

# Numerička simulacija krila s korigiranim napadnim rubom

---

Sitar, Kristina

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University North / Sveučilište Sjever**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:122:321824>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-31**

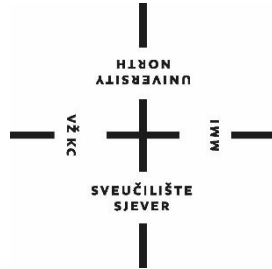


Repository / Repozitorij:

[University North Digital Repository](#)



**SVEUČILIŠTE SJEVER  
SVEUČILIŠNI CENTAR VARAŽDIN**



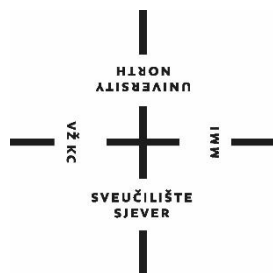
DIPLOMSKI RAD br. 039/STR/2021

**NUMERIČKA SIMULACIJA KRILA S  
KORIGIRANIM NAPADNIM RUBOM**

Kristina Sitar

Varaždin, rujan 2021.

**SVEUČILIŠTE SJEVER**  
**SVEUČILIŠNI CENTAR VARAŽDIN**  
**Diplomski sveučilišni studij Strojtarstvo**



DIPLOMSKI RAD br. 039/STR/2021

**NUMERIČKA SIMULACIJA KRILA S  
KORIGIRANIM NAPADNIM RUBOM**

Student:  
Kristina Sitar, 1384/336D

Mentor:  
Doc. dr. sc. Jasna Leder Horina, mag. ing.

Varaždin, ruján 2021.

# Prijava diplomskog rada

## Definiranje teme diplomskog rada i povjerenstva

ODJEL	Odjel za strojarstvo		
STUDIJ	diplomski sveu ilišni studij Strojarstvo <input type="checkbox"/>		
PRISTURNIK	Kristina Sitar	JMBAG	0336007458
DATUM	12.07.2021.	KOLEGIJ	Numeričko modeliranje
NASLOV RADA	Numerička simulacija krila s korigiranim napadnim rubom		
NASLOV RADA NA ENGL. JEZIKU	Numerical simulation of wing with tubercles		
MENTOR	Jasna Leder Horina	ZVANJE	doc.dr.sc.
ČLANOVI POVJERENSTVA	1. izv. dr.sc. Sanja Šoli - predsjednica povjerenstva		
	2. doc. dr.sc. Jasna Leder Horina - mentor, član		
	3. doc. dr.sc. Matija Buši - član		
	4. izv. dr.sc. Vlado Tropša - zamjena		
	5. _____		

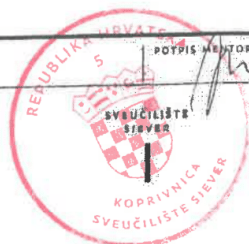
## Zadatak diplomskog rada

BROJ 039/STR/2021

OPIS

U radu je potrebno dati uvid u primjenu korigiranog napadnog ruba te njegov utjecaj na aeroprofil. Također je potrebno objasniti matematički model viskoznog strujanja fluida koji se temelji na Reynoldsovim osrednjenim Navier-Stokesovim jednažbama. Utjecaj korigiranog napadnog ruba na aeroprofil je potrebno ispitati putem numeričke simulacije turbulentnog strujanja oko aeroprofila uz pomoć programskog paketa ANSYS Fluent. Potrebne parametre modela dogovoriti s mentorom. U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

ZADATAK URUČEN 13.7.2021.



POTPIS MENTORA



IZJAVA O AUTORSTVU  
I  
SUGLASNOST ZA JAVNU OBJAVU

Završni/diplomski rad isključivo je autorsko djelo studenta koji je isti izradio te student odgovara za istinitost, izvornost i ispravnost teksta rada. U radu se ne smiju koristiti dijelovi tuđih radova (knjiga, članaka, doktorskih disertacija, magistarskih radova, izvora s interneta, i drugih izvora) bez navođenja izvora i autora navedenih radova. Svi dijelovi tuđih radova moraju biti pravilno navedeni i citirani. Dijelovi tuđih radova koji nisu pravilno citirani, smatraju se plagijatom, odnosno nezakonitim prisvajanjem tuđeg znanstvenog ili stručnoga rada. Sukladno navedenom studenti su dužni potpisati izjavu o autorstvu rada.

Ja, Kristina Sitar pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključiva autorica diplomskog rada pod naslovom Numerička simulacija krila s korigiranim napadnim rubom te da u navedenom radu nisu na nedozvoljeni način (bez pravilnog citiranja) korišteni dijelovi tuđih radova.

Student/ica:  
*Kristina Sitar*

*Kristina Sitar*  
(vlastoručni potpis)

Sukladno Zakonu o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju završne/diplomske radove sveučilišta su dužna trajno objaviti na javnoj internetskoj bazi sveučilišne knjižnice u sastavu sveučilišta te kopirati u javnu internetsku bazu završnih/diplomskih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice. Završni radovi istovrsnih umjetničkih studija koji se realiziraju kroz umjetnička ostvarenja objavljuju se na odgovarajući način.

Ja, Kristina Sitar neopozivo izjavljujem da sam suglasna s javnom objavom diplomskog rada pod naslovom Numerička simulacija krila s korigiranim napadnim rubom čija sam autorica.

Student/ica:  
*Kristina Sitar*

*Kristina Sitar*  
(vlastoručni potpis)

## **PREDGOVOR**

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Veliko hvala mentorici doc. dr. sc. Jasni Leder Horini na savjetima, stručnoj pomoći i motivaciji za vrijeme pisanja rada.

Zahvaljujem se doc. dr. sc. Tihomiru Mihaliću na prenesenom znanju i korisnim savjetima tijekom izrade rada.

Kristina Sitar

# SADRŽAJ

POPIS OZNAKA .....	i
POPIS SLIKA .....	iii
POPIS TABLICA.....	v
SAŽETAK.....	1
SUMMARY .....	2
1. UVOD .....	3
2. TEORIJSKI PRISTUP MEHANICI FLUIDA .....	6
2.1. Koraci numeričkog rješenja.....	7
2.2. Numeričke metode .....	8
3. MATEMATIČKI MODEL .....	10
4. RAČUNALNA DINAMIKA FLUIDA .....	12
4.1. Konzervativni zakoni gibanja fluida .....	15
4.2. Zakon očuvanja mase (jednadžba kontinuiteta) .....	16
4.3. Zakon očuvanja količine gibanja (jednadžba gibanja fluida).....	17
5. STRUJANJE FLUIDA .....	18
5.1. Turbulencija .....	19
5.1.1. Statističko opisivanje turbulencije.....	22
5.1.2. Opći oblik zakona očuvanja za slučaj nestlačivog turbulentnog strujanja .....	24
5.1.3. Vremenski osrednjene jednadžbe za slučaj nestlačivog strujanja .....	25
6. MODEL TURBULENCIJE .....	26
6.1. Modeliranje koeficijenta turbulentne viskoznosti .....	27
6.1.1. Modeliranje graničnog sloja .....	27
7. KORIGIRANI NAPADNI RUB.....	30
8. NUMERIČKI PRORAČUN .....	32
8.1. Modeliranje geometrije aeroprofila .....	32
8.2. Diskretizacija domene i rubni uvjeti.....	38
8.3. Simulacija strujanja u Ansys Fluent paketu .....	43
8.4. Raspored tlaka i brzina .....	45
8.5. Prikaz rezultata CFD simulacije .....	57
9. ZAKLJUČAK .....	60
10. LITERATURA.....	62

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća
$\Gamma$	[kg/ms]	koeficijent difuzije
$\omega$	[s <sup>-1</sup> ]	specifična brzina disipacije
$Re$	[-]	Reynoldsov broj
$\mu_t$	[kg/ms]	turbulentna viskoznost
$\varphi$	[-]	polje fizikalne veličine
$v_t$	[m/s]	karakteristična brzina turbulentnih pulsacija
$V$	[m <sup>3</sup> ]	volumen
$t$	[s]	vrijeme
$\sigma_i$	[N/m <sup>2</sup> ]	vektor naprezanja
$\sigma_{ji}$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor naprezanja
$T_0$	[s]	vremenski trenutak
$\bar{k}$	[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	kinetička energija turbulencije
$v_i$	[m/s]	komponenta vektora brzine strujanja
$f_i$	[N/kg]	komponenta vektora specifične masene sile
$\mu$	[Pas]	dinamička viskoznost
$Re k_r$	[-]	kritični Reynoldsov broj
$S$	[m <sup>2</sup> ]	površina
$v_i$	[m/s]	brzina u smjeru i-te osi
$p$	[N/m <sup>2</sup> ]	tlak
$f$	[Hz]	frekvencija
$v_\infty$	[m/s]	brzina neporemećene struje
$x_{k_r}$	[m]	koordinata kritičnog presjeka
$n_j$	[-]	jedinični vektor normale
$3D$	[-]	trodimenzionalno
$2D$	[-]	dvodimenzionalno
$C_L$	[-]	koeficijent uzgona
$\alpha$	°	napadni kut
$C_D$	[-]	koeficijent otpora



<i>m</i>	[mm]	vrijednost amplitude
<i>n</i>	[mm]	vrijednost valne duljine
<i>t</i>	[mm]	raspon aeroprofila

## POPIS SLIKA

Slika 1. Prvi let braće Wright [18] .....	3
Slika 2. Primjer biomimetike [16].....	4
Slika 3. Prototip zrakoplova [14] .....	5
Slika 4. Primjer primjene korigiranog napadnog ruba [15] .....	5
Slika 5. Uvid u rješavanje problema u mehanici fluida [1].....	6
Slika 6. Utjecaj elementa karoserije [13] .....	7
Slika 7 . Postupak rješavanja problema primjenom numeričkog pristupa [1] .....	7
Slika 8 . Numeričke metode [1] .....	8
Slika 9. Fizikalni model [8].....	10
Slika 10. Aerodinamika vozila [4] .....	12
Slika 11. Hidrodinamika broda [4].....	13
Slika 12. Strujanje unutar rotacijskih dijelova [5].....	13
Slika 13. Strujanje krvi kroz arterije i vene [10] .....	13
Slika 14. Aerodinamika letjelica [11] .....	14
Slika 15. Shema organizacije [1].....	15
Slika 16. Materijalni volumen [3] .....	16
Slika 17. Strujanje fluida kroz staklenu cijev [6] .....	18
Slika 18. Laminarno i turbulentno strujanje [7] .....	19
Slika 19. Shematski prikaz graničnog sloja uz ravnu ploču [8] .....	20
Slika 20. Strujanje fluida (laminarno, tranzijentno i razvijeno turbulentno) [9].....	21
Slika 21. Pristupi modeliranja jednadžbi [19].....	21
Slika 22. Tok energije turbulentnog strujanja [19] .....	22
Slika 23. Uprosječene veličine .....	23
Slika 24. Tensor Reynoldsovih naprezanja [8] .....	25
Slika 25. Prikaz graničnog sloja u turbulentnom strujanju [8].....	28
Slika 26. Turbulentni granični sloj [8] .....	28
Slika 27. Peraje grbavog kita [21].....	30
Slika 28. Rezultati koeficijenta uzgona i otpora uspoređeni s modelom peraje bez korigiranog napadnog ruba [16].....	31
Slika 29. Protok usmjeren kroz kanale peraje [16] .....	31
Slika 30. Koordinate aeroprofila [20] .....	32
Slika 31. Točke gornje i donje krivulje aeroprofila [20].....	33
Slika 32. 2D prikaz aeroprofila u Ansys Design Modeler-u. [Ansys] .....	33
Slika 33. Aeroprofil bez korigiranog napadnog ruba .....	34
Slika 34. Konstrukcija aeroprofila s korigiranim napadnim rubom .....	34
Slika 35. Aeroprofil s korigiranim napadnim rubom na ivici .....	35
Slika 36. Korigirani napadni rub preko cijelog aeroprofila .....	35
Slika 37. Duljina aeroprofila (c), valna duljina (b), amplituda (a), duljina tetive (d) .....	37
Slika 38. Dimenzije domene .....	38
Slika 39. Domena strujanja fluida .....	39
Slika 40. Mreža kontrolnih volumena u području proračuna.....	39
Slika 41. Prikaz gustoće mreže domene i modela aeroprofila .....	40
Slika 42. Broj čvorova i broj elemenata .....	41
Slika 43. Ulaz i izlaz fluida iz domene.....	42
Slika 44. Brzina strujanja fluida .....	42
Slika 45. Statički tlak .....	42

Slika 46. Odabir fluida .....	43
Slika 47. Odabir modela turbulencije.....	45
Slika 48. Polje tlaka aeroprofila bez korigiranog napadnog ruba .....	47
Slika 49. Distribucija brzine aeroprofila bez korigiranog napadnog ruba .....	48
Slika 50. Polje tlaka aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici.....	49
Slika 51. Distribucija brzine aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici.....	49
Slika 52. Polje tlaka aeroprofila s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila .....	50
Slika 53. Distribucija brzine aeroprofila s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila .	50
Slika 54. Prikaz strujnica krila s korigiranim napadnim rubom.....	51
Slika 55. Prikaz strujnica običnog krila .....	52
Slika 56. Prikaz raspodjele statičkog tlaka krila s korigiranim napadnim rubom.....	52
Slika 57. Prikaz raspodjele statičkog tlaka običnog krila.....	53
Slika 58. Polje tlaka aeroprofila bez korigiranog napadnog ruba .....	53
Slika 59. Distribucija brzine aeroprofila bez korigiranog napadnog ruba .....	54
Slika 60. Polje tlaka aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici.....	55
Slika 61. Distribucija brzine aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici.....	55
Slika 62. Polje tlaka aeroprofila s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila .....	56
Slika 63. Distribucija brzine aeroprofila s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila .	57
Slika 64 . Ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu .....	57
Slika 65 . Ovisnost koeficijenta otpora o napadnom kutu.....	58
Slika 66. Prikaz tlaka ovisno o poziciji .....	59
Slika 67. Prikaz statičkog tlaka aeroprofila.....	59

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Konstrukcijske dimenzije aeroprofila .....	36
Tablica 2. Prikaz dimenzija domene .....	38
Tablica 3. Rubni uvjeti .....	41
Tablica 4. Prikaz uzgona i otpora (napadni kut $0^\circ$ ).....	46
Tablica 5. Prikaz uzgona i otpora (napadni kut $14^\circ$ ).....	51

## **SAŽETAK**

U ovom diplomskom radu izvršena je numerička simulacija turbulentnog strujanja oko krila aviona pomoću programskog paketa ANSYS Fluent 2020R2. Cilj ovog rada je dati uvid u primjenu napadnog ruba te njegov utjecaj na aeroprofil. Objasnjen je matematički model viskoznog strujanja fluida, koji se temelji na Reynoldsovim osrednjenim Navier-Stokesovim jednadžbama (RANS). Za potrebe numeričke simulacije izrađena su tri modela aeroprofila. Prikazana je raspodjela polja brzina i polja tlakova, kao i aerodinamički koeficijenti uzgona i otpora.

Ključne riječi: turbulentno strujanje, aeroprofil, numerička simulacija, uzgon, otpor, RANS

## **SUMMARY**

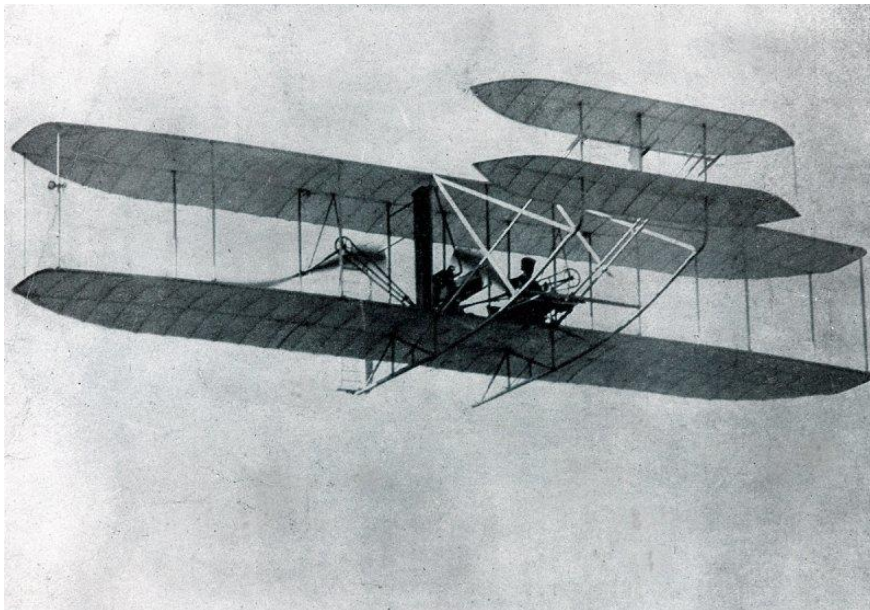
In this thesis a numerical simulation of turbulent flow was performed around the airfoil using ANSYS Fluent 2020R2 software package. The main goal of this thesis is to give insights into the application of tubercles on the airfoil. Description of mathematical model of viscous fluid flow is given, which is based on Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations. Three models of airfoil were created for the purpose of numerical simulation. Distribution of velocity and pressure fields are shown, as well as the aerodynamic lift and drag coefficient.

Key words: turbulent flow, airfoil, numerical simulation, lift, drag, RANS

## 1. UVOD

Aerodinamika se kao znanost proučavala i usavršavala još od davnih vremena. Razvoj zrakoplova započeo je 1783. prvim letom balonom braće Montgolfier u Francuskoj. Balon se pokazao nepraktičnim prijevoznim sredstvom zbog svoje neupravljivosti. Najveći doprinos u razvoju aviona dao je Nijemac Otto Lilienthal koji je svojim letovima dao veliki doprinos razvoju mehanike leta te konstrukcije zrakoplova. Drugi svjetski rat je bio veliki pokretač u razvoju avijacije gdje su se pojavila nova tehnološka rješenja i razvoji poput mlaznog motora, helikoptera i raketa. [18]

Još od prvog leta braće Wright aerodinamika ima vrlo važnu ulogu kod konstruiranja zrakoplova. Budući da je krilo jedna od najvažnijih dijelova aviona potrebno je voditi računa o njegovim aerodinamičkim performansama. [18]



Slika 1. Prvi let braće Wright [18]

Za rješavanje problema raznih tehničkih sustava, ljudi su nerijetko znali tražiti nadahnuće u prirodi. Takav pristup rješavanju problema naziva se biomimetika, a označava oponašanje sustava i dijelova prirode u svrhu rješavanja složenih zadataka. Takvim pristupom biti će moguće rješavati kompleksnije probleme i u području aerodinamike čime će se poboljšati performanse zrakoplova, a sukladno tome smanjit će se i potrošnja goriva. [16]



Slika 2. Primjer biomimetike [16]

Pomorski znanstvenici koji su proučavali grbave kitove uočili su neke prednosti korigiranog napadnog ruba koji se nalaze na peraji kitova.

Kada napadni kut peraje ili krila aviona postane previše strm, rezultira slomom uzgona. U avijaciji slom uzgona znači da nema dovoljno zraka koji putuje po površini krila te izaziva povećanje otpora i smanjenje uzgona te izaziva potencijalno opasne situacije koje mogu rezultirati padom aviona.

