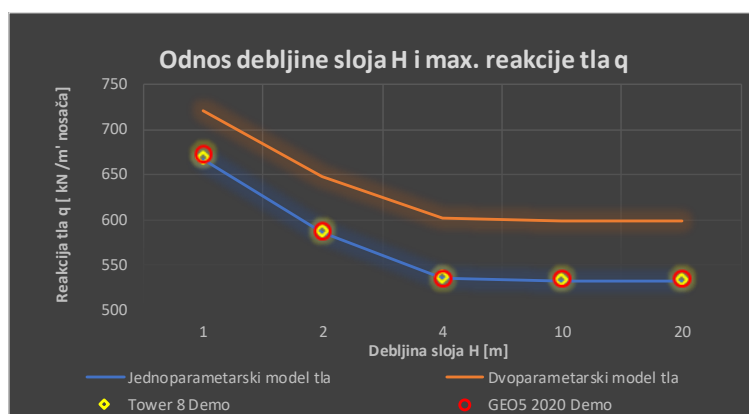
Analizom rezultata proračuna za temelj širine  $B=0,6\text{m}$  i visine  $h=1,0\text{m}$  dolazimo do zaključka da debljina stišljivog sloja H, u našim proračunima, ima utjecaj na dobivene rezultate slijeganja ( $w$ ), momenata savijanja ( $M$ ) i reakcija tla ( $q$ ) do debljine od 4m. Povećanje debljine stišljivog sloja od 4 metra na više nema utjecaj na rezultate, tj. slijeganje ostaje isto kao da je debljina sloja 4 metra. Slike 8.6, 8.7 i 8.8. prikazuju utjecaj debljine sloja na dobivene rezultate za proračune izvršene računalnim programima GEO5 i Tower 8 te na jednoparametarskom i dvoparametarskom modelu tla.



Slika 8.6. Utjecaj debljine sloja H na slijeganje, za temelj širine  $B=0,6\text{m}$

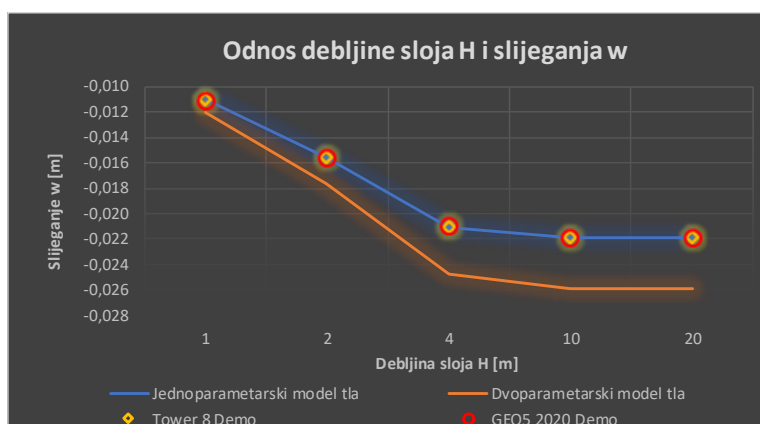


Slika 8.7. Utjecaj debljine sloja  $H$  na momente savijanja, za temelj širine  $B=0,6m$

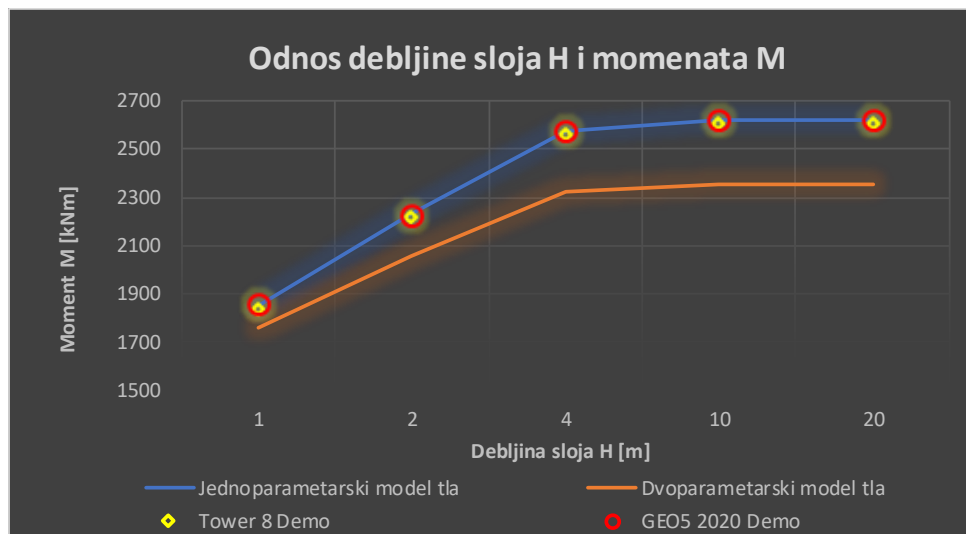


Slika 8.8. Utjecaj debljine stišljivog sloja na reakciju tla, za temelj širine  $B=0,6m$