Tim istraživača s Harvarda su pokazali kako korigirani napadni rub na peraji kita mijenja distribuciju tlaka. Kako različiti dijelovi peraje gube uzgon kod različitih napadnih kuteva, nagli slom uzgona je lakše izbjeći. Taj efekt daje kitu više slobode kod većih napadnih kuteva. [22] Korigirani napadni rub je također pronašao primjenu kod vjetroturbina. Prototip vjetroturbine je pokazao da odgađanje sloma uzgona povećava performanse vjetroturbine kod brzine vjetra od 27 km/h i omogućuje vjetroturbini da uhvati više energije kod nižih brzina vjetra. Za primjer, vjetroturbine generiraju istu količinu energije kod brzine vjetra od 16 km/h kao i kod konvencionalnih turbina kod 27 km/h. Primjena korigiranog napadnog ruba na lopatici vjetroturbine rezultira smanjenjem buke, povećanjem stabilnosti i omogućuje stvaranje više energije iz vjetra. [22]

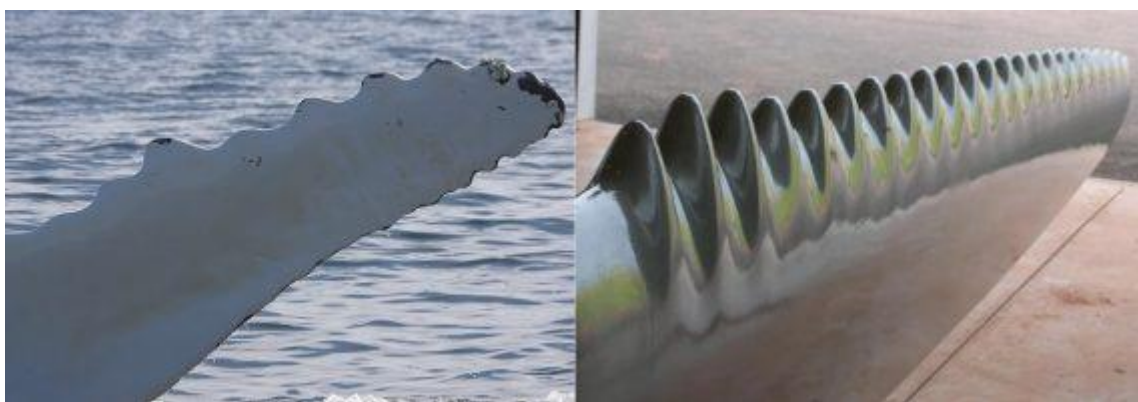
Korigirani napadni rub bio bi primjenjiv i kod trkaćih automobila, čime bi se poboljšale karakteristike ubrzanja kao i stabilnost automobila. [25]



Također borbeni zrakoplovi mogli bi biti dizajnirani da budu okretniji bez naglog sloma uzgona.  
[22]

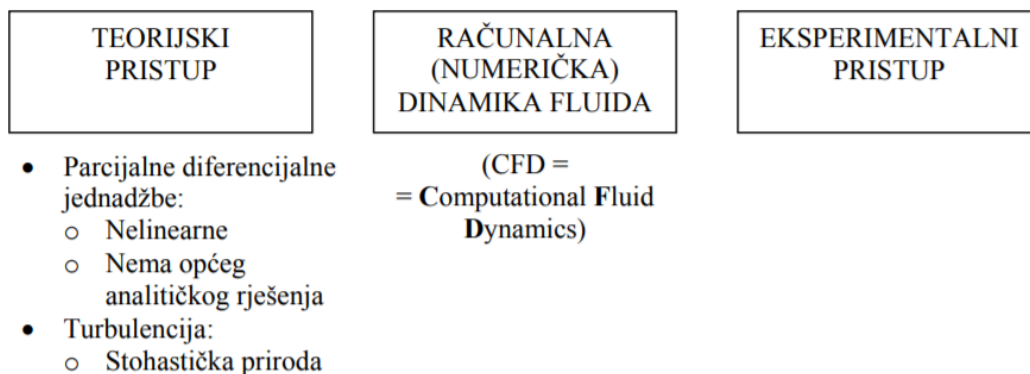


Slika 3. Prototip zrakoplova [14]



Slika 4. Primjer primjene korigiranog napadnog ruba [15]

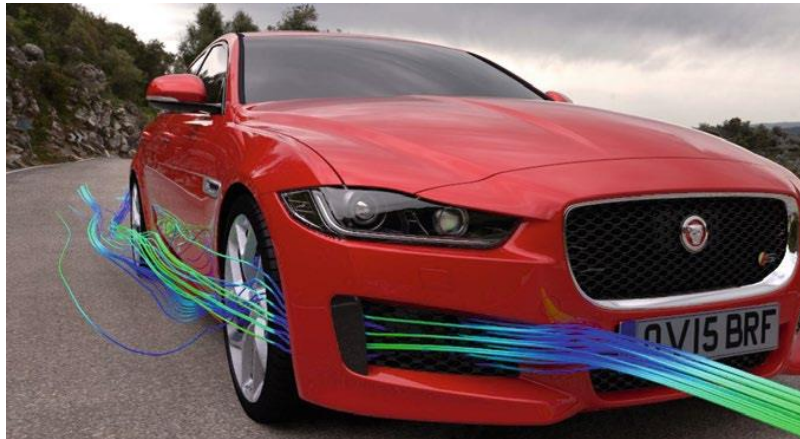
## 2. TEORIJSKI PRISTUP MEHANICI FLUIDA



Slika 5. Uvid u rješavanje problema u mehanici fluida [1]

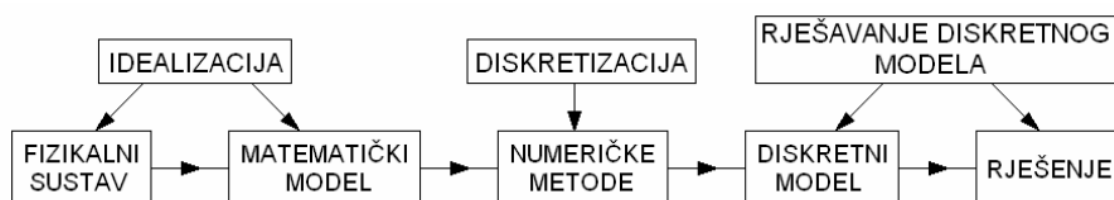
Mehanika fluida je teorijsko eksperimentalna znanost. Teorijski pristup se temelji na analitičkom rješavanju matematičkih modela strujanja fluida. Kompletan uvid u fiziku nekog problema daje analitičko rješenje, a jednom određeno analitičko rješenje je pogodno za analizu utjecaja pojedinih parametara u matematičkom modelu. Većina problema vezana za strujanje fluida opisana je nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama, koje nemaju opće analitičko rješenje. To posebno vrijedi za turbulentno strujanje, koje se zbog stohastičke prirode toga strujanja niti ne može opisati analitički. Npr. analitičko rješenje Navier-Stokesovih jednačbi moguće je odrediti samo za slučaj laminarnog strujanja i to u vrlo ograničenom broju slučajeva. To su osnovni razlozi što su se problemi mehanike fluida u prošlosti uglavnom rješavali uz pomoć eksperimentalnog pristupa. Eksperimentalnim pristupom dobiva se ograničeni broj informacija o nekoj pojavi (bilo integralnih veličina poput protoka, sile, momenta, snage i sl. ili podatke o brzini, tlaku, temperaturi i sl. u konačnom broju točaka područja strujanja). Razvojem računala stvorili su se uvjeti za numeričko rješavanje matematičkih modela koji opisuju strujanje fluida, čime se počinje razvijati treća grana mehanike fluida: računalna dinamika fluida. [8]

Danas ne postoje egzaktni matematički dokazi o jedinstvenosti i egzistenciji rješenja Navier-Stokesovih jednačbi, niti postoji teorija koja bi egzaktno govorila o točnosti rješenja nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Pri simulaciji složenijih problema može se dogoditi da numerički postupak (uz određene postavke parametara numeričke simulacije) ne konvergira, te inženjer koji vrši simulaciju mora imati određena iskustva, slično kao što se traži od eksperimentatora. [8]



Slika 6. Utjecaj elementa karoserije [13]

## 2.1. Koraci numeričkog rješenja



Slika 7 . Postupak rješavanja problema primjenom numeričkog pristupa [1]

**MATEMATIČKI MODEL** - skup diferencijalnih ili integralno – diferencijalnih jednađbi i konstitutivnih relacija, a koje zajedno s početnim i rubnim uvjetima čine zatvoren skup jednađbi kojima se opisuje neki stvarni fizikalni problem. Zatvoreni skup jednađbi znači da broj jednađbi mora biti jednak broju nepoznanica. [1]

**METODA DISKRETIZACIJE** - prostorna ili diskretizacija u vremenu.

Diskretizacija je osnovni princip svakog numeričkog pristupa. Diskretizacijom aproksimiramo sustav diferencijalnih jednađbi sustavom algebarskih jednađbi. Sustav algebarskih jednađbi se efikasno izračunava na računalu. Kod prostorne diskretizacije razmatramo gustoću mreže, a kod vremenske govorimo o veličini vremenskog koraka. [1]

**ODABIR KOORDINATNOG SUSTAVA** - ovisno o problemu koji razmatramo:

- kartezijski
- cilindrični

- polarni. [1]

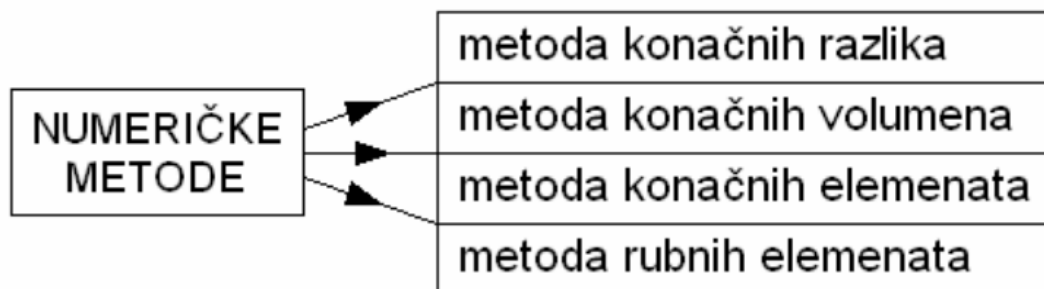
**NUMERIČKA MREŽA** - može biti strukturirana ili nestrukturirana. [1]

**ALGORITAM RJEŠAVANJA** - ovisi o vrsti matematičkog modela, radi li se o stacionarnom ili ne stacionarnom slučaju, je li problem 1D, 2D, ili 3D. Algoritam rješavanja ovisi i o tipu numeričke mreže (strukturirana ili nestrukturirana). [1]

**KRITERIJ TOČNOSTI** - matematički model ima iterativni karakter.

- uslijed nelinearnosti
- uslijed iterativnog rješavanja linearnog sustava [1]

## 2.2. Numeričke metode



Slika 8 . Numeričke metode [1]

### **Metoda konačnih razlika (MKR)**

Metoda konačnih razlika je najstarija diskretizacijska metoda. Pojavila se tijekom 19. stoljeća. Kako je MKR numerička metoda, konkretnu primjenu doživljava pojavom računala. Mreža konačnih razlika sastavljena od diskretnih točaka područja koje se razmatra. U diskretiziranim točkama područja postavljaju se diferencijalne jednačbe. Derivacije se zamjenjuju konačnim razlikama opisanim vrijednostima zavisnih varijabli susjednih čvorova. Dobivene jednačbe su algebarske jednačbe. Izračunate vrijednosti varijabli u čvorovima su rješenja algebarskih jednačbi. Metoda se primjenjuje kod problema mehanike fluida i za vremensku diskretizaciju kod rješavanja ne stacionarnih problema. [1]

### **Metoda konačnih elemenata (MKE)**

Metoda konačni elemenata se primjenjuje od 60-tih godina dvadesetog stoljeća. Kod ove metode razmatrano područje se dijeli na mrežu konačnih elemenata. Za svaki konačni element pretpostavi se rješenje diferencijalne jednačbe. Rješenje diferencijalne jednačbe je u obliku interpolacijskih funkcija i zavisnih varijabli u čvorovima. Čvorovi se obično nalaze duž rubova elemenata. Za svaki konačni element izvodi se diskretizirana jednačba. Skup takvih diskretiziranih jednačbi čine sustav algebarskih jednačbi. Vrijednosti u čvorovima su nepoznanice algebarskih jednačbi. Kod rješavanja problema mehanike čvrstih tijela najčešće se koristi MKE. [1]

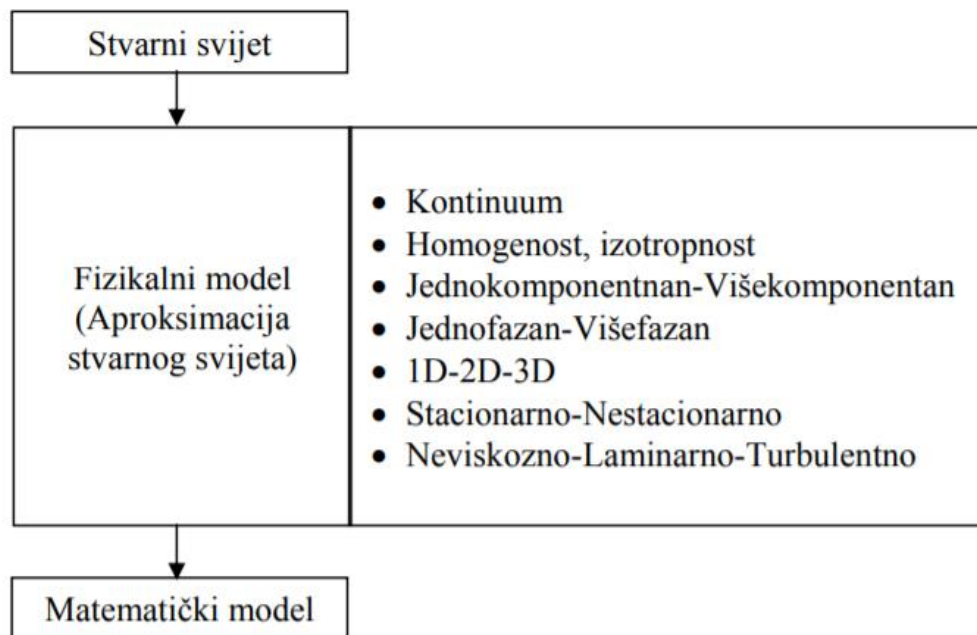
### **Metoda rubnih elemenata (MRE)**

Metoda rubnih elemenata se pojavila 70-tih godina dvadesetog stoljeća. Kod ove metode imamo diskretizaciju ruba, a ne cijelog razmatranog područja. U integralnim jednačbama ne pojavljuje se integriranje po volumenu. Ovdje imamo samo duž ruba interpolaciju zavisne varijable. Čvorovi s nepoznatim vrijednostima nalaze se samo na rubu. MRE ima manji sustav jednačbi, s punim i nesimetričnim matricama. Računanje zavisne varijable u proizvoljnoj točki definiranog područja slijedi nakon računanja rubnih vrijednosti. Metodu rubnih elemenata ne možemo primjenjivati za rješavanje dif. jednačbe ako ne poznajemo njezino osnovno rješenje (težinska funkcija jednaka je osnovnom rješenju). Formulacija metode rubnih elemenata izvodi se primjenom metode težinskog reziduala. Metoda rubnih elemenata ima složeniju formulaciju od metode konačnih elemenata. MRE nije pogodna za nelinearne probleme i složene linearne probleme. Primjenu nalazimo u mehanici loma, kod rubova složene geometrije i kod razmatranja polubeskonačnih područja. [1]

### **Metoda konačnih volumena (MKV)**

Metoda konačnih volumena se primjenjuje od 70-tih godina dvadesetog stoljeća. MKV nastala je iz posebne formulacije MKR. Primjenjuje se kod problematike mehanike fluida; strujanje fluida. Razmatrano područje (domena) dijeli se na konačan broj kontrolnih (konačnih) volumena. Kontrolni volumeni se ne smiju preklapati. Polazi se od integralne forme zakona očuvanja. Za svaki kontrolni volumen postavlja se integralna jednačba. Volumni integrali transformiraju se u površinske integrale. Za svaki kontrolni volumen potrebno je izvesti diskretiziranu (algebarsku) jednačbu. Tako za skup kontrolnih volumena dobijemo skup algebarskih jednačbi. Nepoznata zavisna varijabla odnosi se na središnju točku (ili susjedne točke) kontrolnog volumena. [1]

### 3. MATEMATIČKI MODEL



Slika 9. Fizikalni model [8]

Svaka simulacija se temelji na matematičkom modelu, koji označuje matematički zapis fizikalnog modela. Fizikalni model obuhvaća niz pretpostavki (hipoteza) pri aproksimaciji stvarnog svijeta. Najčešća pretpostavka koja se koristi u opisu strujanja fluida je da je fluid kontinuum. Kontinuum je zamišljena tvar koja bi u potpunosti ispunjavala prostor i zadržavala fizikalna svojstva i za slučaj infinitezimalno malog volumena. Za probleme strujanja u kojima je dimenzija područja strujanja dovoljno velika u odnosu na međumolekularni razmak (točnije put koji molekula prevali između dva sudara) hipoteza kontinuuma je dovoljno dobra za aproksimaciju stvarnog svijeta. No i pored hipoteze kontinuuma, potrebno je uvesti još niz pretpostavki poput homogenosti i izotropnosti fluida. Homogenost podrazumijeva da su fizikalna svojstva ista u svim točkama fluida. Tako ćemo npr. zrak smatrati homogenom smjesom plinova jer je udio pojedinih plinova koji čine zrak jedan te isti u svim točkama fluida. Izotropnost podrazumijeva da su fizikalna svojstva jednaka u svim smjerovima. Tako npr. pretpostavljamo da je toplinska provodnost fluida ista u svim smjerovima, iako npr. neka krutina sastavljena iz slojeva različitih materijala ne mora imati istu toplinsku provodnost u smjeru sloja i poprečno na sloj. Zrak smatramo homogenom smjesom plinova i tretiramo ga kao jednokomponentni fluid, no za slučaj da je npr. koncentracija kisika i dušika različita u različitim točkama, morali bi ga promatrati kao višekomponentni fluid, i modelirati miješanje

tih komponenti. Ako se u strujanju pojavljuje promjena faza (taljenje / skrućivanje ili isparivanje / ukapljivanje) to također treba dodatno modelirati. Prilikom modeliranja stvarnih problema potrebno je voditi računa da se što vjernije opiše problem uz što jednostavniji matematički model. Često puta je moguće zanemariti promjene fizikalnih veličina u nekom od smjerova pa se problem od trodimenzijskog (3D) svodi na ravninski ili osnosimetrični (2D), ili pak za strujanje u cjevovodima, gdje imamo uzdužnu koordinatu puno veću od poprečnih, čak na jednodimenzijsko (1D). Nadalje, strujanje je u stvarnosti uvijek manje ili više nestacionarno (vremenski promjenjivo), a sam korisnik koji modelira strujanje odlučuje je li moguće uvesti pretpostavku o stacionarnom strujanju, koje pojednostavljuje problem.

Strujanje fluida u prirodi je najčešće turbulentno (izrazito nestacionarno strujanje sa slučajnim pulsacijama fizikalnih veličina, pa se polja u turbulentnom strujanju ne mogu opisati analitički), a laminarno strujanje se u prirodi pojavljuje samo pri niskim vrijednostima Reynoldsova broja. Pri problemu optjecanja tijela mogu se pojaviti oba vida strujanja (laminarno u blizini točke zastoja, a u ostatku područja turbulentno).