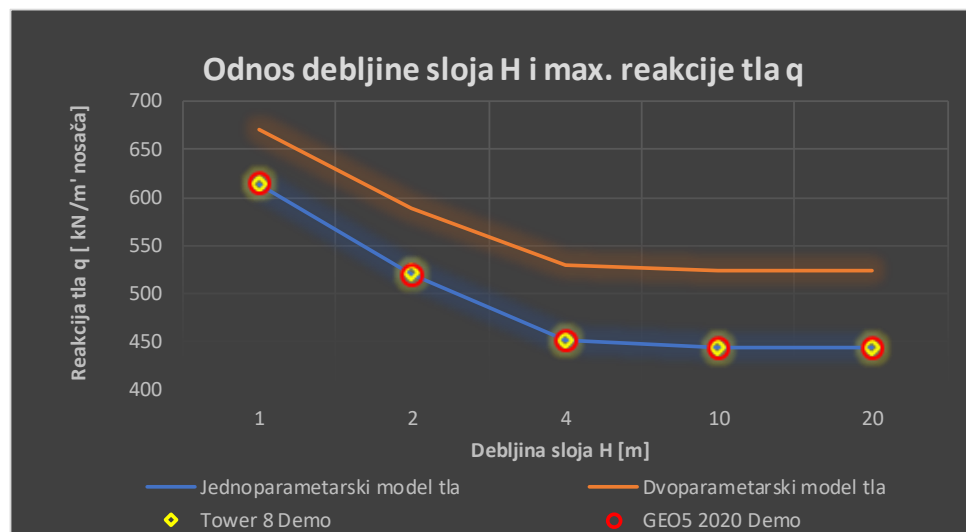
Istu usporedbu izvršili smo i za temelj širine  $B=1,6m$  i visine  $h=1,0m$ . U ovom slučaju utjecajna debljina stišljivog sloja  $H$ , iznosi 10 metara.. Povećanjem debljine stišljivog sloja od 10 metra na više, nema utjecaj na rezultate. Rezultati su prikazani na slikama 8.9, 8.10. i 8.11.



Slika 8.9. Utjecaj debljine stišljivog sloja  $H$  na slijeganje, za temelj širine  $B=1,6m$



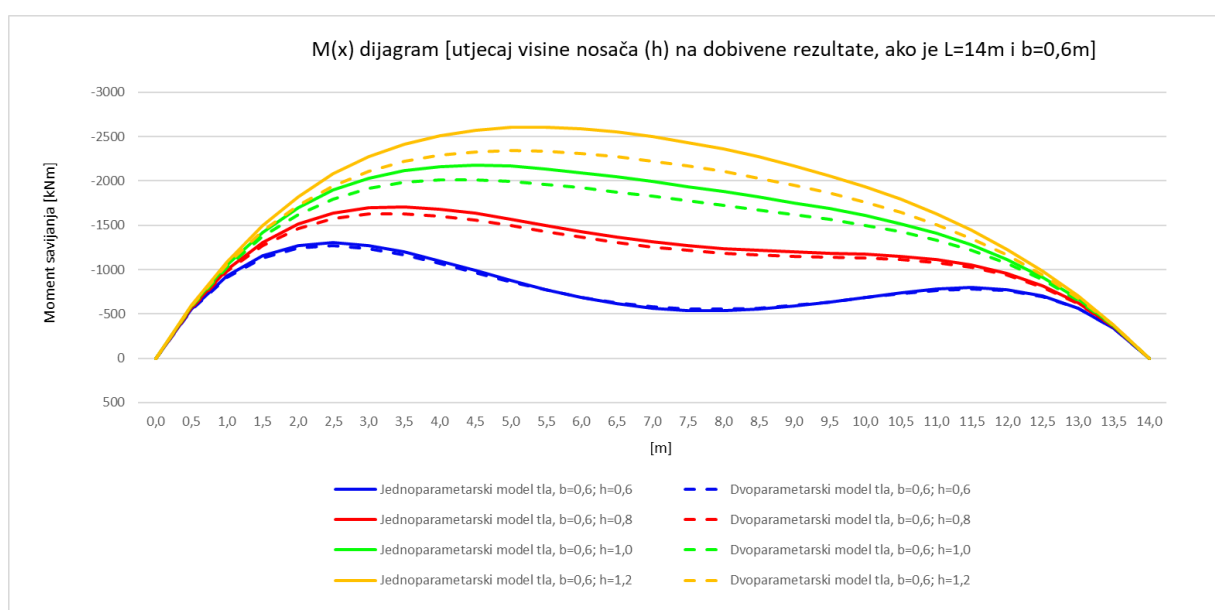
Slika 8.10. Utjecaj debljine stišljivog sloja H na momente savijanja, za temelj širine  $B=1,6m$



Slika 8.11. Utjecaj debljine stišljivog sloja H na reakcije tla, za temelj širine  $B=1,6m$