Modeliranje turbulencije je jedno veliko područje samo za sebe. Danas postoje različite razine pristupa (od direktnog rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi - DNS, preko modeliranja malih pulsacija i direktnog rješavanja velikih - LES (Large Eddy Simulation), do modeliranja svih turbulentnih pulsacija uz pomoć pristupa temeljenom na Reynoldsovom osrednjavanju jednadžbi – RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes)). U klasi RANS modela postoji više razina modela od modela u kojima se rješavaju jednadžbe za turbulentna naprezanja (RSM-Reynolds stress models) do najjednostavnijih modela temeljenih na Boussinesqovoj hipotezi i modeliranju turbulentne viskoznosti. Turbulentna viskoznost se modelira s pomoću dva parametra turbulencije, čija raspodjela može biti definirana s pomoću diferencijalne ili algebarske jednadžbe. Najpoznatiji modeli s dvije jednadžbe su  $k - \epsilon$  i  $k - \omega$  modeli, a s jednom jednadžbom Spalart-Almaras model.

U nekim slučajevima kada su inercijske sile puno veće od viskoznih (npr. gibanje broda na valovima, gibanje fluida u zatvorenom spremniku) moguće je utjecaj viskoznosti zanemariti, čime se pojednostavljuje matematički model.

Svaki stvarni problem je potrebno fizikalno modelirati, pri čemu je potrebno uzeti u obzir sve značajne fenomene za promatrani problem. Rezultat fizikalnog modeliranja (uvođenjem određenih pretpostavki i zanemarivanjem nebitnih efekata) rezultira matematičkim modelom, koji je za probleme sa strujanjem fluida zapisan sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Pri modeliranju se balansira između jednostavnosti matematičkog modela (da bude što jednostavniji za riješiti), ali i što bolji fizikalni model (koji će što vjernije opisivati stvarnost, tj. modelirati sve relevantne fenomene u pojavi). [8]

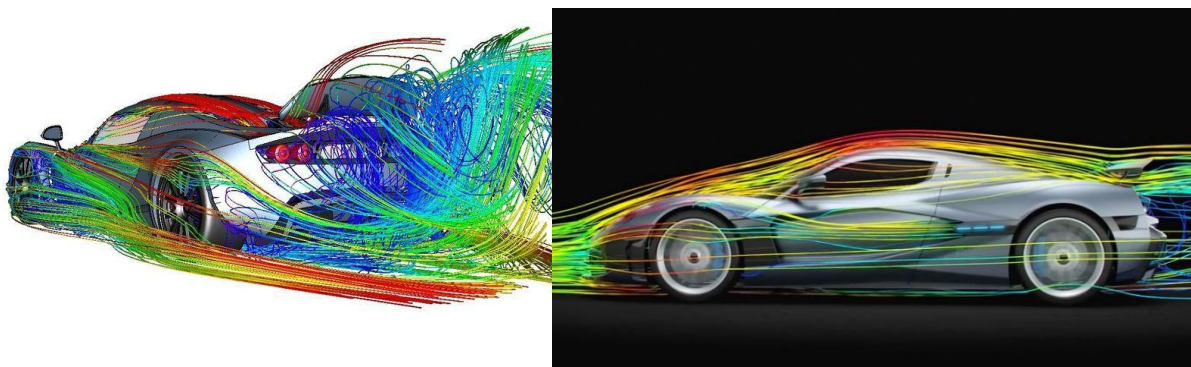


## 4. RAČUNALNA DINAMIKA FLUIDA

Računalna dinamika fluida - CFD – (eng. Computational Fluid Dynamics) – općeprihvaćeni pojam koji se odnosi na računalnu simulaciju, a nastoji opisati sve fizikalne procese vezane za fluide (turbulentno strujanje, prijenos topline i mase, izgaranje, višefazni tok i dr.). Temelj računalne dinamike fluida su Navier – Stokesove jednačbe. Pojavom računala sve se više primjenjuje i danas ima široko područje primjene u industriji pa i šire. [1]

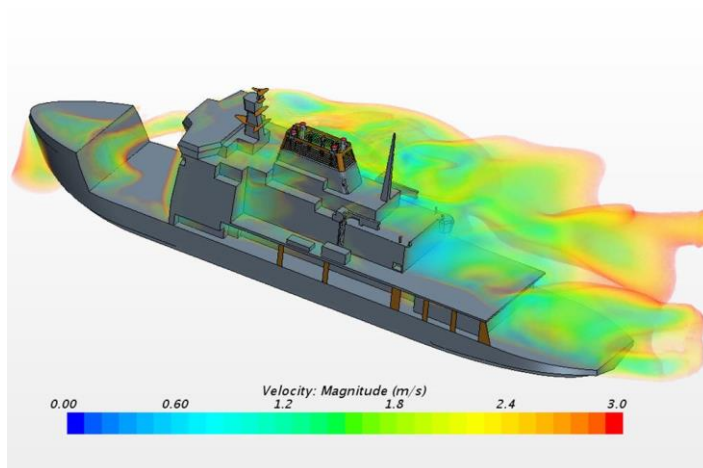
Primjenjuje se u rješavanju problema:

- aerodinamike letjelica i vozila
- hidrodinamike brodova
- izgaranja u motorima
- turbostrojeva (strujanje unutar rotacijskih dijelova)
- kemijskog inženjerstva (miješanje i razdvajanje, kalupljenje polimera)
- unutarnje i vanjske okoline zgrada (udari vjetra, zagrijavanje, ventilacija)
- hidrologije i oceanografije (tokovi rijeka, oceani)
- meteorologije (predviđanje vremena)
- biomedicinskog inženjerstva (strujanje krvi kroz arterije i vene) [1]

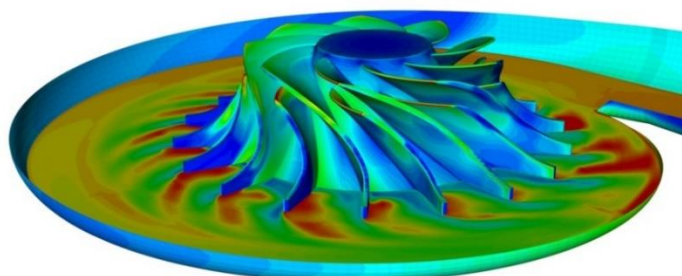


Slika 10. Aerodinamika vozila [4]

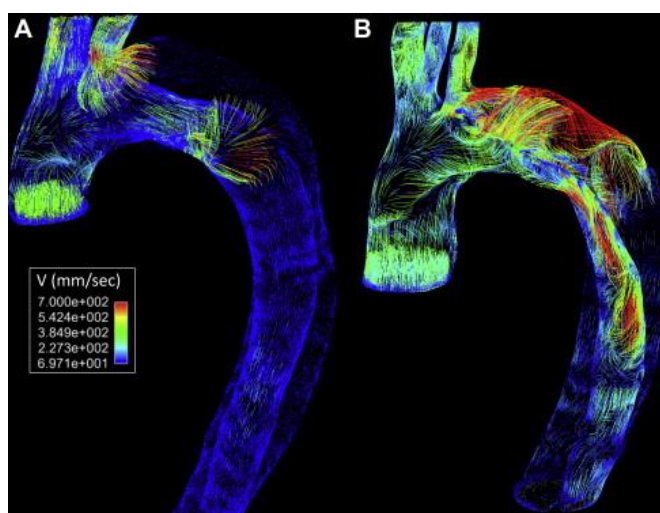




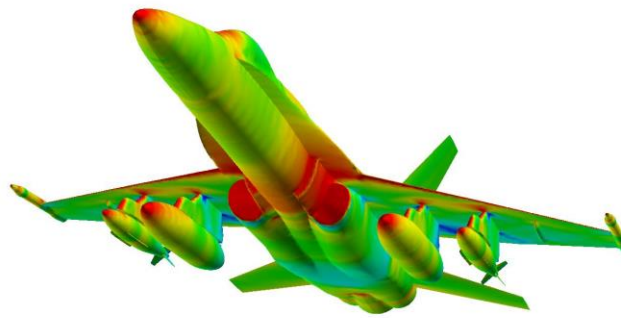
Slika 11. Hidrodinamika broda [4]



Slika 12. Strujanje unutar rotacijskih dijelova [5]



Slika 13. Strujanje krvi kroz arterije i vene [10]



Slika 14. Aerodinamika letjelica [11]

Svaka simulacija započinje definicijom problema i izborom odgovarajućeg matematičkog modela. Matematički model najčešće je prikazan sustavom parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Principijelno gledajući svaki takav sustav jednačbi ima opće rješenje (kad bismo ga znali ono bi sadržavalo određeni broj konstanti (funkcija) integracije), a posebno rješenje je definirano rubnim i početnim uvjetima specifičnim za promatrani problem (rubni i početni uvjeti definiraju funkcije integracije čineći rješenje jedinstvenim). Kada se radi s komercijalnim programom tada je matematički model već ugrađen u računalni program, a korisnik putem sučelja može odabrati podvarijantu modela koja odgovara njegovu problemu. [8]

Geometrijska mreža je rezultat diskretizacije prostora. Na definiranoj geometrijskoj mreži potrebno je diskretizirati parcijalne diferencijalne jednačbe matematičkog modela, uvažavajući točno određene rubne uvjete. Diskretizaciju jednačbi provodi se nekom od metoda:

- metoda konačnih volumena
- metoda konačnih elemenata
- metoda konačnih razlika i sl. [8]

Rezultat diskretizacije parcijalne diferencijalne jednačbe na zadanoj geometrijskoj mreži je sustav algebarskih jednačbi (ako je polazna diferencijalna jednačba linearna dobije se sustav linearnih algebarskih jednačbi, inače nelinearnih). Nelinearni sustav jednačbi rješava se iterativnim postupkom koji u sebi sadrži rješavanje sustava linearnih algebarskih jednačbi.

U organizacijskom smislu numerička simulacija se provodi kroz tri programa:

- predprocesor,

- procesor
- postprocesor. [8]



Slika 15. Shema organizacije [1]

**Predprocesor** - uključuje definiranje / modeliranje geometrije, diskretizaciju geometrije mrežom konačnih volumena, odabir formulacije rješavača (solver-a), definiranje materijala (svojstva fluida), zadavanje početnih i rubnih uvjeta. Postoji više komercijalnih programa za generiranje mreže, a oni u principu mogu poslužiti za pripremu geometrijske mreže različitim procesorima (FLUENT, OpenFoam, ABACUS i sl.). [1]

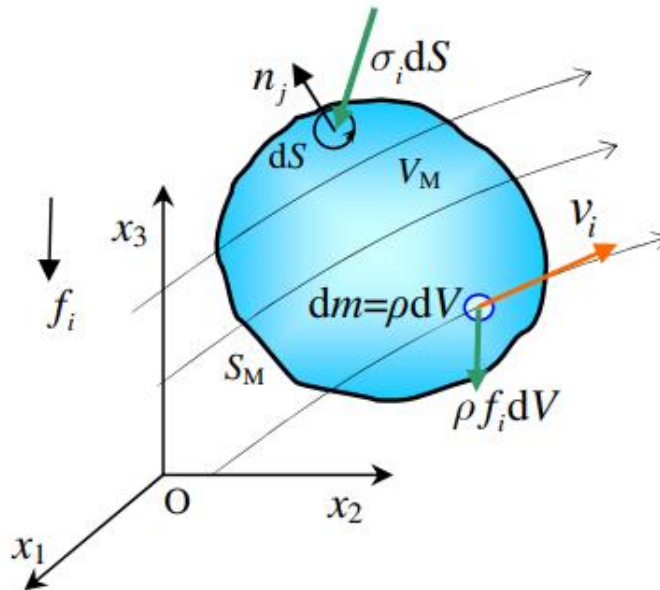
**Procesor** - naziv za numerički rješavač (solver) koji rješava diskretizirane (algebarske) jednačbe za zadani problem. [1]

**Postprocesor** – služi za prikazivanje rezultata numeričke simulacije. [1]

#### 4.1. Konzervativni zakoni gibanja fluida

Dinamiku fluida opisuju Navier – Stokesove parcijalne diferencijalne jednačbe. Matematički model proračuna temelji se na osnovnim zakonima dinamike fluida u koje spadaju:

- Zakon očuvanja mase
- Zakon očuvanja količine gibanja
- Zakon očuvanja momenta količine gibanja
- Zakon očuvanja energije
- Drugi zakon termodinamike [2]



Slika 16. Materijalni volumen [3]

Površinske sile dodira među česticama fluida unutar  $V_M$  su unutarnje sile, a sile dodira s okolinom ( $S_M$ ) su vanjske. [3]

#### 4.2. Zakon očuvanja mase (jednadžba kontinuiteta)

Zakon očuvanja mase materijalnog volumena:

brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli. [1]

Matematički zapis zakona:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho dV = 0 \quad (1)$$

Materijalni volumen koji odgovara volumenu čestice fluida promjenjiv je u vremenu  $V_M(t)$  pa je i diferencijal  $dV$  vremenski promjenjiv pri čemu vrijedi:

$$\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (2)$$

U graničnom slučaju, kada se materijalni volumen smanji na česticu fluida, izraz (1) prelazi u sljedeći oblik:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

Takav oblik zapisa naziva se konzervativni oblik zakona očuvanja mase. Za nestlačivo strujanje zakon očuvanja mase glasi:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

On izražava činjenicu da nema promjene volumena čestice fluida. [2]

### 4.3. Zakon očuvanja količine gibanja (jednadžba gibanja fluida)

Zakon očuvanja količine gibanja za materijalni volumen glasi:

brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi površinskih i vanjskih masenih sila koje djeluju na materijalni volumen. [1]

Materijalni volumen  $V_M$  razdvojen je od okolnog fluida materijalnom površinom  $S_M$  u strujanju fluida u polju masene sile  $f_i$ .

$\rho f V$  - elementarna masena sila, djeluje na svaku česticu fluida.

$\sigma_i dS$  - elementarna površinska sila, djeluje na svaki djelić površine  $S_M$ .

$\sigma_i$  - vektor naprezanja, definira se pomoću tenzora naprezanja,  $\sigma_i = n_j \sigma_{ji}$ .

$\rho v_i dV$  - količina gibanja čestice fluida.

Matematički zapis zakona u integralnom obliku:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_{M(t)}} \rho v_i dV = \int_{V_{M(t)}} \rho f_i dV + \int_{S_{M(t)}} \sigma_i dS = \int_{V_{M(t)}} \rho f_i dV + \int_{S_{M(t)}} n_j \sigma_{ji} dS \quad (5)$$

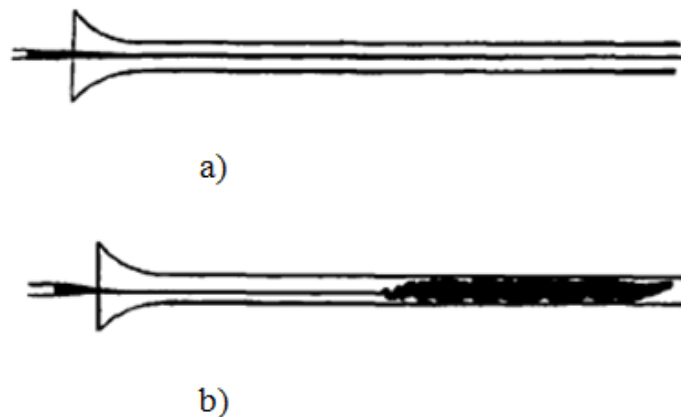
Konzervativni diferencijalni zapis zakona količine gibanja:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (6)$$

## 5. STRUJANJE FLUIDA

Ako govorimo o realnom, viskoznom fluidu onda znamo da čestice fluida koje su u dodiru sa stijenkom cijevi imaju brzinu  $v = 0$  a da brzina raste prema simetrali cijevi. To znači da brzina u poprečnom presjeku cijevi nije konstantna već ima određeni profil. [6]

Osborne Reynolds je bio prvi znanstvenik koji je proučavao režime strujanja fluida. On je promatrao strujanje vode kroz staklenu cijev. Na jednom je mjestu u tok vode ubacivao obojenu tekućinu i promatrao daljnji tok fluida. Kada bi ventil na ulazu vode bio do određene mjere zatvoren, i brzina strujanja vode relativno niska, nije dolazilo do miješanja vode i obojene kapljevine (slika 17.a). Kada bi ventil za dovod vode jače otvorio, voda i obojena kapljevina su se počeli miješati (slika 17.b). [6]



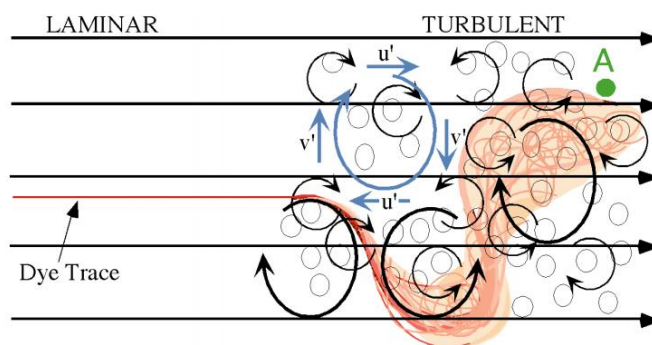
Slika 17. Strujanje fluida kroz staklenu cijev [6]

Proučavajući strujanje vode kroz staklene cijevi, Reynolds je došao do zaključka da režimi strujanja ovisi o jednoj bezdimenzijskoj karakteristici koja je njemu u čast nazvana *Reynoldsov broj*:

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{w \cdot d \cdot \rho}{\mu} \quad (7)$$

## 5.1. Turbulencija

Jeli protok laminaran ili turbulentan ovisi o trenju fluida (viskoznosti) i inerciji. Odnos viskoznih i inercijskih sila predstavlja Reynoldsov broj. [7]



Slika 18. Laminarno i turbulentno strujanje [7]

U laminarnom strujanju čestice fluida slijede liniju. U turbulentnom strujanju fluida stvaraju se vrtlozi različitih veličina. [7]

Vrijednost Reynoldsovog broja kod kojeg prva perturbacija (perturbacijska amplituda) ne slabi u vremenu, odgovara kritičnoj vrijednosti,  $Re_{kr}$ . Laminarno strujanje prelazi u turbulentno kod kritičnog Reynoldsovog broja. Što se više povećava Reynoldsov broj iznad kritičnog ( $Re_{kr}$ ) raste broj novonastalih frekvencija kojima amplituda perturbacijskog strujanja ne slabi u vremenu, a istodobno se smanjuju intervali Reynoldsova broja u kojima se pojavljuje još novih frekvencija. Strujanje koje posjeduje takav kaotičan karakter jest turbulentno strujanje. U njemu polje brzina, tlaka i dr., pokazuju slučajne promjene u prostoru i vremenu. [1]

Nestlačivo strujanje fluida kod kojeg se koeficijent viskoznosti može smatrati konstantnim, se može opisati jednačinom kontinuiteta i jednačinom količine gibanja (Navier-Stokesovim jednačinama). Za stacionarno strujanje fluida, uz zanemarenje masenih sila, navedene jednačine, zapisane u indeksnoj notaciji glase:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (8)$$

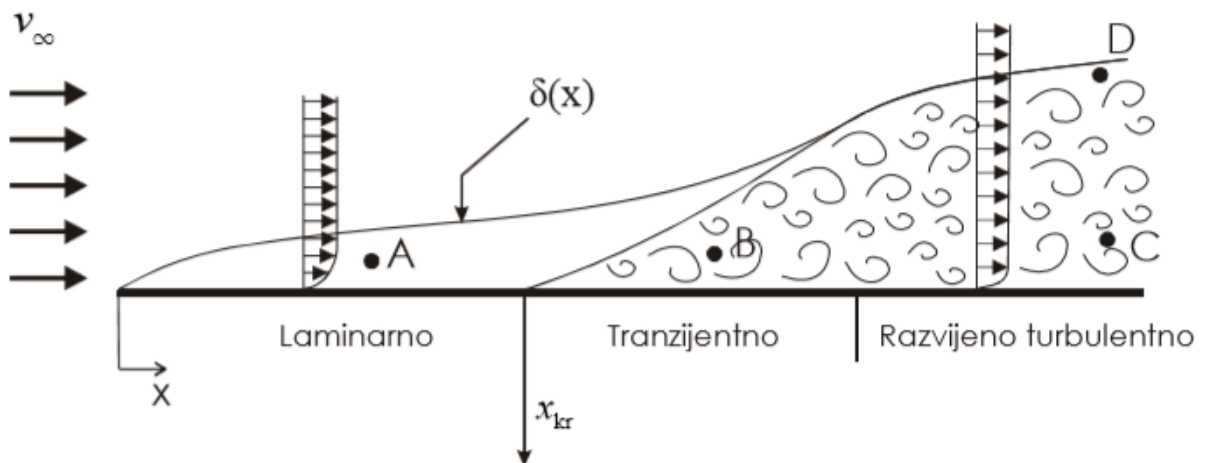
$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu (\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})] \quad (9)$$

Sustav jednačbi (8) i (9) sadrži četiri skalarne jednačbe s četiri nepoznata polja. Jedini relevantni kriterij sličnosti za nestlačivo strujanje opisano gornjim jednačbama je Reynoldsov broj. Reynoldsov broj predstavlja odnos inercijskih i viskoznih sila. Za dane stacionarne granične uvjete, uvijek postoji stacionarno rješenje sustava jednačbi (8) i (9), koje zbog nelinearnosti lijeve strane jednačbe (9), uglavnom ne možemo odrediti analitičkim putem. Analitičko rješenje moguće je naći za one situacije strujanja u kojima nelinearni član iščezava, a jedna takva situacija je nestlačivo strujanje ustaljenim profilom brzine. Turbulentno strujanje ima unutrašnje stupnjeve slobode jer je nestacionarno i za stacionarne rubne uvjete, te analitičko opisivanje takvog strujanja nije moguće. [8]

Slika 19 shematski prikazuje granični sloj uz ravnu ploču. Na samom početku razvija se laminarni granični sloj. On pri određenoj (kritičnoj) vrijednosti Reynoldsova broja

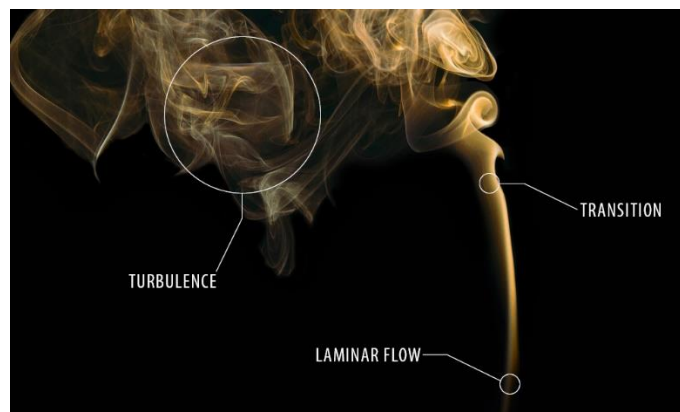
$$Re_{k_r} = \frac{v_{\infty} \cdot x_{kr}}{\nu} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ do } 3 \cdot 10^6 \text{ postaje nestabilan.}$$

U presjeku  $x=x_{kr}$  periodički se i relativno rijetko u prostoru pojavljuju nestabilnosti strujanja (pulsacije brzine i tlaka). Daljnjim udaljavanjem od tog presjeka u smjeru strujanja pulsacije postaju sve češće, i sve gušće u prostoru, tako da nakon nekog presjeka govorimo o potpuno razvijenom turbulentnom strujanju. [8]



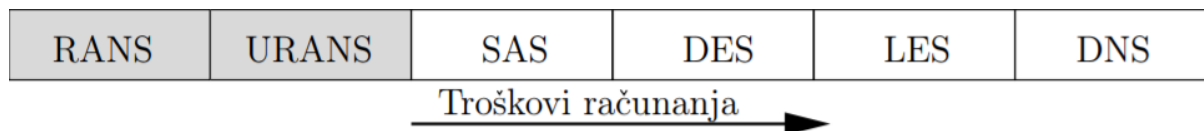
Slika 19. Shematski prikaz graničnog sloja uz ravnu ploču [8]





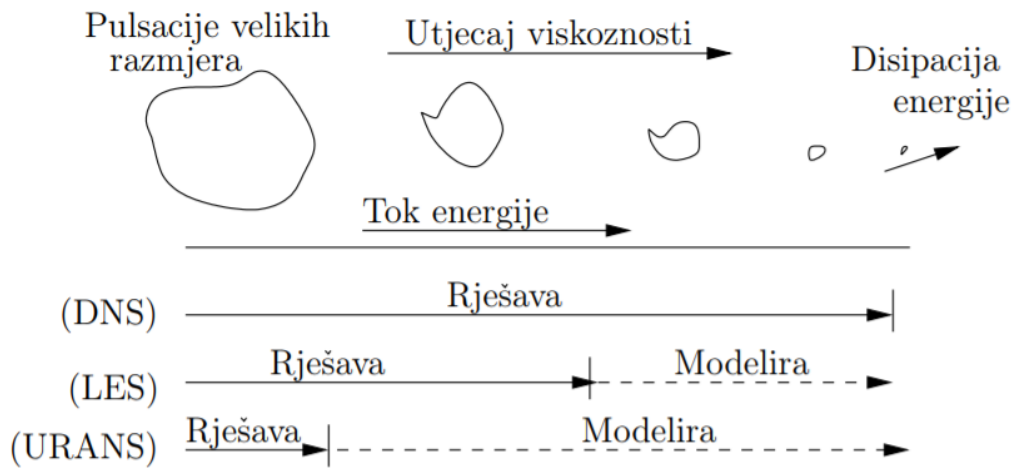
Slika 20. Strujanje fluida (laminarno, tranzijentno i razvijeno turbulentno) [9]

Pri direktnom numeričkom rešavanju (DNS – Direct Numerical Simulation) turbulentnog strujanja trebalo bi koristiti tako finu geometrijsku mrežu da se obuhvate najmanje valne duljine i tako sitni vremenski korak integracije da se obuhvate najviše frekvencije,. Kod takve geometrijske mreže tačnost numeričkog rešavanja trebala biti vrlo visoka, tako da se numeričkim pogreškama ne „zamagli“ fizikalnost koeficijenata korelacije pulsirajućih komponenti brzine i tlaka. Za realne inženjerske probleme je to još uvijek previše zahtjevno sa stajališta kapaciteta i brzine računanja računala, tako da takav pristup ne dolazi u obzir. [8]



Slika 21. Pristupi modeliranja jednačbi [19]

Slika 21 pokazuje moguće pristupe u modeliranju Navier-Stokesovih jednačbi. Jasno je da ako želimo potpuno rešavati energiju za pulsacija malih amplituda i valnih duljina, potrebno imati jako finu prostornu i vremensku diskretizaciju. Zbog tih razloga DNS i LES imaju mogućnost pružanja boljih rezultata, no njihovi računalni zahtjevi obično su previsoki za komercijalnu upotrebu.



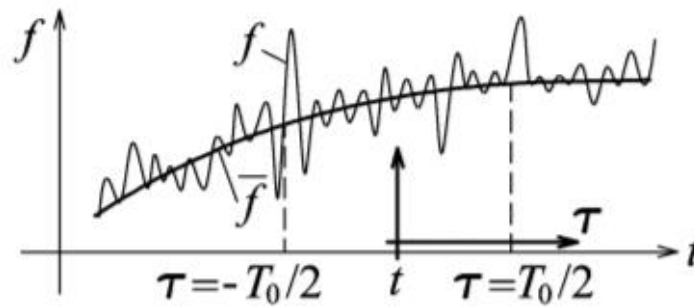
Slika 22. Tok energije turbulentnog strujanja [19]

### 5.1.1. Statističko opisivanje turbulencije

Rezultat direktnog rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi bio bi skup numeričkih vrijednosti traženih polja fizikalnih veličina (u nestlačivom strujanju to bi bilo polje tlaka i polje brzine) u velikom broju prostornih točaka za veliki broj vremenskih trenutaka. Inženjera zanimaju samo integralne veličine poput protoka, ukupne sile tlaka, ukupne viskozne sile na neku površinu i sl. Ideja da se prije rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi, sve veličine u tim jednadžbama uprosječe, te da se rješavaju jednadžbe za uprosječene veličine. [8]

Danas se najčešće koristi vremensko (Reynoldsovo) uprosječenje. Ako je  $f$  neka veličina u turbulentnom strujanju, ona se može prikazati zbrojem vremenski prosječne vrijednosti  $\bar{f}$  i pulsirajućeg dijela  $f'$  ( $f = \bar{f} + f'$ ). Prosječna (srednja) vrijednost  $\bar{f}$  u razdoblju  $T_0$  je po definiciji:

$$\bar{f}(x_i, t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(x_i, t - \tau) \cdot d\tau \quad (10)$$



Slika 23. Uprosječene veličine

gdje  $T_0$  mora biti odabrano tako da vrijedi  $\bar{f}' = \bar{f}'$ .  $\bar{f}'$  označuje uprosječenje prosječne veličine. Za dobro odabrano razdoblje uprosječavanja vrijedi:

$$\bar{f}' = \overline{f' - \bar{f}} = \bar{f}' - \bar{\bar{f}} = \bar{f}' - \bar{f} = 0 \quad (11)$$

Ili riječima: Vremenski prosječna vrijednost pulsirajućeg dijela bilo koje fizikalne veličine jednaka je nuli. [8]

Polje brzine možemo rastaviti na zbroj vremenski osrednjenog (glavnog) strujanja i pulsirajućeg strujanja  $v_i = \bar{v}_i + v'_i$ . Tada će se ukupna kinetička energija sastojati od kinetičke energije glavnog strujanja i kinetičke energije pulsirajućeg strujanja, što se dobije osrednjavanjem kinetičke energije za ukupno strujanje.

$$\frac{1}{2} \overline{v_i v_i} = \frac{1}{2} \overline{v_i v_i} + \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad (12)$$

Član na lijevoj strani jednadžbe označuje vremenski srednju vrijednost specifične kinetičke energije ukupnog strujanja. Na desnoj strani prvi član označuje specifičnu kinetičku energiju glavnog (osrednjenog) strujanja, a drugi član na desnoj strani jednadžbe, srednju vrijednost kinetičke energije pulsirajućeg strujanja ili kinetičku energiju turbulencije (označava se s  $\bar{k} = \overline{v'v'}/2$ ). [8]

### 5.1.2. Opći oblik zakona očuvanja za slučaj nestlačivog turbulentnog strujanja

Primjenom pravila Reynoldsova uprosječivanja na opći oblik zakona očuvanja u nestlačivom strujanju:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + s_\varphi \quad (13)$$

pri čemu su gustoća i koeficijent difuzije konstantne veličine, a polje brzine i specifično fizikalno svojstvo se prikazuju zbrojevima  $v_j = \bar{v}_j + v'_j$  i  $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$  te slijedi

$$\frac{\partial \rho \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} - \overline{\rho v'_j \varphi'} \right) + \bar{s}_\varphi \quad (14)$$

u dobivenoj uprosječenoj jednadžbi osim uprosječenih vrijednosti pojavljuje se predstavnik pulsirajućeg strujanja. Član  $\overline{v'_j \varphi'}$  označuje novu nepoznanicu, što znači da bi za nju trebalo definirati jednadžbu ili je modelirati. U statističkom pristupu opisa turbulencije jednadžbe se uprosječuju, čime se gubi dio informacija koje te jednadžbe nose. [8]

Prijenos fizikalne veličine u strujanju fluida odvija se putem difuzije i putem konvekcije (uslijed strujanja fluida, čestica fluida kao nositelj fizikalnog svojstva svojim premještanjem prenosi i fizikalno svojstvo). Difuzija je posljedica kaotičnog gibanja atoma, odnosno molekula, putem kojeg se fizikalno svojstvo širi po prostoru. Makroskopski gledano difuzija će se manifestirati za slučaj postojanja gradijenta fizikalnih veličina. Difuzijski procesi se još nazivaju i spontanim procesima. Difuzijski procesi se odvijaju sami od sebe, sve dok postoji gradijent fizikalne veličine. Primjer difuzijskog procesa je provođenje topline, iz područja s višom prema području s nižom temperaturom. [8]

Molekularna viskoznost, definira viskozna naprezanja, odnosno molekularnu difuziju količine gibanja. Možemo govoriti da je za turbulentnu difuziju količine gibanja odgovorna turbulentna viskoznost, koja uzrokuje turbulentna naprezanja. Jasno je da je molekularna viskoznost fizikalno svojstvo fluida, a turbulentna viskoznost ne. Turbulentna viskoznost je posljedica režima strujanja, a u laminarnom strujanju je jednaka nuli. [8]

### 5.1.3. Vremenski osrednjene jednadžbe za slučaj nestlačivog strujanja

Skup vremenski osrednjenih jednadžbi kontinuiteta i količine gibanja se naziva Reynoldsovim jednadžbama.

Predstavnik pulsirajućeg strujanja  $-\rho\overline{v'_i v'_j}$  označuje turbulentnu difuziju količine gibanja (turbulentno ili Reynoldsovo naprezanje). Tenzor Reynoldsovih naprezanja je simetričan tenzor u kojemu je šest nepoznanica. [8]

$$-\rho\overline{v'_i v'_j} = \begin{pmatrix} -\rho\overline{v'_1 v'_1} & -\rho\overline{v'_1 v'_2} & -\rho\overline{v'_1 v'_3} \\ & -\rho\overline{v'_2 v'_2} & -\rho\overline{v'_2 v'_3} \\ & & -\rho\overline{v'_3 v'_3} \end{pmatrix}$$

simetrično

Slika 24. Tenzor Reynoldsovih naprezanja [8]

Reynoldsovim osrednjavanjem pokušavamo stohastičku prirodu turbulentnog strujanja prikazati vremenski osrednjenim poljima tlaka i brzine. To je moguće jedino ako znamo beskonačno mnogo korelacija tlaka i brzina. S druge strane, iskustvo pokazuje da je dovoljno poznavati konačan broj korelacija da bi se proračunale karakteristike polja interesantne sa stajališta inženjerske prakse, i na toj se činjenici temelje modeli turbulencije. Zadatak modela turbulencije je usklađivanje broja jednadžbi i broja nepoznatih polja, zaustavljajući se na određenoj korelaciji. Sve više korelacije modeliraju se pomoću nižih koje su obuhvaćene modelom turbulencije.

Najbitniji zahtjevi koji se postavljaju pred model turbulencije su:

- univerzalnost
- točnost
- mogućnost ekonomičnog rješavanja i jednostavnost. [8]

## 6. MODEL TURBULENCIJE

Reynoldsove jednadžbe dobiju se osrednjivanjem jednadžbi kontinuiteta. Te jednadžbe sadrže više nepoznanice nego što ima jednadžbi, što znači da takav sustav nema jednoznačno rješenje. Cilj modela turbulencije je usklađivanje broja jednadžbi i broja nepoznatih polja, zaustavljajući se na određenoj korelaciji.

Modeli turbulencije dijele se s obzirom na korelacije brzina za koju se rješava transportna jednadžba (jednadžba prijenosa) na: modele prvog, drugog i trećeg reda. U modelima prvog reda, (najjednostavniji modeli), modelira se već dvojnja korelacija brzina. Tenzor Reynoldsovih napreznja se modelira i to uglavnom prema hipotezi Boussinesqa u obliku:

$$-\overline{\rho v_i' v_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} \quad (15)$$

gdje je  $\mu_t$  koeficijent turbulentne viskoznosti koji nije fizikalno svojstvo fluida već funkcija uvjeta strujanja, a u laminarnom strujanju jednak je nuli.

Hipotezom Boussinesqa šest komponenti tenzora Reynoldsovih napreznja modelirano je jednim nepoznatim poljem koeficijenta turbulentne viskoznosti. Uvrštavanjem hipoteze Boussinesqa u Reynoldsove jednadžbe one prelaze u oblik:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}_j \bar{v}_i) = - \frac{\partial (\bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (17)$$

Polazne Navier-Stokesove jednadžbe koje opisuju ukupno strujanje fluida imaju isti oblik kao Reynoldsove jednadžbe koje opisuju vremenski osrednjeno turbulentno strujanje, s razlikom da se u Reynoldsovim jednadžbama pojavljuju vremenski osrednjene veličine. Umjesto tlaka se pojavljuje efektivni tlak, a umjesto viskoznosti fluida efektivna viskoznost. Prijelazom s Navier-Stokesovih na Reynoldsove jednadžbe izgubile su se informacije o pulsirajućem strujanju, pa vremenski i prostorni koraci integracije ne moraju biti mali kao pri direktnom

rješavanju Navier-Stokesovih jednadžbi. Problem na koji se nailazi ovim prijelazom je modeliranja koeficijenta turbulentne viskoznosti. [8]

## 6.1. Modeliranje koeficijenta turbulentne viskoznosti

Postoji više načina modeliranja koeficijenta turbulentne viskoznosti, a u osnovi se koristi analogija s kinetičkom teorijom plinova. Boussinesqova ideja da turbulentna naprezanja (koja su posljedica kaotičnog turbulentnog miješanja čestica fluida) modelira slično viskoznim naprezanjima (koja su posljedica kaotičnog gibanja atoma i molekula unutar čestica fluida), direktno vodi k Prandtlovom modelu turbulentne viskoznosti koji se temelji na analogiji s molekularnom viskoznošću, koja je definirana kinetičkom teorijom plinova. Prema kinetičkoj teoriji plinova viskoznost fluida je razmjerna gustoći fluida, slobodnoj putanji molekula i karakterističnoj brzini gibanja molekula. Analogno tome se definira turbulentnu viskoznost u obliku:

$$\mu_t = \rho l_t v_t \quad (18)$$

gdje su:

$l_t$  - duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju (karakteristična duljina turbulencije)

$v_t$  - karakteristična brzina turbulentnih pulsacija [8]