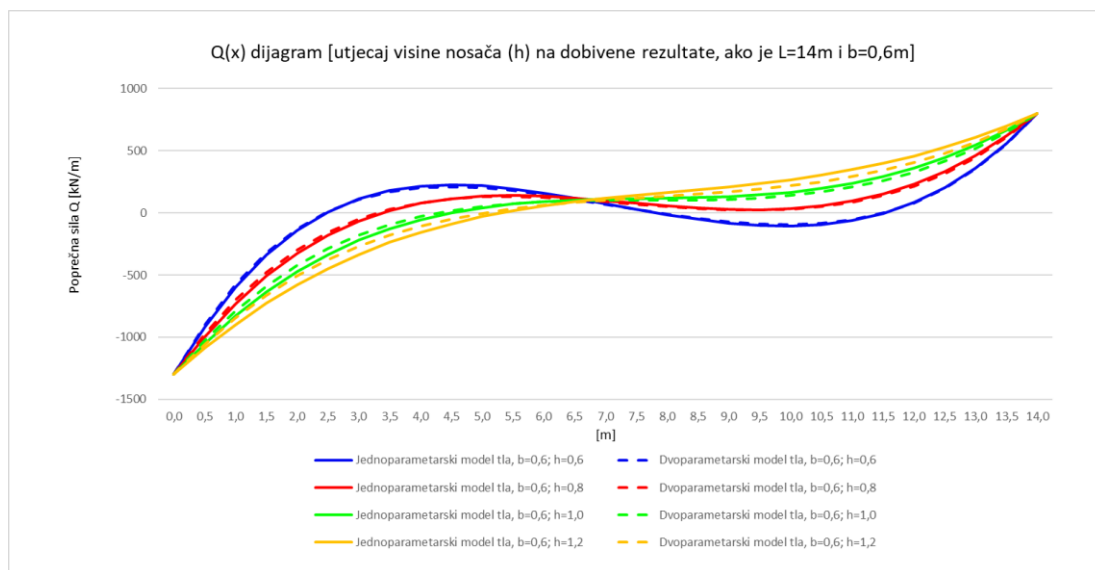
### 8.3 Utjecaj visine nosača $h$ na rezultate proračuna

Da bi smo vidjeli kako visina nosača utječe na rezultate proračuna, izvršili smo proračune na jednoparametarskom i dvoparametarskom modelu tla za više različitih poprečnih presjeka nosača. Dakle, imamo elastični temeljni nosač na tlu sa silama na rubovima nosača. Širina temelja  $B=0,6$  metara dok su visine različite i iznose  $h=0,6; 0,8; 1,0$  i  $1,2$  metara. Duljina temeljnog nosača je 14 metara, a debljina stišljivog sloja  $H=8,0$ m. Dobiveni rezultati vidljivi su na slijedećim dijagramima:



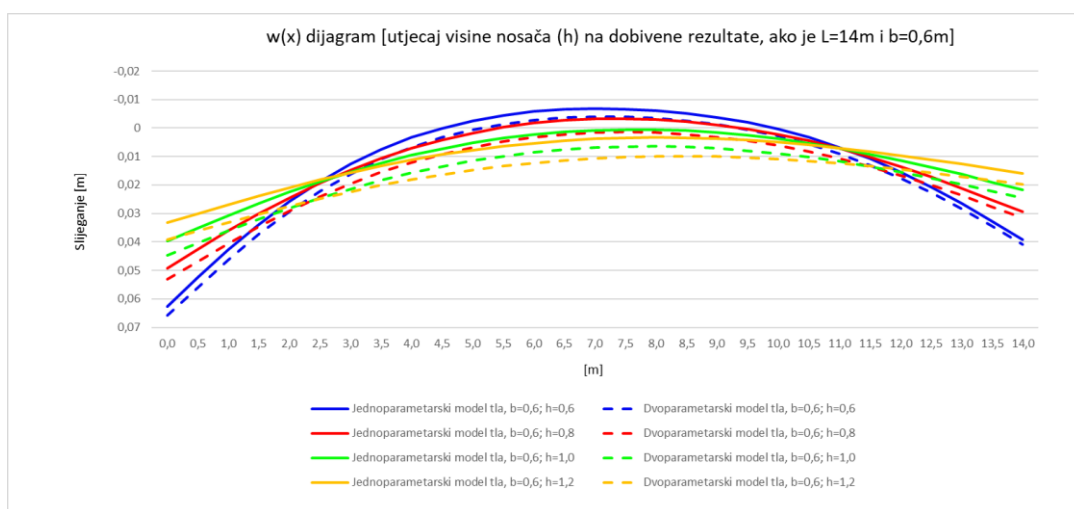
Slika 8.12. Momentni dijagram

Na momentnom dijagramu, slika 8.12., vidljivo je da se povećanjem visine temeljnog nosača, tj. povećanjem njegove krutosti ujedno povećava i moment savijanja. Također, povećanjem momenta savijanja povećava se i međusobna razlika u dobivenim rezultatima proračuna, jednoparametarski odnosno dvoparametarski model tla.



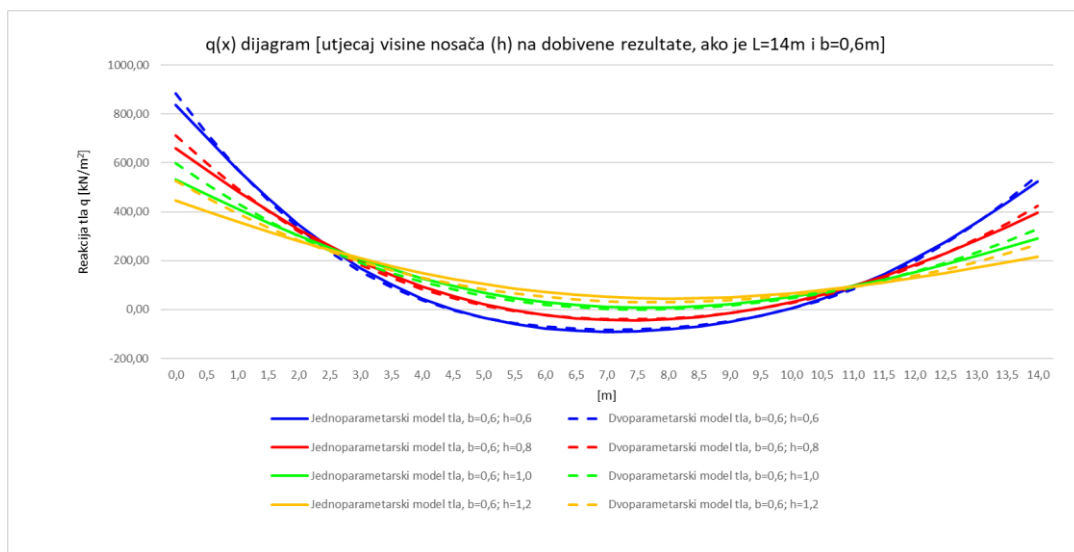
Slika 8.13. Dijagram poprečnih sila

Raspodjela poprečnih sila vidljiva je na slici 8.13. Kod nosača manje krutosti vrijednosti poprečnih sila koncentrirane su na krajevima nosača, dok je kod krućih nosača raspodjela poprečnih sila postepeno raspodijeljena po nosaču.



Slika 8.14. Dijagram slijeganja

Na slici 8.14. prikazan je dijagram slijeganja za temeljni nosač širine  $B=0,6\text{m}$  i različitih visina,  $h=0,6; 0,8; 1,0$  i  $1,2$  metara, na elastičnoj podlozi. Vidljivo je da su kod nosača manje krutosti slijeganja veća na krajevima nosača dok su na sredini nosača negativna slijeganja, tj. nosač se podiže. Također, kod nosača manje krutosti međusobne razlike između rezultata jednoparametarskog i rezultata dvoparametarskog modela tla su manja nego kod nosača veće krutosti.



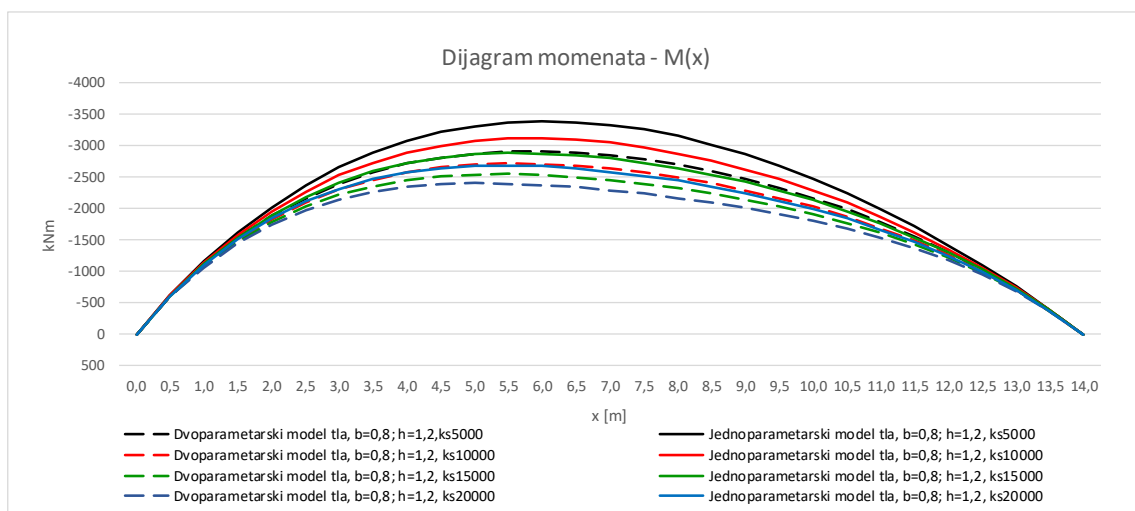
Slika 8.15. Dijagram reakcije tla

Dijagram reakcije tla prikazan je na slici 8.15. Vidljivo je da su reakcije tla na krajevima nosača manje visine znatno veće od reakcija tla ispod nosača veće visine. Također, kod krućeg nosača reakcije tla su pravilnije raspoređene ispod cijelog nosača dok su kod manje krutog reakcije koncentrirane na krajeve nosača, a na sredini su negativne.



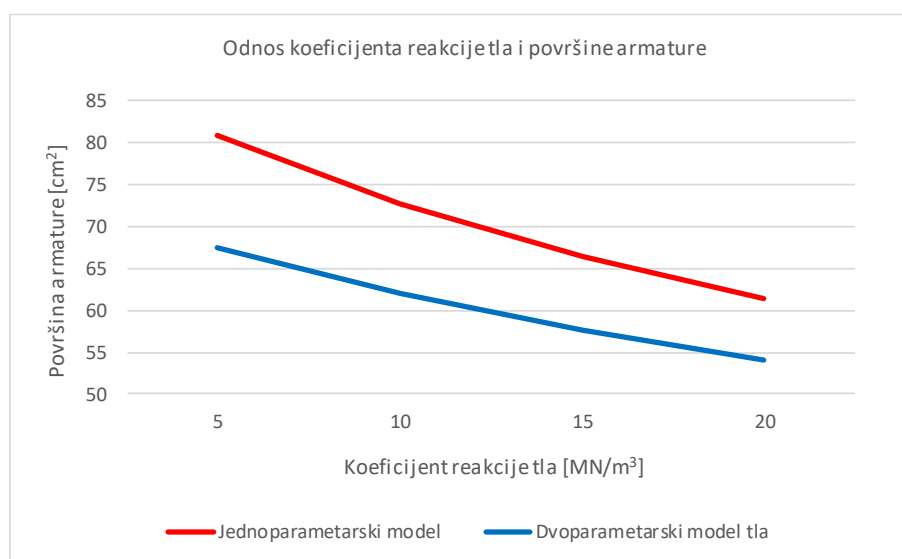
## 8.4 Utjecaj koeficijenta reakcije podloge ( $k_s$ ) na rezultate proračuna