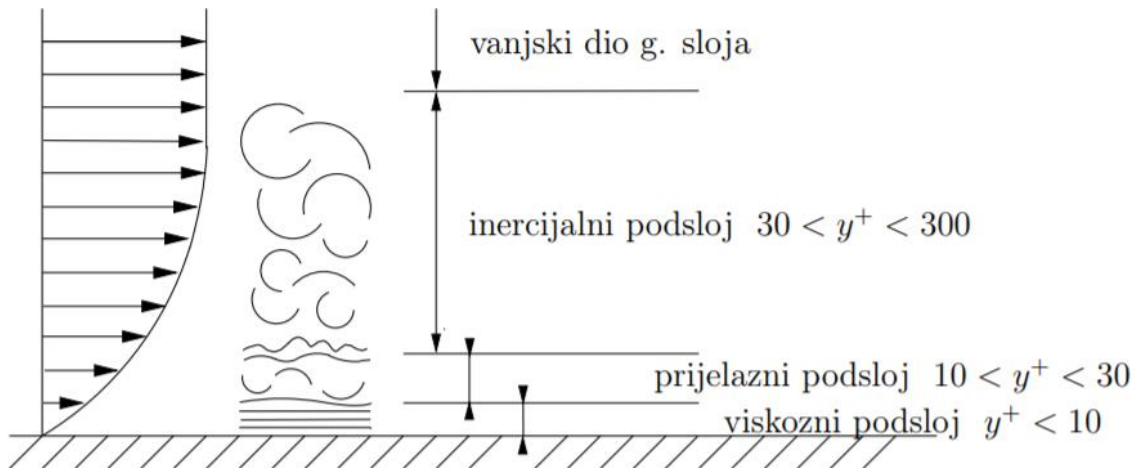
### 6.1.1. Modeliranje graničnog sloja

U struji fluida dominira turbulentna viskoznost koja ovisi o intenzitetu miješanja vrtloga čestica u odnosu na molekularnu viskoznost koja je fizikalno svojstvo fluida. U graničnom sloju turbulentne pulsacije su prigušene zbog uvjeta lijepljenja fluida uz samu stijenku. To bi značilo da u neposrednoj blizini stijenke vlada molekularna viskoznost, a udaljavanjem od stijenke turbulentna viskoznost. [8]

Granični sloj se dijeli na dva osnovna djela:

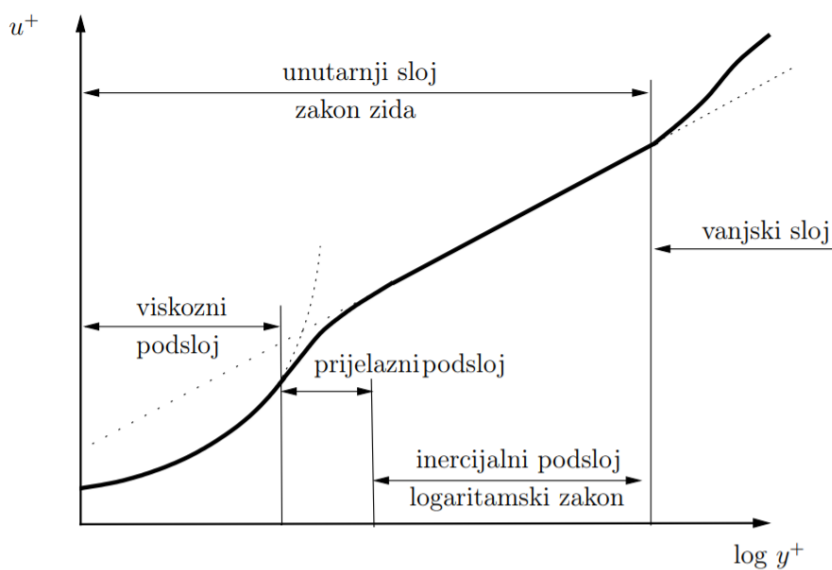
- Unutarnji
- Vanjski

Unutarnji sloj ima tri podsloja: prijelazni, viskozni i inercijalni.



Slika 25. Prikaz graničnog sloja u turbulentnom strujanju [8]

Zbroj prijelaznog, inercijskog i viskoznog podsloja čini 10 - 15% ukupnog graničnog sloja. Gradijenti prisutni uz stijenku mnogo su veći nego u slobodnoj struji, što znači da prostorna diskretizacija mora biti fina da ih se dobro opiše. Također, približavanjem prema stijenci turbulentna viskoznost opada što predstavlja izazov za model turbulencije.



Slika 26. Turbulentni granični sloj [8]



U rješavanju navedenog postoje dva pristupa:

- Područje inercijalnog i viskoznog podsloja mora biti opisano zidnim funkcijama tako da model turbulencije počinje u inercijalnom podsloju
- Postojeći model turbulencije modificirati tako da vrijedi za asimptotsko približavanje stijenci [8]

## 7. KORIGIRANI NAPADNI RUB

Korigirani napadni rub je sinusoidna modifikacija koja se nalazi na vrhu peraje grbavog kita. Grbavi kit je jedna od najvećih životinja u oceanu, koji je poznat po svojoj velikoj okretnosti u vodi i u zraku.

Dva su geometrijska parametra koja karakteriziraju korigirani napadni rub:

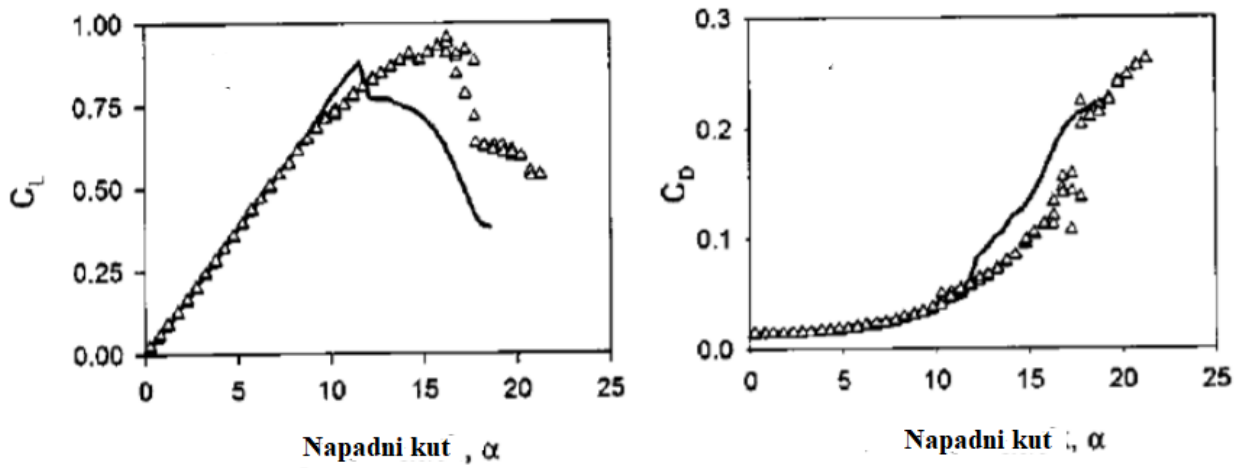
- Amplituda
- Valna duljina



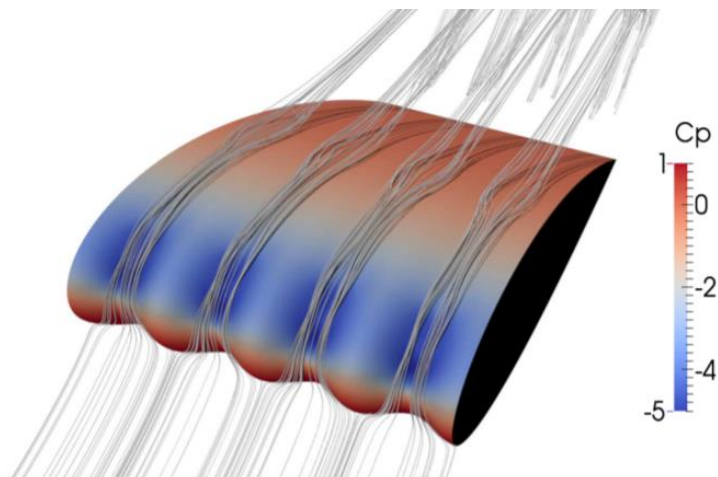
Slika 27. Peraje grbavog kita [21]

Jedno od prvih istraživanja u tom području proveli su Fish i Battle [23] 1995. u kojem je otkriven efekt "korigiranog napadnog ruba". Naglasili su kako korigirani napadni rub na peraji djeluje kao uređaj za kontrolu protoka koji je u stanju održati stabilnost. Da bi se bolje razumjelo značenje korigiranog napadnog ruba Miklosovic et al [24] je testirao model peraje grbavog kita u zračnom tunelu. Izmjeren je koeficijent uzgona i otpora u ovisnosti o napadnom kutu i uspoređeni su rezultati sa istim modelom peraje bez korigiranog napadnog ruba. Za ispitivanje je uzeto u obzir nestlačivo, stacionarno strujanje s maksimalnim Machovim brojem 0.2 i Reynoldsovim brojem između  $5.05 \cdot 10^5$  i  $5.2 \cdot 10^5$ , što se smatralo kao domet odrasle životinje. Iz usporedbe s perajom bez korigiranog napadnog ruba, koeficijent uzgona počeo se povećavati kod napadnog kuta od oko  $12^\circ$ . Kad se u obzir uzeo i koeficijent otpora, dva modela

su bila usporediva do napadnog kuta od  $12^\circ$ , nakon kojeg je model peraje s korigiranim napadnim rubom pokazao bolje rezultate. [16]



Slika 28. Rezultati koeficijenta uzgona i otpora uspoređeni s modelom peraje bez korigiranog napadnog ruba [16]



Slika 29. Protok usmjeren kroz kanale peraje [16]

## 8. NUMERIČKI PRORAČUN

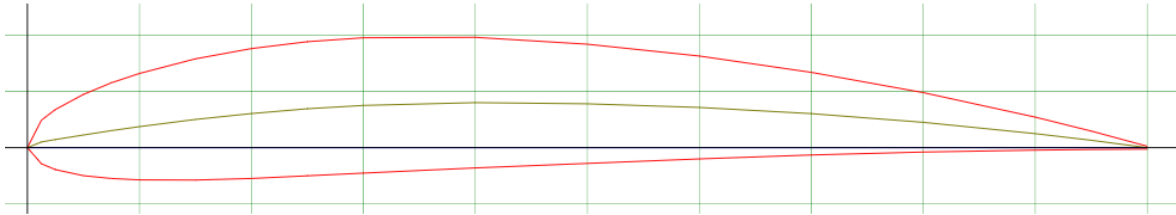
### 8.1. Modeliranje geometrije aeroprofila

Za izradu modela odabrani je aeroprofil NACA 4412 čije su koordinate preuzete sa stranice NACA airfoils. [20]

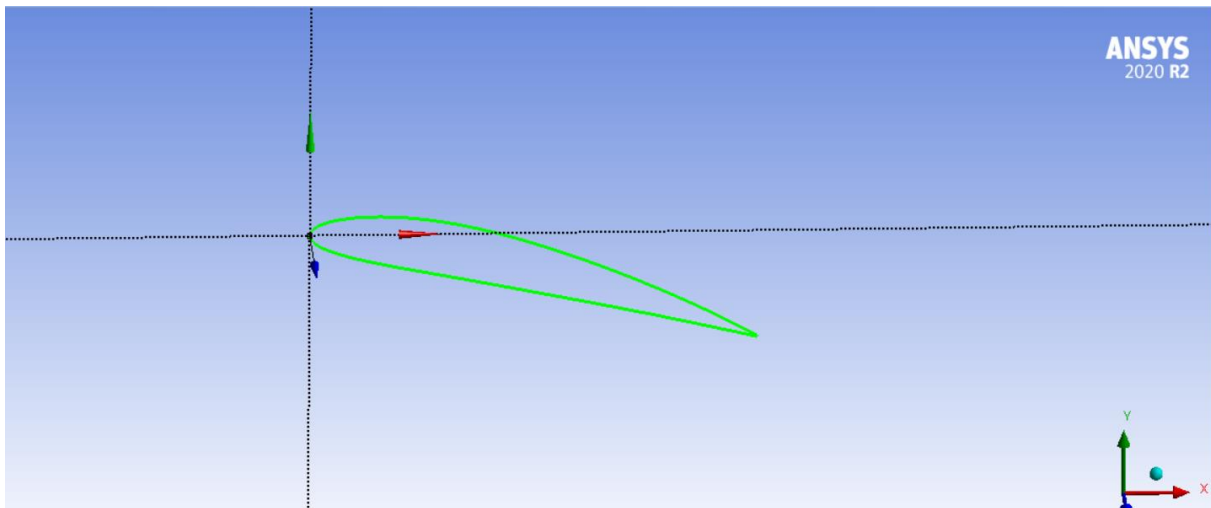
Na odabrani aeroprofil je kasnije primijenjen korigirani napadni rub. U tablici su prikazane koordinate točaka gornje i donje krivulje (slika 30) te 2D prikaz aeroprofila (slika 32). Koordinate točaka su uvezene u Ansys Design Modeler kako bi se dobio 2D aeroprofil.

#Group	#Point	X_cord	Y_cord	Z_cord
1	1	1	0.0013	0
1	2	0.95	0.0147	0
1	3	0.9	0.0271	0
1	4	0.8	0.0489	0
1	5	0.7	0.0669	0
1	6	0.6	0.0814	0
1	7	0.5	0.0919	0
1	8	0.4	0.098	0
1	9	0.3	0.0976	0
1	10	0.25	0.0941	0
1	11	0.2	0.088	0
1	12	0.15	0.0789	0
1	13	0.1	0.0659	0
1	14	0.075	0.0576	0
1	15	0.05	0.0473	0
1	16	0.025	0.0339	0
1	17	0.0125	0.0244	0
1	18	0	0	0
1	19	0.0125	-0.0143	0
1	20	0.025	-0.0195	0
1	21	0.05	-0.0249	0
1	22	0.075	-0.0274	0
1	23	0.1	-0.0286	0
1	24	0.15	-0.0288	0
1	25	0.2	-0.0274	0
1	26	0.25	-0.025	0
1	27	0.3	-0.0226	0
1	28	0.4	-0.018	0
1	29	0.5	-0.014	0
1	30	0.6	-0.01	0
1	31	0.7	-0.0065	0
1	32	0.8	-0.0039	0
1	33	0.9	-0.0022	0
1	34	0.95	-0.0016	0
1	35	1	-0.0013	0

Slika 30. Koordinate aeroprofila [20]

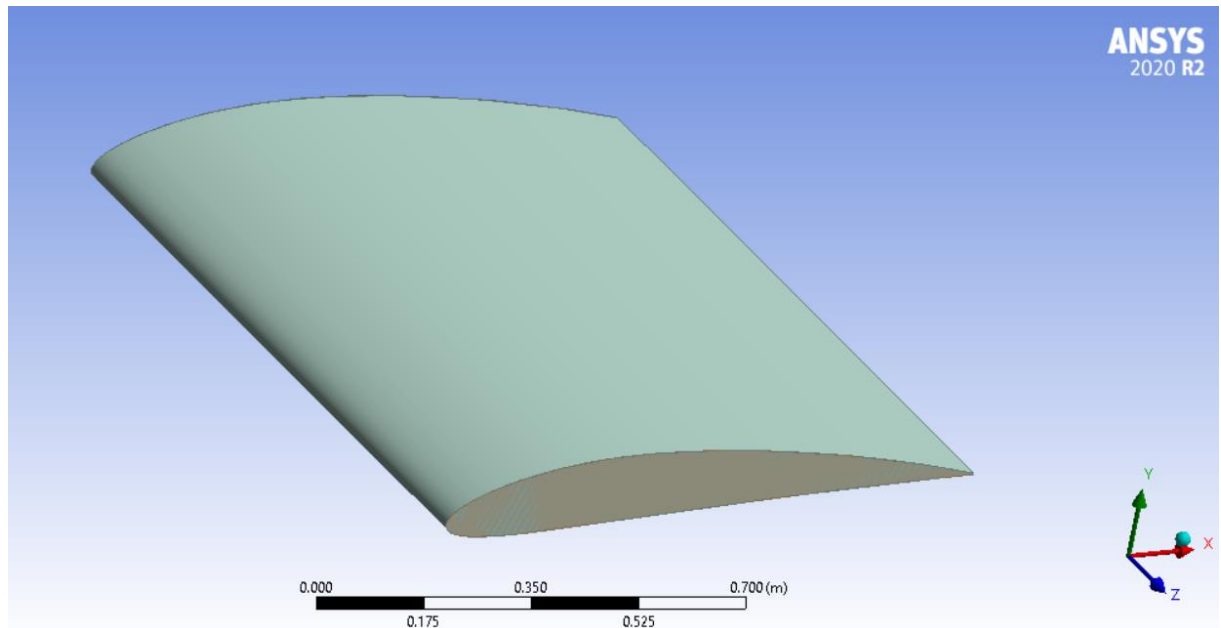


Slika 31. Točke gornje i donje krivulje aeroprofila [20]

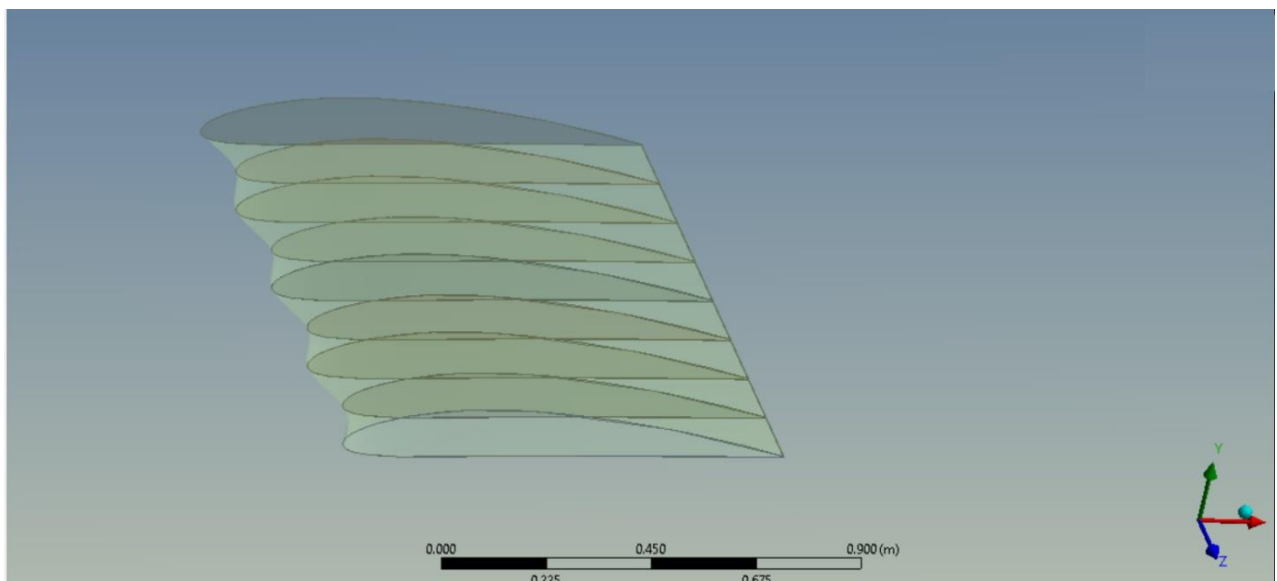


Slika 32. 2D prikaz aeroprofila u Ansys Design Modeler-u. [Ansys]

Aeroprofili su modelirani pomoću programa Ansys Design Modeler. Zbog kompleksnosti računalne simulacije strujanja fluida oko krila, u radu je duljina geometrije skraćena. Modelirana su tri aeroprofila koja su vidljiva na slikama 33, 35 i 36.