Utjecaj koeficijenta reakcije podloge na rezultate proračuna, tj. na maksimalne momente, poprečne sile, reakciju tla i maksimalno slijeganje prikazani su na dijagramima.



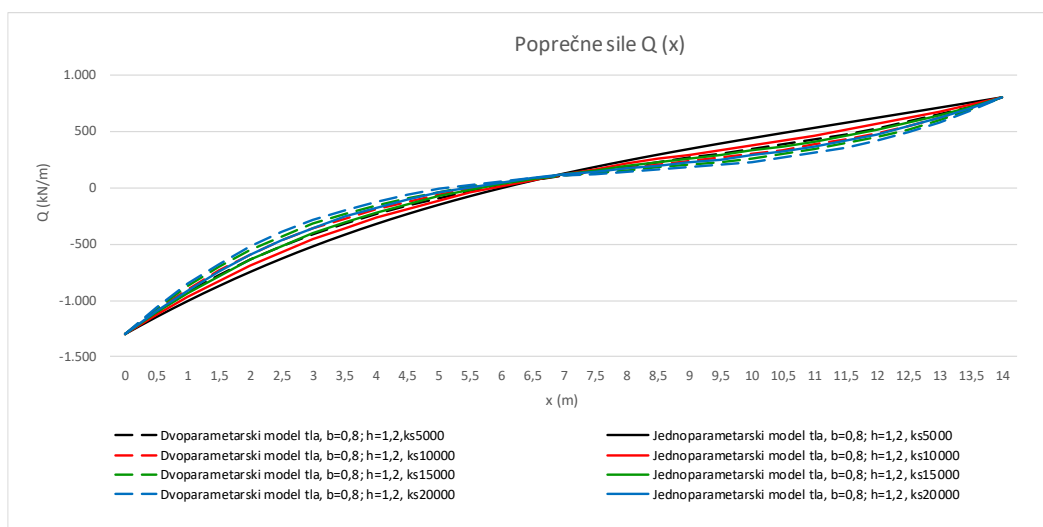
Slika 8.16. Dijagram momenata savijanja

Na dijagramu momenata savijanja, slika 8.16., vidljivo je da na temeljnim nosačima, istih dimenzija, najveći moment savijanja ima temeljni nosač koji se nalazi na tlu sa najmanjim koeficijentom reakcije podloge. Također, u tom slučaju je i međusobna razlika rezultata proračuna, dobivenih jednoparametarskim modelom tla i dvoparametarskim modelom tla, najveća.



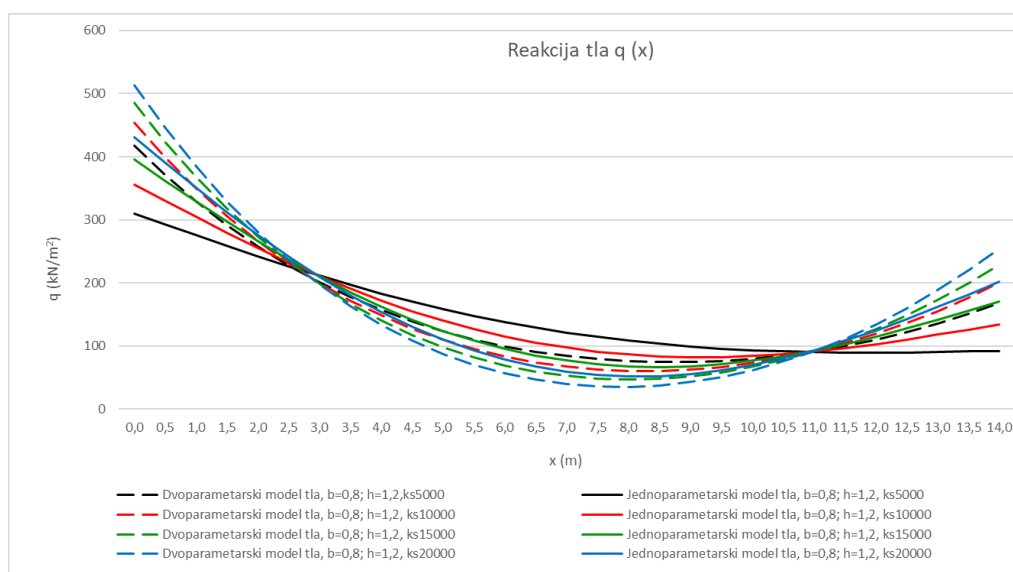
Slika 8.17. Odnos koeficijenta reakcije tla i potrebne površine armature

Promjenom vrijednosti koeficijenta reakcije podloge na veću vrijednost, momenti savijanja u temeljnom nosaču se smanjuju. S obzirom da temeljni nosač dimenzioniramo na temelju maksimalnog momenta savijanja, zaključujemo da porastom koeficijenta reakcije tla opada količina armature u nosaču. Na slici 8.17. prikazan je omjer koeficijenta reakcije tla i površine armature za temeljni nosač širine  $B=0,8\text{m}$  i visine  $h=1,2\text{ m}$  koji je opterećen koncentriranim silama  $P_1=1300\text{ kN}$  i  $P_2=800\text{ kN}$  na krajevima nosača.