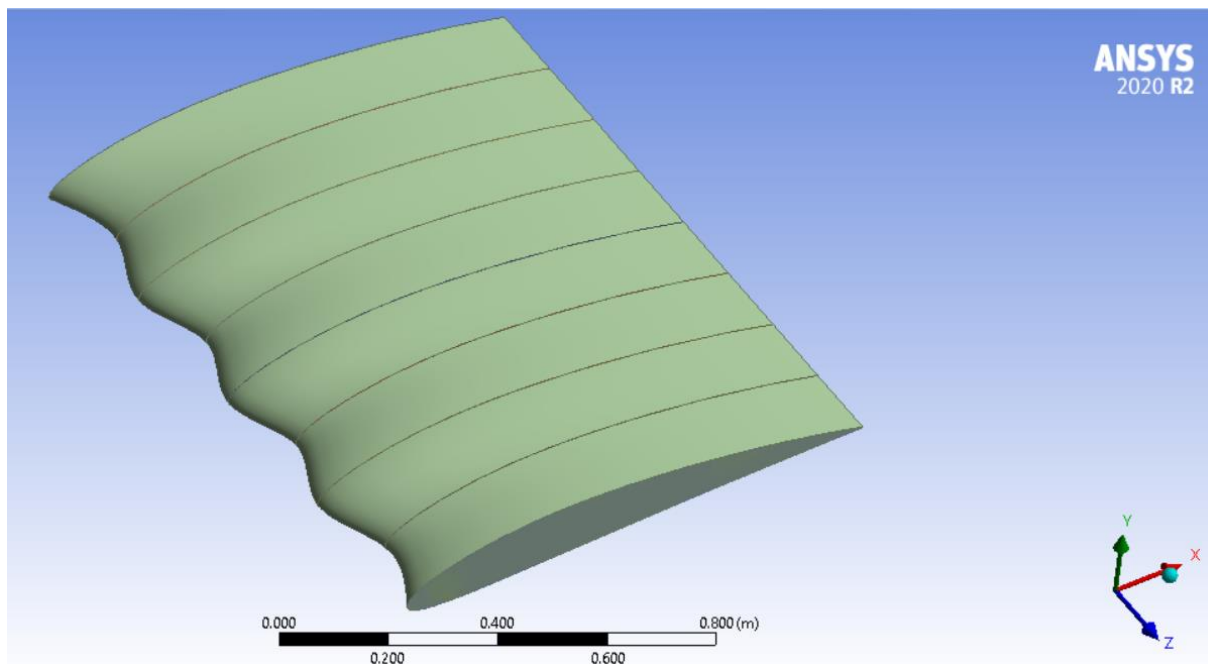


Slika 33. Aeroprofil bez korigiranog napadnog ruba

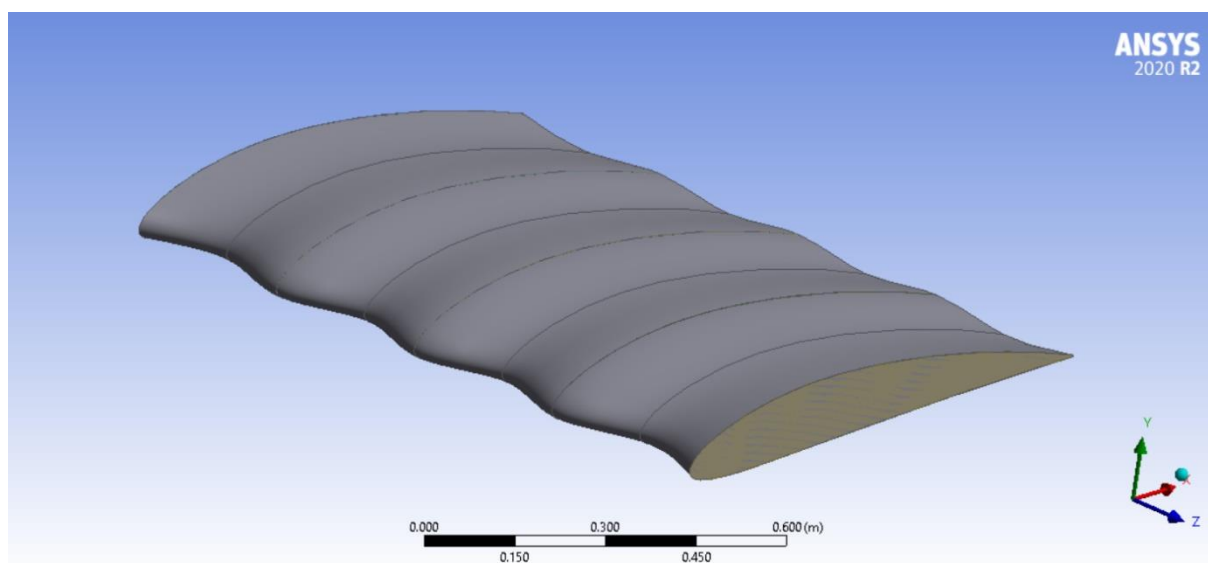


Slika 34. Konstrukcija aeroprofila s korigiranim napadnim rubom

Kod aeroprofila s korigiranim napadnim rubom crtano je više 2D profila koji su povezani pomoću značajke *Loft*. Na slici 34 je vidljivo konstruiranje aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici.



Slika 35. Aeroprofil s korigiranim napadnim rubom na ivici



Slika 36. Korigirani napadni rub preko cijelog aeroprofila

Dimenzije aeroprofila NACA 4412		
a)	0.05m	Amplituda iznosi 5% tetive aeroprofila
b)	0.15m	Valna duljina
c)	1.2m	Duljina aeroprofila
d)	1m	Tetiva aeroprofila

Tablica 1. Konstruktivske dimenzije aeroprofila

Tablica 1 prikazuje dimenzije konstruiranog aeroprofila. Amplituda predstavlja udaljenost između vrha i kanala korigiranog napadnog ruba.

Sinusoidni profil korigiranog napadnog ruba može se prikazati jednadžbom:

$$x_t = m * \sin(n * t) \quad (19)$$

$m$  - vrijednost amplitude u mm

$n$  – valna duljina u mm

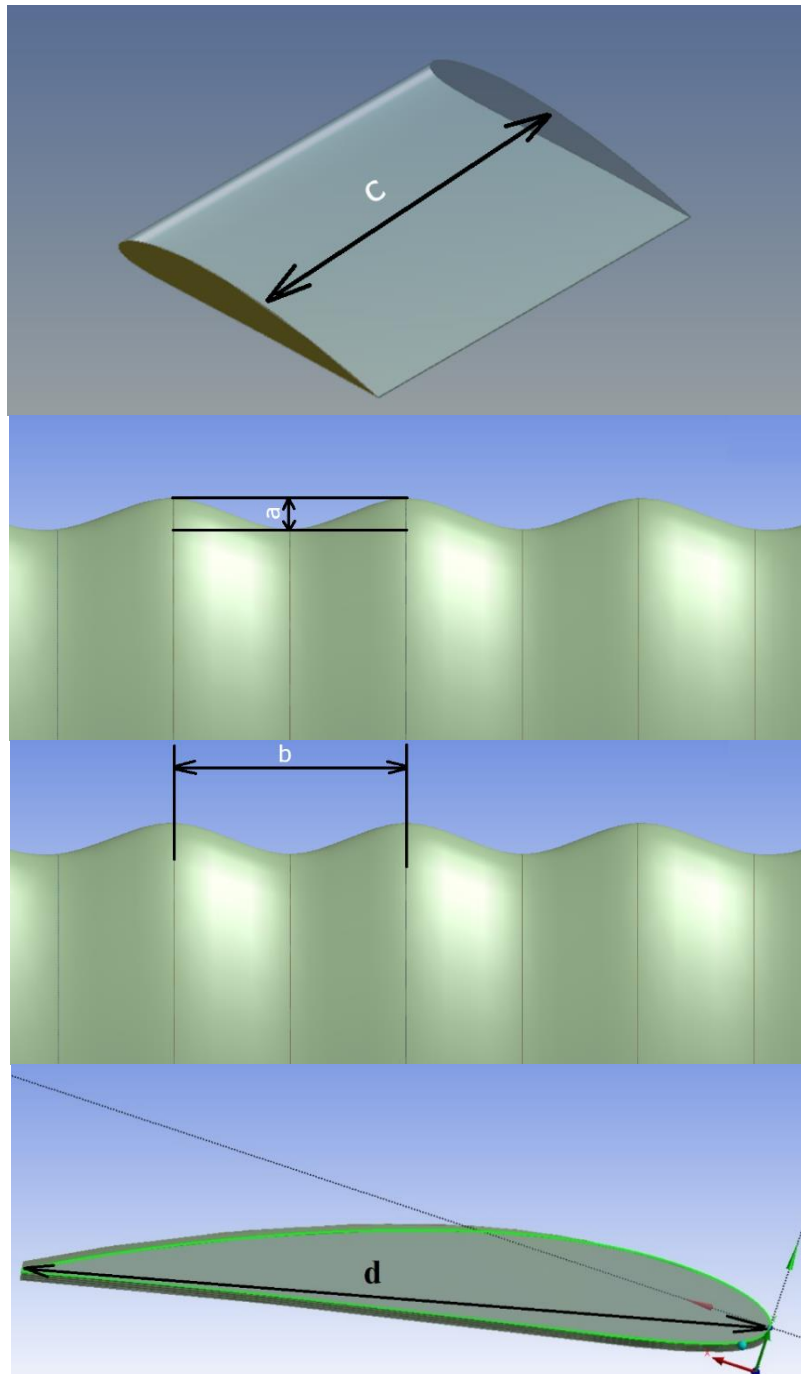
$t$  – parametar koji predstavlja donji raspon  $t_1$  i gornji raspon  $t_2$  za koji vrijedi  $t_1 < t < t_2$ .

Razlika između  $t_1$  i  $t_2$  je duljina aeroprofila u mm. [12]

Jednadžbom (19) može se generirati sinusoidni napadni rub s konstantnom amplitudom i valnom duljinom.

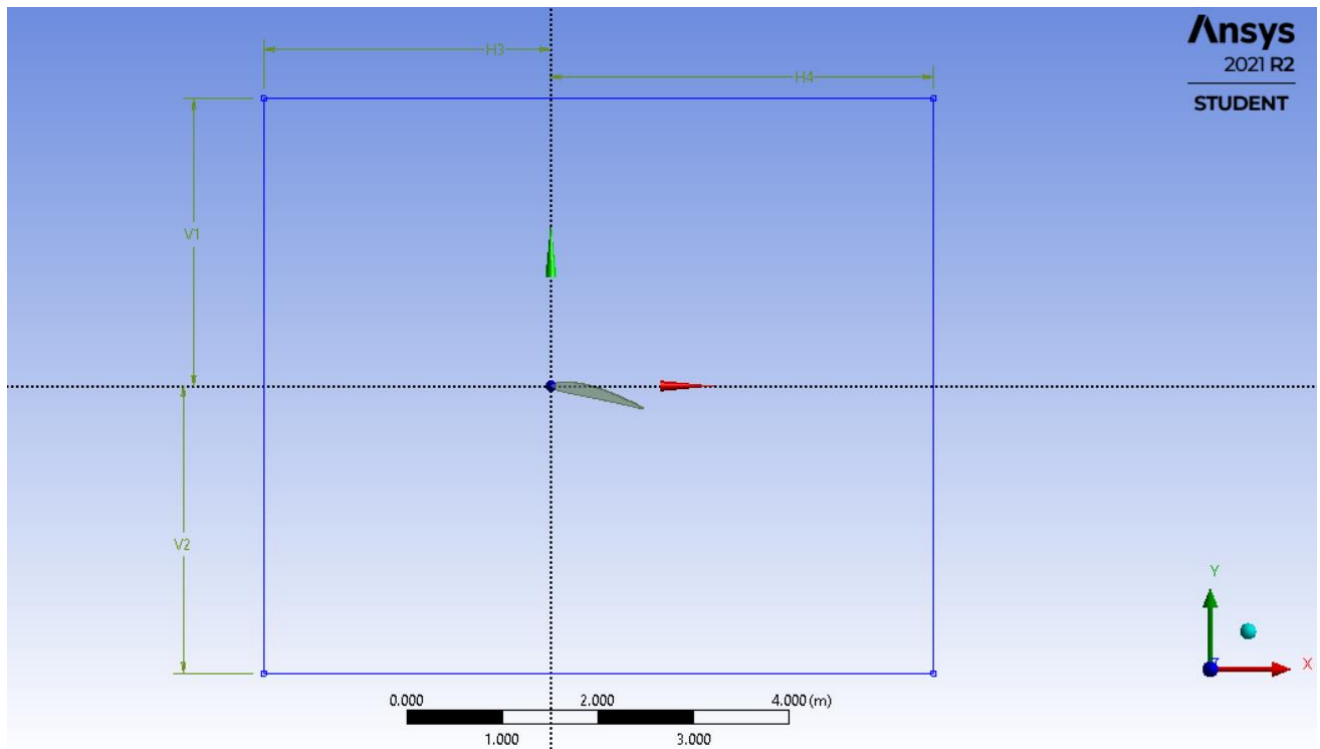
Slika 37 prikazuje duljinu, amplitudu, duljinu tetive i valnu duljinu aeroprofila.





Slika 37. Duljina aeroprofila (c), valna duljina (b), amplituda (a), duljina tetive (d)

U tablici 2 prikazane su kotirane dimenzije domene iz slike 38 . Prikazana domena se kasnije u radu diskretizira kontrolnim volumenima te se postavljaju rubni uvjeti.



Slika 38. Dimenzije domene

OZNAKA	DIMENZIJE DOMENE
V1	3m
V2	3m
H3	3m
H4	4m

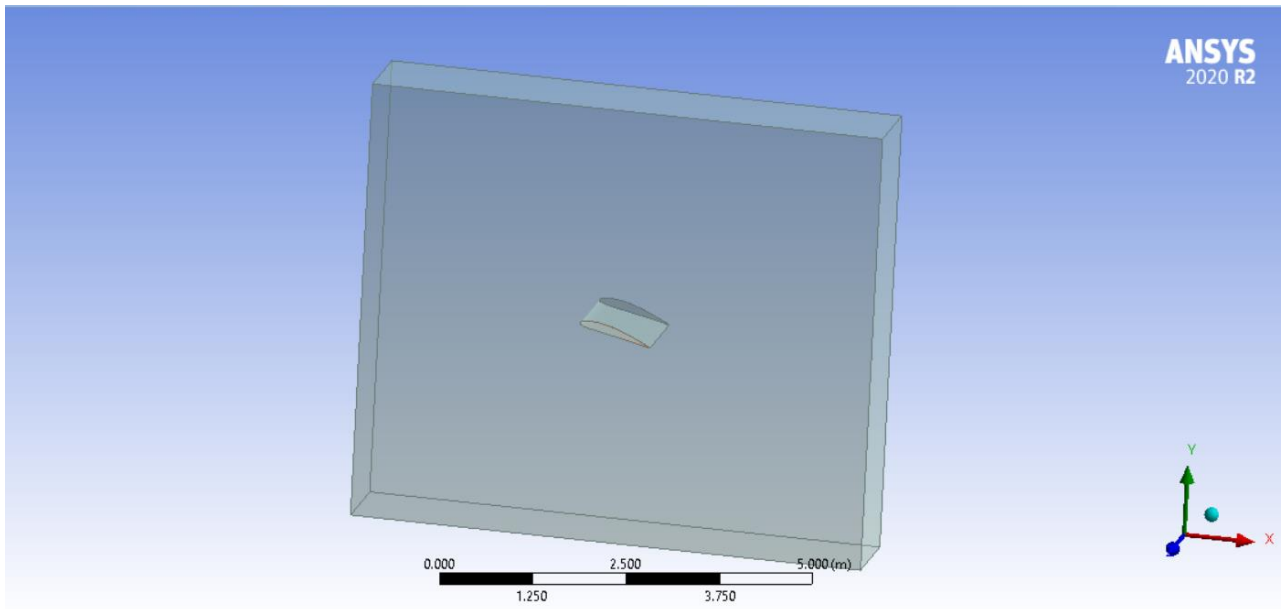
Tablica 2. Prikaz dimenzija domene

## 8.2. Diskretizacija domene i rubni uvjeti

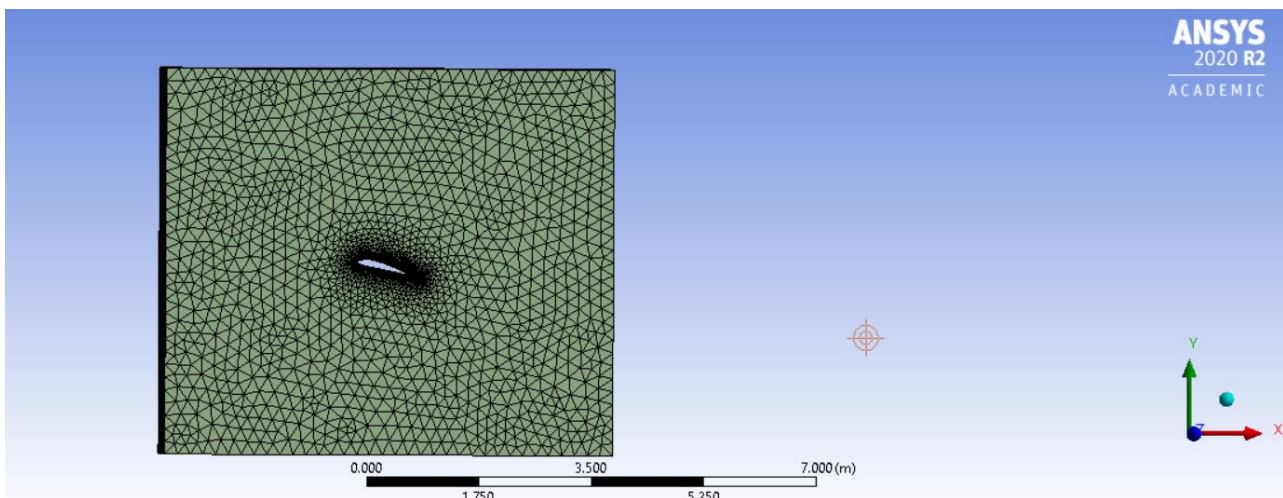
Metoda kontrolnih volumena je najčešće korištena metoda u mehanici fluida. Kod ove metode domena strujanja fluida se diskretizira u konačan broj kontrolnih volumena za koje vrijede diferencijalne jednačbe koje opisuju strujanje nekog fluida. [17]

Za provođenje simulacije potrebno je odrediti domenu strujanja fluida. Kod strujanja fluida oko nekog tijela vrlo je bitno postaviti granice proračunskog područja. U ovom slučaju tetiva aeroprofila iznosi 1m. Granica domene mora biti na takvoj udaljenosti od aeroprofila na kojoj vrijede uvjeti neporemećenog strujanja, stoga je granica izlaza fluida postavljena na tri duljine aeroprofila kako bi se uhvatili tragovi vrtložnog strujanja na stražnjoj strani.