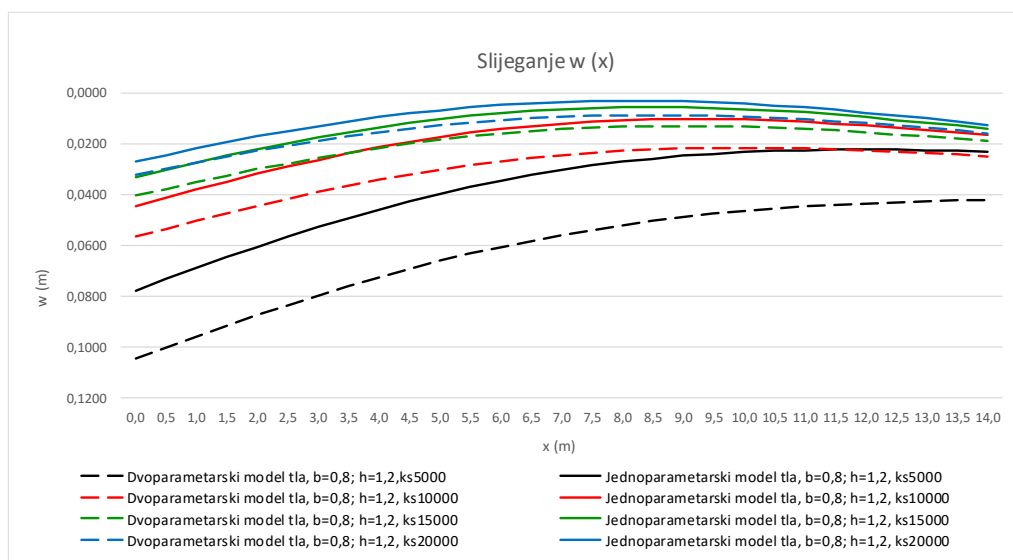
Slika 8.18. Dijagram poprečnih sila

Kod temeljnog nosača na tlu manjeg koeficijenta reakcije podloge promjena poprečne sile duž nosača linearnije se mijenja nego kod nosača na tlu sa većim koeficijentom reakcije podloge.



Slika 8.19. Dijagram reakcije tla

Na dijagramu reakcije tla vidljivo je da se kod temeljnog nosača koji leži na tlu sa većim koeficijentom reakcije tla, reakcije veće na krajevima nosača, dakle na mjestima gdje djeluju sile. Na tlu sa manjim koeficijentom reakcije tla ista se ravnomjernije raspoređuje ispod cijele duljine nosača.



Slika 8.20. Dijagram slijeganja

Slijeganja su veća kod tla sa manjim koeficijentom reakcije tla, što je vidljivo na slici 8.20. Također, relativna razlika u rezultatima između jednoparametarskog modela tla i dvoparametarskog modela tla veća je kod tla sa manjim koeficijentom reakcije tla, dok se povećanjem koeficijenta reakcije podloge međusobna razlika u rezultatima smanjuje.

## 9. ZAKLJUČAK

Svaku gredu na elastičnoj podlozi možemo promatrati kao temeljni nosač ili kao temeljne trake, koji su tipični oblici plitkog temeljenja. Elastičnu podlogu promatramo kao tlo koje pokazuje određene elastične osobine. Kako je poznato da prirodno tlo, po svojem karakteru, odstupa od odabranog idealiziranog modela (medij homogenih, izotropnih i linearno elastičnih osobina) tako će naši dobiveni rezultati biti rezultati za idealizirano tlo, a ne realno tlo.

Proračunom analitičkim metodama poprečno opterećenog nosača na tlu može se jednostavno i brzo doći do rješenja u inženjerskoj praktičnoj primjeni, ali uz pažnju kako odabrati ulazne parametre. Analitičke metode se često i izbjegavaju zbog definicije ulaznih parametara. U literaturi postoji više načina kako odabrati ulazne parametre za analitičke metode. U ovom radu, kod proračuna poprečno opterećenog nosača na tlu dat je naglasak na odabir parametara  $k_s$ , za jednoparametarski model tla, te parametara  $k_s$  i  $N$  za dvoparametarski model tla, kao i usporedba rezultata analitičkih metoda sa rezultatima dobivenim pomoću računalnog programa Tower i GEO5 „Greda“. Za izračune sa računalnim programima također je korišten jedan parametar tla, a to je  $k_s$ . Kod takvih proračuna se stišljivo tlo zamjenjuje sustavom elastičnih opruga, koje se deformiraju samo ispod opterećenog dijela temeljnog nosača. Ovakav model tla ne zadovoljava u potpunosti zbog toga što se deformacije kod realnog tla šire i izvan opterećenog dijela. Taj se nedostatak pokušava riješiti uvođenjem dvoparametarskog modela tla.

Navedene analitičke metode se ipak jako često koriste jer su analitička rješenja diferencijalnih jednadžbi relativno jednostavna, a dobiveni rezultati realniji od rezultata dobivenih uz pretpostavku linearne raspodjele reakcije tla ispod temeljnog nosača.

Kod provedbe svih proračuna i dimenzioniranja potrebno je zadovoljiti neke osnovne zahtjeve točnosti kao što su:

- numerička točnost proračuna,
- točnost (realnost) odabranog modela,
- točnost ulaznih podataka.

Naposljetku najbitnije je da unatoč postupku i odabranom modelu dimenzije konstrukcije zadovoljavaju sigurnosnim i ekonomskim zahtjevima.

Analizom dobivenih rezultata različitim načinima proračuna dolazimo do zaključka da su rezultati dobiveni analitičkom metodom izračuna jednoparametarskog i dvoparametarskog modela tla (kod kojeg smo parametar  $N$  određivali na dva načina), te rezultati dobiveni računalnim

programom GEO5 „Greda“ i rezultati dobiveni numeričkom metodom konačnih elemenata u računalnom programu Tower, iznenađujuće slični. Razlog tome je taj što smo za ulazne parametre proračuna u računalnim programima također koristili jedan parametar, tj. koeficijent reakcije podloge  $k_s$ .

Momenti savijanja, kod proračuna provedenog jednoparametarskim modelom tla te kod proračuna provedenog u računalnim programima Tower i GEO5 „Greda“, su nešto veći nego kod proračuna provedenog sa dvoparametarskim modelom tla, dok su reakcija tla i slijeganje manji.

Proračun proveden dvoparametarskim modelom tla, u kojem smo parametar N izračunali prema formuli za lančanicu, daje nam najmanje momente savijanja u temeljnom nosaču ali nam istovremeno daje i najveća slijeganja temeljnog nosača i najveće reakcije tla. Stoga je kod primjene rezultata proračuna, kod dimenzioniranja temeljnih nosača, u obzir potrebno uzeti osim maksimalnih momenata i maksimalno dozvoljeno slijeganje i nosivost tla, kako bi temeljni nosači zadovoljili uvjete nosivosti koji su navedeni u poglavlju 2.1. Također, u obzir je potrebno uzeti i debljinu stišljivog sloja ispod temeljnog nosača, koja također ima utjecaj na dobivene rezultate proračuna (poglavlje 8.2.). Kod tla slabije nosivosti potrebno je izvršiti poboljšanje nosivosti tla jer povećanjem koeficijenta reakcije tla smanjujemo momente savijanja temeljnog nosača, a samim time smanjujemo i potrebnu armaturu u temeljnom nosaču (poglavlje 8.4.).

U tablici 9.1. prikazane su maksimalne vrijednosti momenta savijanja i slijeganja, dobivene različitim načinima proračuna, za temeljni nosač širine  $B=1,0\text{m}$ , visine  $h=0,8\text{m}$  i duljine  $L=14,00\text{m}$ , koji leži na stišljivom sloju tla debljine  $H=10,00\text{m}$ . Temeljni nosač opterećen je silama na krajevima nosača i to  $P_1=1300\text{kN}$  i  $P_2=800\text{kN}$ .

Tablica 9.1. Usporedba maksimalnih vrijednosti momenata i slijeganja dobivenih različitim metodama proračuna

Metoda proračuna	M – maksimalni moment [kNm]	w- maksimalno slijeganje [mm]	
		Lijevi kraj nosača	Desni kraj nosača
Jednoparametarski model tla	1903,83	36,34	21,05
Dvoparametarski model tla – N formula iz literature	1856,72	37,85	21,86
Dvoparametarski model tla – N sila u lančanicu	1795,59	39,94	23,00
TOWER 8.0 Demo	1889,80	36,31	21,02
GEO5 – „Greda“	1907,16	36,40	21,05

Iz tabličnog prikaza dobivenih maksimalnih vrijednosti (tablica 9.1.) vidljivo je da su vrijednosti maksimalnih momenata i maksimalnih slijeganja približno jednaka, te zaključujemo da odabirom bilo koje metode proračuna dobivamo približno jednake rezultate.

Od inženjera se traži da, kod proračuna temeljnih nosača, odabere metodu koji će dati najrealnije rezultate za njegovu građevinu.

U Varaždinu \_\_\_\_\_

Student:  
Ivica Horvat

**Sveučilište  
Sjever**

**IZJAVA O AUTORSTVU  
I  
SUGLASNOST ZA JAVNU OBJAVU**

Završni/diplomski rad isključivo je autorsko djelo studenta koji je isti izradio te student odgovara za istinitost, izvornost i ispravnost teksta rada. U radu se ne smiju koristiti dijelovi tuđih radova (knjiga, članaka, doktorskih disertacija, magistarskih radova, izvora s interneta, i drugih izvora) bez navođenja izvora i autora navedenih radova. Svi dijelovi tuđih radova moraju biti pravilno navedeni i citirani. Dijelovi tuđih radova koji nisu pravilno citirani, smatraju se plagijatom, odnosno nezakonitim prisvajanjem tuđeg znanstvenog ili stručnoga rada. Sukladno navedenom studenti su dužni potpisati izjavu o autorstvu rada.