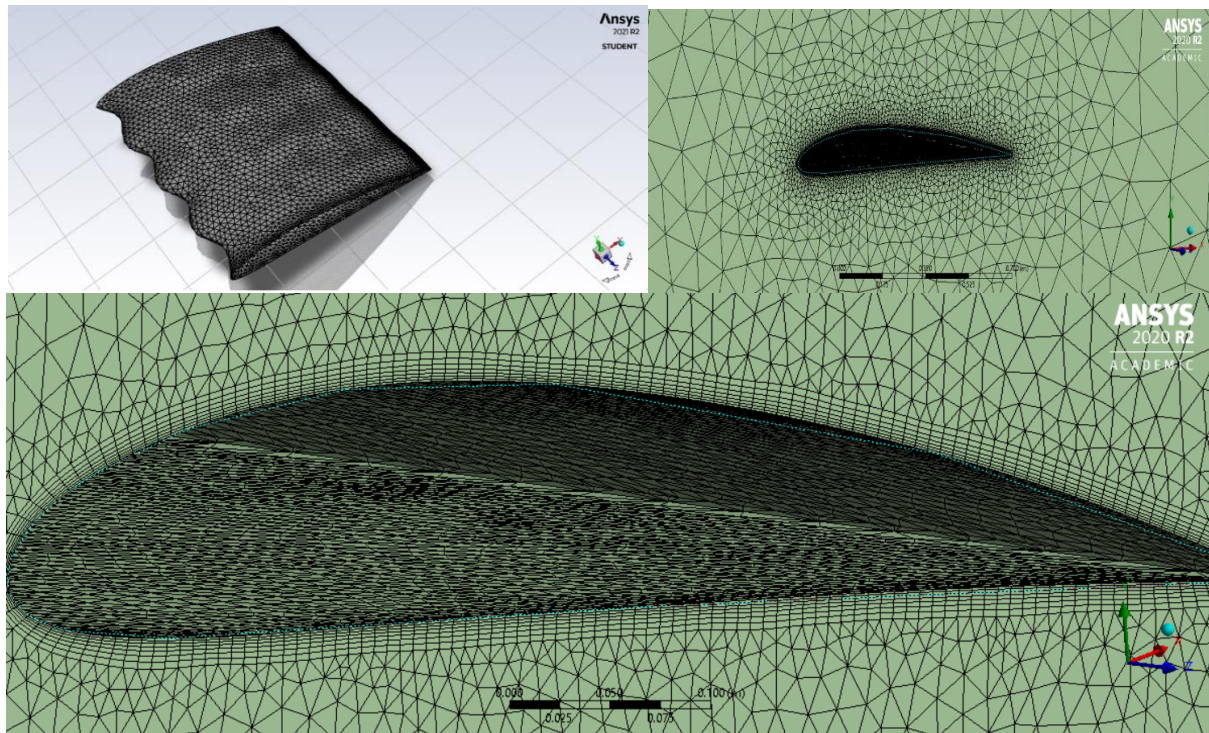
Pri opstrujavanju tijela postoje veliki gradijenti fizikalnih veličina u graničnom sloju. Iz tog razloga je geometrijska mreža finija u tom području aeroprofila kako bi se uhvatili gradijenti tlaka te vrtlozi, te kako bi rezultati numeričke simulacije bili što bliže stvarnoj pojavi strujanja fluida. U području daleko od aeroprofila mreža je rjeđa.



Slika 39. Domena strujanja fluida



Slika 40. Mreža kontrolnih volumena u području proračuna

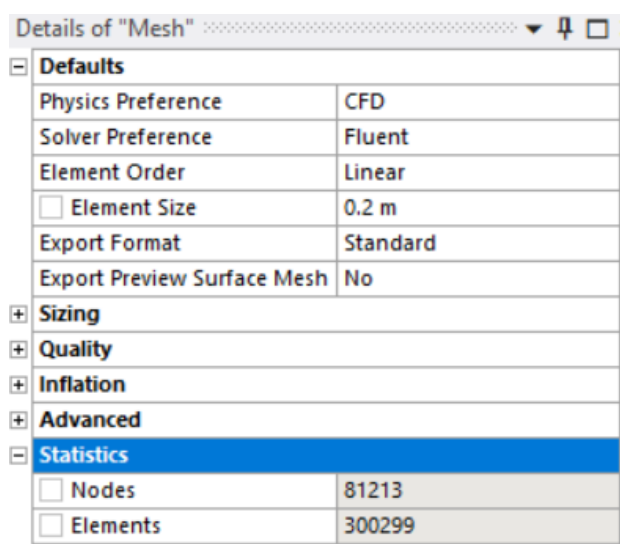


Slika 41. Prikaz gustoće mreže domene i modela aeroprofila

Slika 41 prikazuje najfiniji dio proračunske mreže. Postavljena mreža oko aeroprofila sastoji se od trokutnih i četverokutnih kontrolnih volumena. Uz samu površinu aeroprofila nalazi se strukturirani dio mreže koji se sastoji od četverokutnih elemenata. Kontrolni volumen ima svoje težište u kojemu se nalazi proračunski čvor. Za svaki kontrolni volumen računaju se jednadžbe očuvanja.

Korištena mreža oko aeroprofila je nestrukturirana. Prilikom ovog koraka treba imati na umu da veći ukupni broj elemenata znači točnije rezultate simulacije. Idealno bi bilo zadati što manju veličinu elemenata kako bi dobili što veći broj elemenata, ali njihov preveliki broj mogao bi usporiti brzinu analize. Stoga je bilo potrebno naći optimalnu varijantu između željene točnosti, brzine procesa i raspoloživih računalnih resursa.

Ukupan broj čvorova na modelu iznosi 81213, a ukupan broj elemenata iznosi 300299.



Slika 42. Broj čvorova i broj elemenata

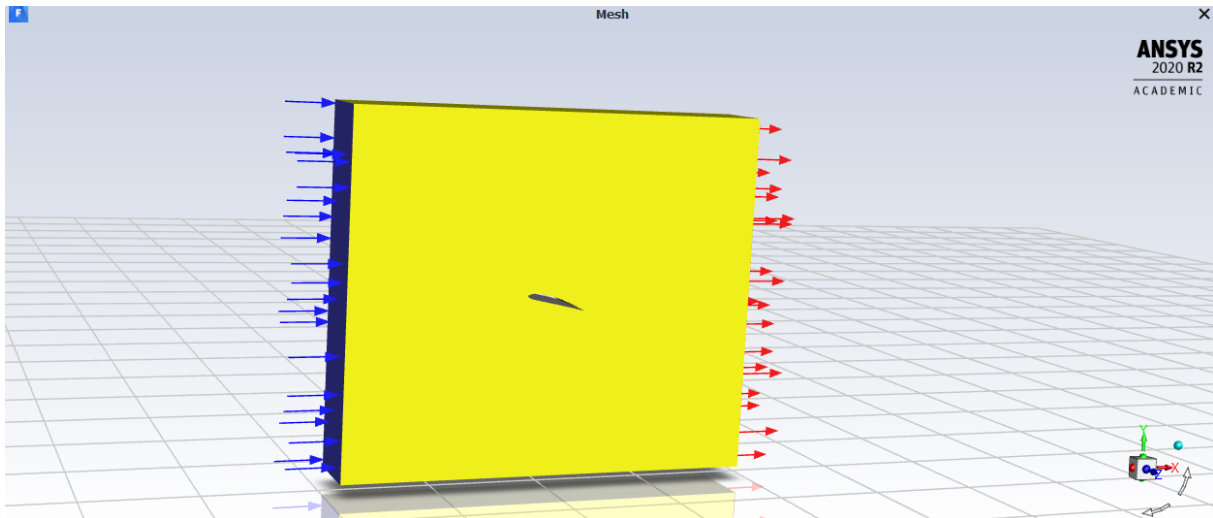
Prilikom izrade numeričke simulacije potrebne vrijednosti su brzina strujanja zraka oko aeroprofila na ulazu u domenu te statički tlak na izlazu iz domene. Rubni uvjeti su postavljeni za vanjske plohe domene te za sam aeroprofil unutar domene. Plave strelice (slika 43) prikazuju ulaz fluida a crvene izlaz fluida iz domene. Na ulazu u domenu brzina strujanja fluida (Inlet Velocity) iznosi 50 m/s te je sa slike jasno vidljivo da je definirani smjer brzine fluida paralelan s x-osi. Na izlaznoj površini domene zadani je statički tlak 0 Pa, tj. jednak je atmosferskom tlaku.

IME GRANICE	TIP GRANICE	VRIJEDNOSTI
Inlet	Velocity Inlet	50 m/s
Outlet	Pressure Outlet	0 Pa
Symmetry	Symmetry Plane 1	-
Symmetry	Symmetry Plane 2	-
Airfoil	Stationary Wall (No slip)	-

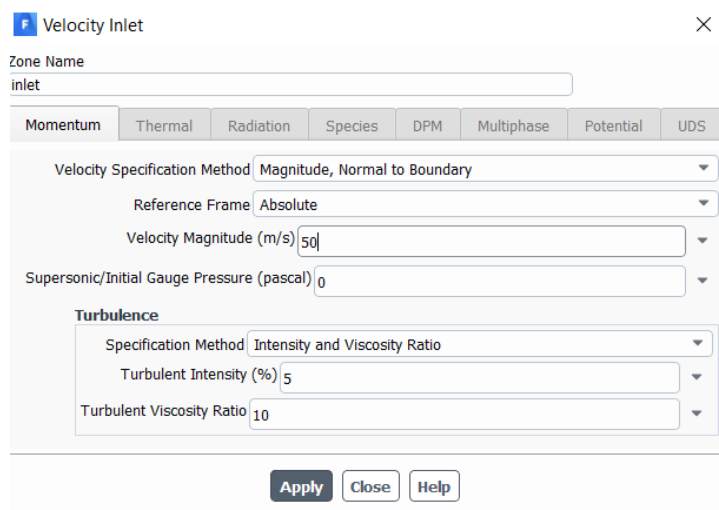
Tablica 3. Rubni uvjeti

U tablici 3 prikazani su rubni uvjeti. Rubni uvjeti postavljeni su na ulazu u domenu i izlazu. Na ulazu je zadana brzina fluida (protok) dok se na izlazu rubni uvjet modelira zadanim tlakom. Na stijenci je zadan uvjet „no slip“, što podrazumijeva da nema relativne brzine između stijenke aeroprofila i fluida.

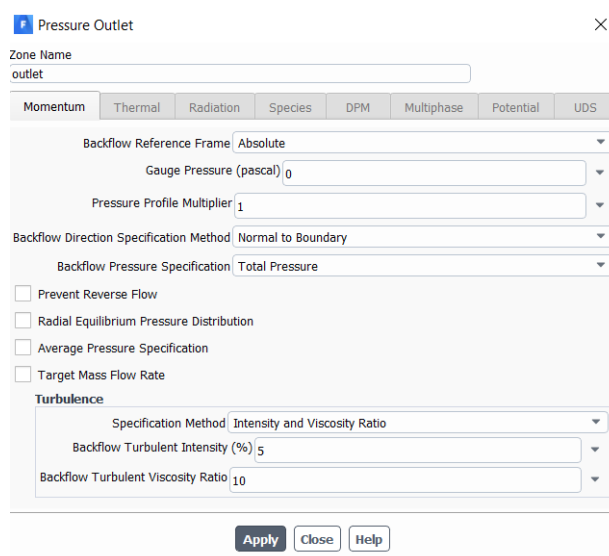
Symmetry označuje granicu simetrije, tj. smatra se da je strujanje simetrično s obzirom na granicu na koju je postavljen uvjet.



Slika 43. Ulaz i izlaz fluida iz domene

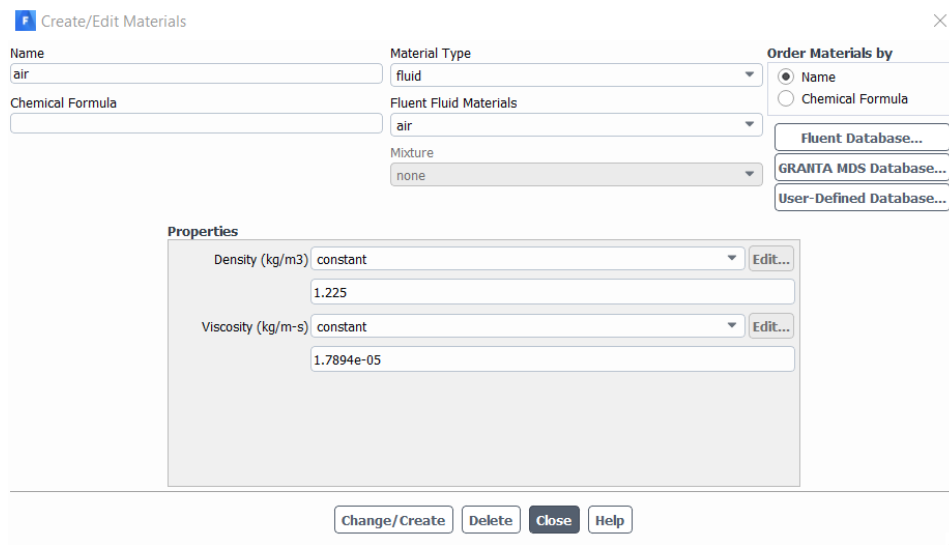


Slika 44. Brzina strujanja fluida



Slika 45. Statički tlak

Odabrani fluid je zrak. Viskoznost za zrak iznosi  $1,7894 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$  dok gustoća zraka iznosi  $1,225 \text{ kg/m}^3$ .



Slika 46. Odabir fluida

### 8.3. Simulacija strujanja u Ansys Fluent paketu

Kod projektiranja zrakoplova ili automobila koristi se računalna dinamika fluida da se dobiju informacije o utjecaju oblika i karaktera strujanja na sile otpora i uzgona. Primjenom računalne dinamike fluida dolazi se brže i jeftinije do željenih rezultata nego što bi to postigli eksperimentalnim mjerenjima. Ansys fluent je softverski paket razvijen za precizno simuliranje ponašanja fluida te za rješavanje raznih problema koji uključuju i dinamiku fluida.

Turbulentno strujanje je izrazito nestacionarno i za stacionarne rubne uvjete. U strujanju fluktuacije svih fizikalnih veličina izazivaju nestacionarnost. Ako izostavimo član lokalne promjene iz diskretiziranih jednadžbi za količinu gibanja, turbulentno strujanje oko zrakoplova se tada može analizirati kao stacionarno strujanje.

U ovom radu strujanje je zadano kao stacionarno čime pojednostavljujemo problem. Strujanje fluida oko aeroprofila odvija se pri niskim vrijednostima Machovog broja stoga strujanje možemo smatrati nestlačivim strujanjem (gustoća fluida ostaje konstantna u strujanju). Kod nestlačivog strujanja gibanje fluida se opisuje zakonom očuvanja mase i zakonom očuvanja momenta količine gibanja.

Machov broj se računa prema sljedećem izrazu:



$$M_a = \frac{v}{v_{zvuka}} \quad (20)$$

Također, nestlačivo strujanje znači da otpor isključivo ovisi o viskoznosti zraka. Strujanje je viskozno unutar graničnog sloja, što znači da je opisano Navier-Stokesovim jednadžbama.

Skup jednadžbi zatvoren je  $k - \omega$  SST modelom turbulencije, gdje SST predstavlja Shear Stress Transport. Tim modelom rješavaju se dvije transportne jednadžbe, jednadžbu turbulentne kinetičke energije  $k$  i jednadžbu specifične brzine disipacije kinetičke energije turbulencije  $\omega$ .

$k - \omega$  SST model u sebi sadrži dva modela:  $k - \omega$  koji daje dobre rezultate u području graničnog sloja i osjetljiv je na razinu turbulencije u slobodnoj struji, dok model turbulencije

$k - \varepsilon$  daje vrlo dobre rezultate u zonama udaljenim od same stijenke i nema osjetljivosti poput  $k - \omega$  modela. Model djeluje povoljno kod nepovoljnih gradijenata tlaka i odvajanja strujanja.

Dvije transportne jednadžbe  $k - \omega$  SST modela prikazane su u nastavku: [8]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho k u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - y_k + s_k \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \omega u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - y_\omega + D_\omega + s_\omega \quad (22)$$

$G_k$  – generiranje turbulentne kinetičke energije uslijed gradijenata brzina

$G_\omega$  – nastajanje specifične brzine disipacije energije

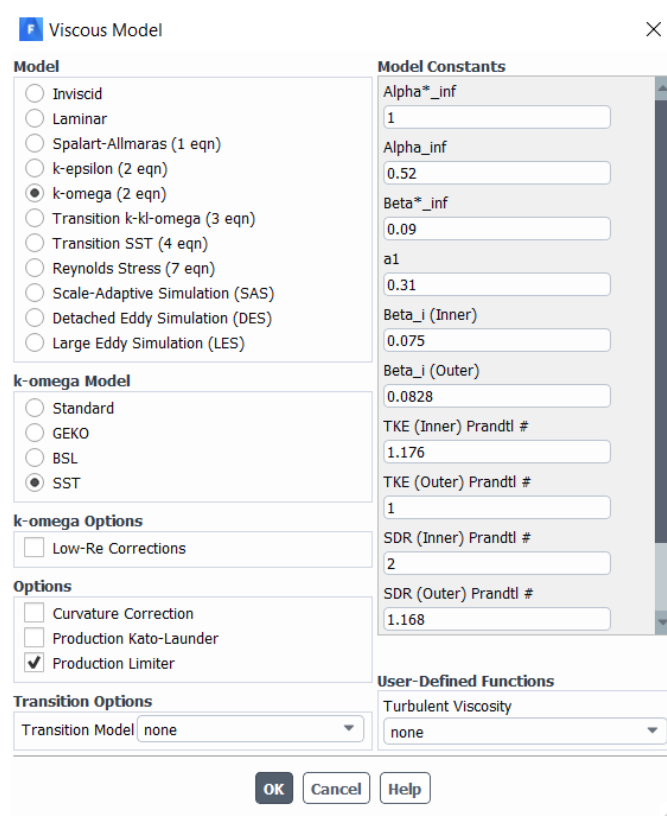
$\Gamma_k$  i  $\Gamma_\omega$  – koeficijent difuzivnosti  $k$  i  $\omega$

$y_k$  i  $y_\omega$  – disipacija  $k$  i  $\omega$  uslijed turbulencije

$s_k$  i  $s_\omega$  – određeni izvori po volji korisnika

$D_\omega$  – nastaje transformacijom standardnog  $k - \varepsilon$  uslijed spajanja dva standardna modela turbulencije ( $k - \omega$  i  $k - \varepsilon$ ) u jedinstveni SST  $k - \omega$  model. [8]





Slika 47. Odabir modela turbulencije

Kao što je vidljivo na slici 47 odabrani turbulentni model je  $k - \omega SST$  koji ima dvije jednačbe. Pri suprotnim gradijentima tlaka ovaj model pokazuje bolje rezultate što je česta pojava u zrakoplovstvu.

Za simulaciju se razmatrao slučaj trodimenzionalnog (3D) strujanja.

Numerička simulacija strujanja oko aeroprofila je izvršena kod napadnih kuteva od  $0^\circ$  i  $14^\circ$ .

## 8.4. Raspored tlaka i brzina

U potprogramu Fluid Flow (Fluent) dobiveni je raspored tlaka i brzina za  $k - \omega SST$  model turbulencije na površinama koje su u području interesa. Prilikom rješavanja Navier – Stokesovih jednačbi koristi se *pressure based* solver. Iz momentne jednačbe dobije se polje brzine, a polje tlaka dobije se rješavanjem jednačbe tlaka. Jednačba tlaka dobije se kombiniranjem jednačbe kontinuiteta i momentne jednačbe. Na slikama u nastavku polje brzina i polje tlaka prikazani su zasebno za napadni kut od  $0^\circ$  i napadni kut od  $14^\circ$ . Rezultati uzgona i otpora prikazani su u tablici 4 i tablici 5.

U nastavku su dane jednadžbe koeficijenta uzgona i otpora.

Koeficijent uzgona:

$$C_L = \frac{L}{(\rho \cdot \frac{V^2}{2} \cdot A)} \quad (23)$$

Kao što se vidi iz jednadžbi koeficijent uzgona ovisi o brzini leta  $V$ , gustoći zraka  $\rho$  i površini krila  $A$  na koju djeluje sila uzgona  $L$ .