Ja, Ivica Horvat (ime i prezime) pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor/ica završnog/diplomskog (obrisati nepotrebno) rada pod naslovom Prilog analizi proračuna sav. tem. nosača pop. opterećenih (upisati naslov) te da u navedenom radu nisu na nedozvoljeni način (bez pravilnog citiranja) korišteni dijelovi tuđih radova.

Student/ica:  
(upisati ime i prezime)  
Ivica Horvat  
(vlastoručni potpis)

Sukladno Zakonu o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju završne/diplomske radove sveučilišta su dužna trajno objaviti na javnoj internetskoj bazi sveučilišne knjižnice u sastavu sveučilišta te kopirati u javnu internetsku bazu završnih/diplomskih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice. Završni radovi istovrsnih umjetničkih studija koji se realiziraju kroz umjetnička ostvarenja objavljuju se na odgovarajući način.

Ja, Ivica Horvat (ime i prezime) neopozivo izjavljujem da sam suglasan/na s javnom objavom završnog/diplomskog (obrisati nepotrebno) rada pod naslovom Prilog analizi proračuna sav. tem. nosača pop. opterećenih (upisati naslov) čiji sam autor/ica.

Student/ica:  
(upisati ime i prezime)  
Ivica Horvat  
(vlastoručni potpis)

## Literatura

1. Teodoru, I.B. (2009): „Beams on Elastic Foundation. the Simplified Continuum Approach“, Polytechnic Institute of Jassy, Jassy
2. Kerr, A.D. (1965): „Continuity in Foundation Models and Related Problems“, U.S. Army Material Command Cold Regions Resercg & Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire
3. Tanahashi, T. (2004): “Formulas for an Infinitely Long Bernoulli-Euler Beam on The Pasternak Model“, Soils and Foundations, Vol.44, No.5, 109-118, Oct.2004
4. Lakušić, S. (2005): „Željeznice“, Građevinski fakultet, Zagreb
5. Marušić, D. (2009): „Gornji ustroj željeznica“, Građevinski fakultet sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2009
6. Šimić, V. (2002): „Otpornost materijala I“-2. izdanje, Školska knjiga Zagreb
7. Šimić, V. (1995): „Otpornost materijala II“-1. izdanje, Školska knjiga Zagreb
8. Soldo, B. (2019): Nastavni materijali sa predavanja iz kolegija Temeljenje na Diplomskom studiju graditeljstva Sveučilište Sjever, Varaždin
9. Verić, F. (2000): „Savitljive temeljne konstrukcije“, Građevinski fakultet, Zagreb
10. Terzaghi, K. (1972): „Teorijska mehanika tla“, Naučna knjiga, Beograd
11. Nonveiller, E. (1979): „Mehanika tla i temeljenje građevina“, Školska knjiga Zagreb, Zagreb
12. Selimović, M. (2000): „Mehanika tla i temeljenje I dio“, Univerzitet „Đemal Bjedić“-Mostar, Građevinski fakultet, Mostar
13. Stević, M. (1991): „Mahanika tla i stijena“, Rudarsko-geološki fakultet Tuzla, Tuzla
14. Straughan, W. T. (1990): „Analysis of Plates on Elastic Foundation“, Texas Tech University, Lubbock
15. Selimović, M. (2000): „Mehanika tla i temeljenje II dio“, Građevinski fakultet Univerziteta „Đemal Bjedić“-Mostar
16. Roje-Bonacci, T. (2008): „Duboko temeljenje i poboljšanje temeljnog tla“, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-ArHITEKTONSKI fakultet, Split
17. Soldo, B., Presečki, P., Kuhta, M. (2016): „Enclosure to the Analysis of Flexion of Transverse Weighted Constructions on the Ground,“ Civil Engineering Science and Practice, 6th International Conference, Žabljak



18. Soldo, B., Orešković, M., Aniskin, A. (2010): „Contribution to Knowledge of Koefficient of Reaction Substrates“ // Proceedings of 3rd Symposium of Macedonian Association of Geotechnics, Skopje
19. Sorić, J.(2004): „Metoda konačnih elemenata“, Golden marketing-tehnička knjiga, Zagreb
20. Prskalo, M., Akmadžić, V., Vrdoljak, A., (2019): „Utjecaj modeliranja koeficijenta reakcije tla na jednostavni 3D okvir izložen horizontalnom simetričnom opterećenju“, e-Zbornik: Elektronički zbornik radova Građevinskog fakulteta Mostar, Broj 18, 35-43, Prosinac 2019
21. Santrač, P.(2012): „Fundiranje-predavanje i vježbe – Interakcija konstrukcije i tla“, Građevinski fakultet Subotica, Subotica
22. Prskalo, M., Vrdoljak, A., (2016): „Analiza slijeganja temeljnih ploča metodom konačnih razlika“, e-Zbornik: Elektronički zbornik radova Građevinskog fakulteta Mostar, Broj 12, 68-75, Prosinac 2016
23. Kuhta, M. (2019): Nastavni materijali sa predavanja iz kolegija Modeliranje i proračun konstrukcija na Diplomskom studiju graditeljstva Sveučilište Sjever, Varaždin
24. Radimpex TOWER 8 Demo: Računalni softver za statičku i dinamičku analizu konstrukcija
25. GEO5 2020 Demo: Softverski paket za rješavanje geotehničkih problema - Program „Greda“ za analizu temeljne grede na tlu