Koeficijent otpora definira aerodinamičku silu otpora koja djeluje na objekt prilikom kretanja kroz fluid. Sila otpora djeluje suprotno od relativnog smjera kretanja objekta. [12]

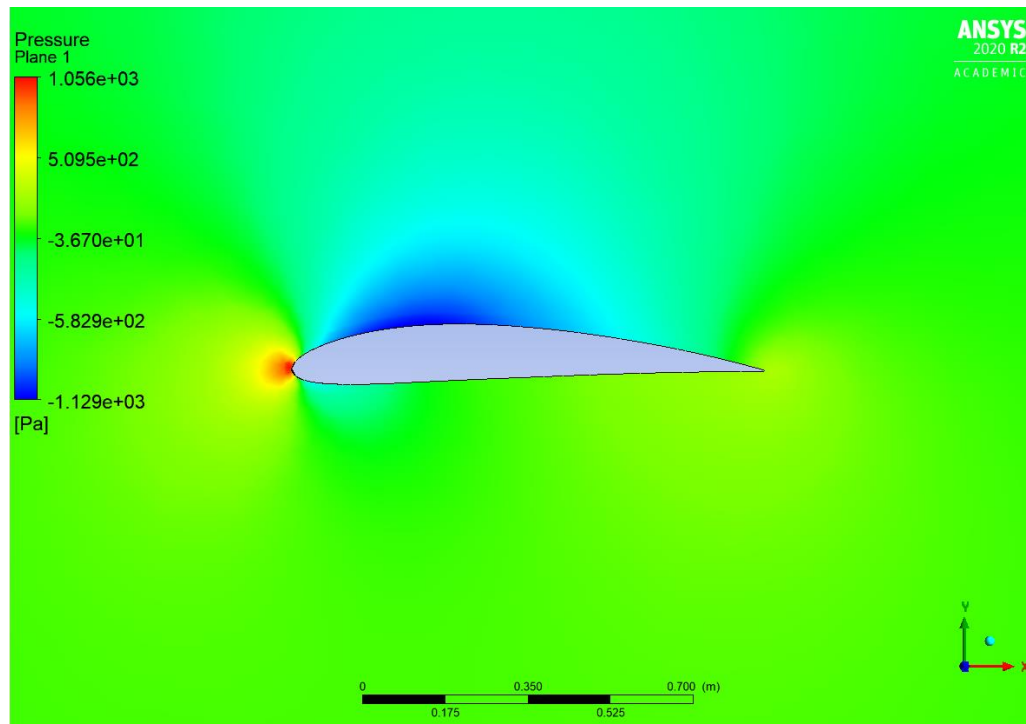
Koeficijent otpora:

$$C_D = \frac{D}{(\rho \cdot \frac{V^2}{2} \cdot A)} \quad (24)$$

Napadni kut 0°			
	Obično krilo	Korigirani napadni rub na ivici	Korigirani napadni rub preko cijelog krila
Uzgon ( $C_L$ )	0.5279	0.4904	0.5567
Otpor ( $C_D$ )	0.0146	0.0156	0.0157

Tablica 4. Prikaz uzgona i otpora (napadni kut 0°)

Struja fluida koja dolazi od granice ulaza udara u prednji dio aeroprofila gdje dolazi do naglog pada brzine i porasta tlaka kod sva tri modela aeroprofila. Ako zanemarimo debljinu aeroprofila, otpor će rasti s porastom napadnog kuta. Na slikama se može vidjeti da kod napadnog kuta od 0° najveći koeficijent uzgona pokazuje aeroprofil s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila. Također, krilo bez korigiranog napadnog ruba pokazuje bolja aerodinamička svojstva u usporedbi s krilom koje ima korigirani napadni rub na ivici.



Slika 48. Polje tlaka aeroprofila bez korigiranog napadnog ruba

Slika 48 prikazuje raspodjelu tlaka. Maksimalna vrijednost tlaka je na napadnoj ivici aeroprofila. Također je jasno vidljiv pad tlaka na gornjoj krivulji aeroprofila. Zbog razlike tlakova ispred i iza krila nastaje sila otpora.

U Bernoullijevoj jednadžbi (25) tlak se može promatrati kao statički, dinamički i hidrostatski tlak.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = konst. \quad (25)$$

Statički, dinamički i hidrostatski tlak zajedno čine totalni tlak. Eliminacijom hidrostatskog tlaka dinamički i statički tlak predstavljaju zaustavni tlak. [3]

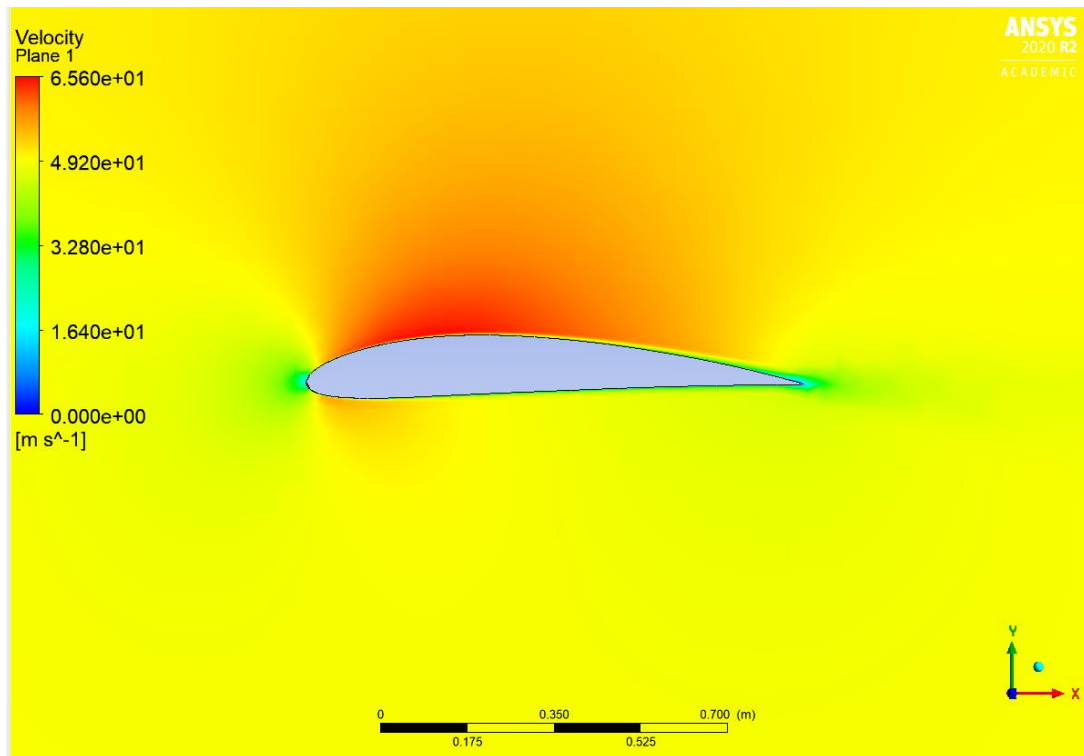
$p$  – statički tlak

$\frac{\rho v^2}{2}$  - dinamički tlak

$\rho gh$  - hidrostatski tlak

Područje u kojem je dinamički tlak minimalan (minimalna brzina strujanja fluida), statički tlak postaje maksimalan kako bi se zadovoljila Bernoullijeva jednadžba. [3]

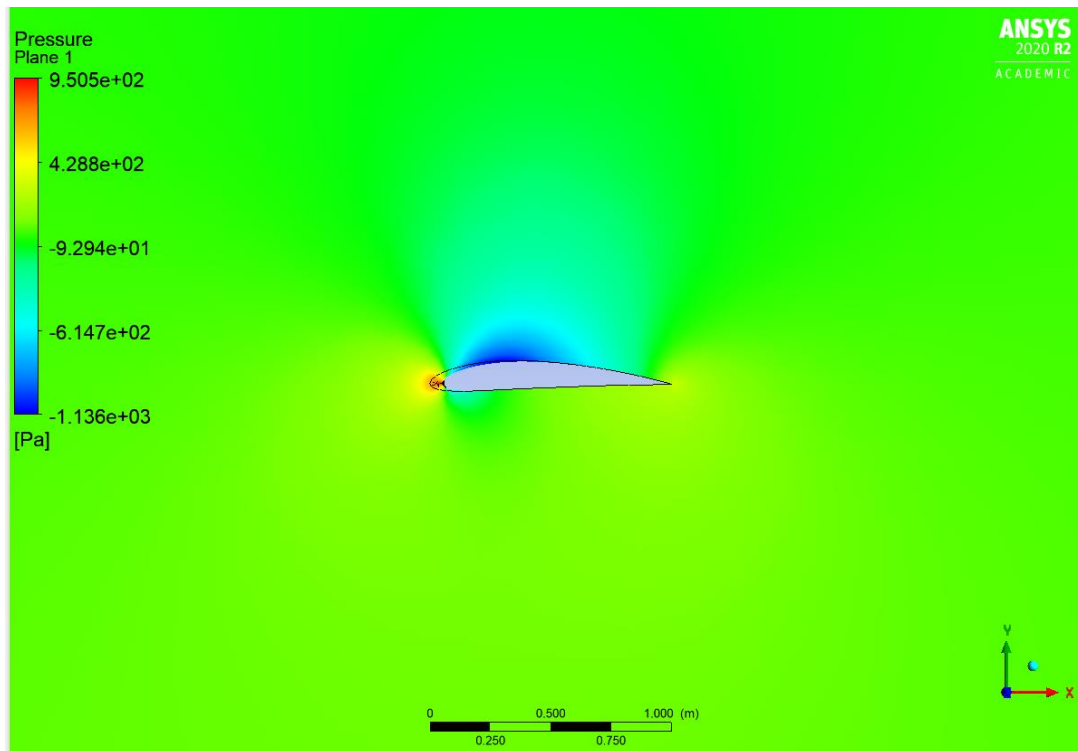
Na slici je također vidljiv prijelaz pozitivnog statičkog tlaka u negativan tlak na gornjoj krivulji aeroprofila. Ako struja fluida koja nastrojava na aeroprofil ubrzava, potencijalna energija fluida se pretvara u kinetičku energiju. Ta promjena uzrokuje prijelaz pozitivnog tlaka u negativan.



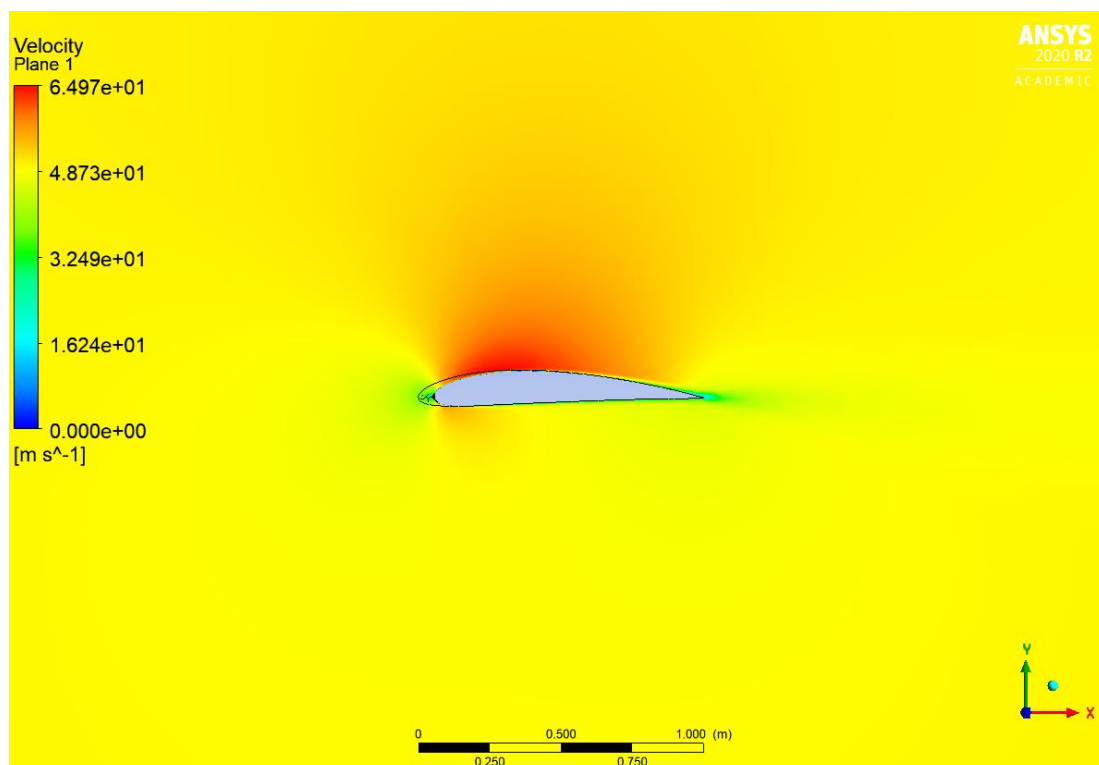
Slika 49. Distribucija brzine aeroprofila bez korigiranog napadnog ruba

Strujnice koje djeluju preko gornje površine su brže nego strujnice na donjoj površini, čime dolazi do povećanja razlike brzine gornje i donje površine. Također, to rezultira i povećanjem diferencijalnog tlaka.

Na slici 49 gdje je prikazana distribucija brzine može se vidjeti da je najveća brzina upravo na gornjoj krivulji aeroprofila.



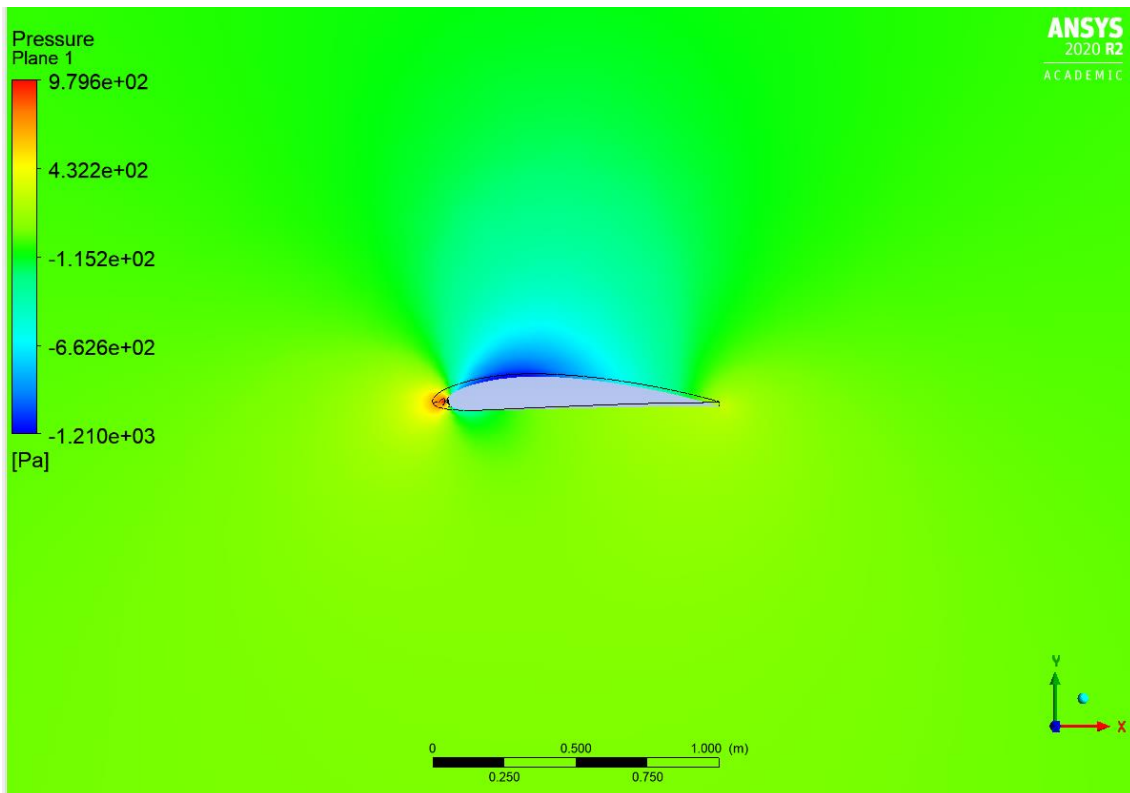
Slika 50. Polje tlaka aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici



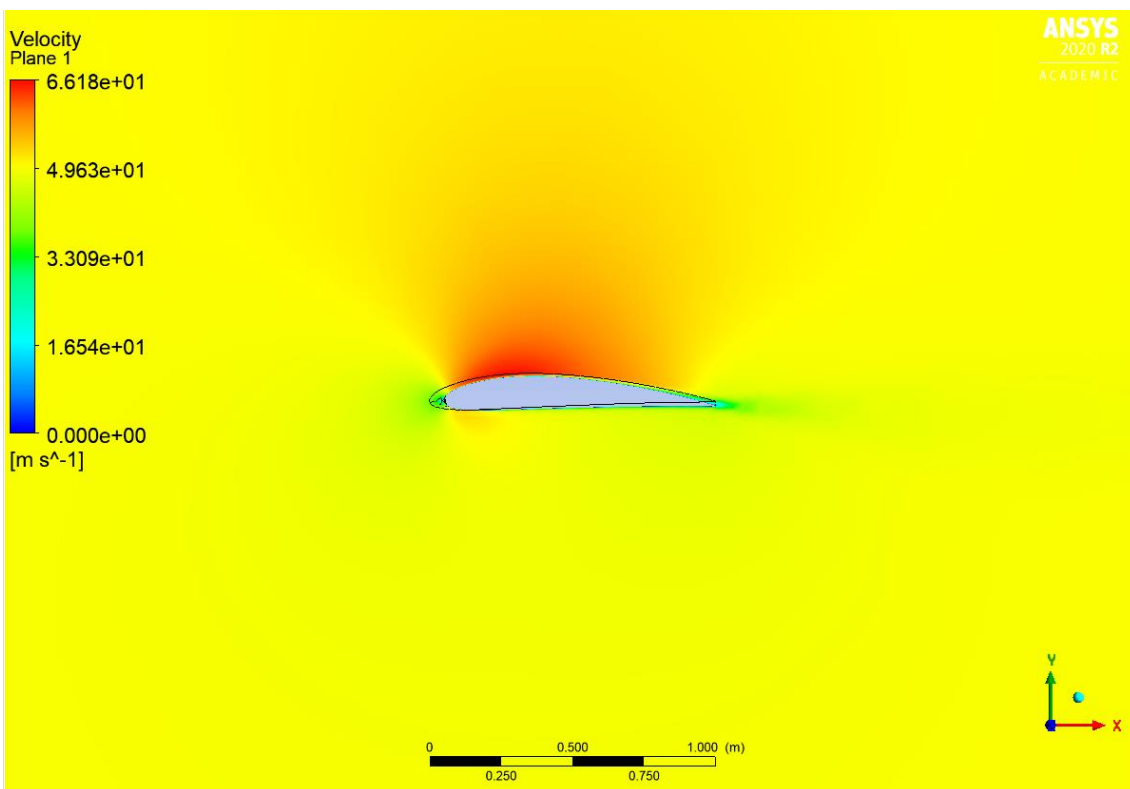
Slika 51. Distribucija brzine aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici

Nailaskom toka fluida na aeroprofil dolazi do formiranja graničnog sloja. Struja zraka prati površinu aeroprofila s korigiranim napadnim rubom cijelom dužinom pa je strujanje glatko.

Kod niskih napadnih kuteva do odvajanja strujnica dolazi na stražnjem bridu aeroprofila, dok na ostatku aeroprofila protok fluida prati površinu bez odvajanja.



Slika 52. Polje tlaka aeroprofila s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila

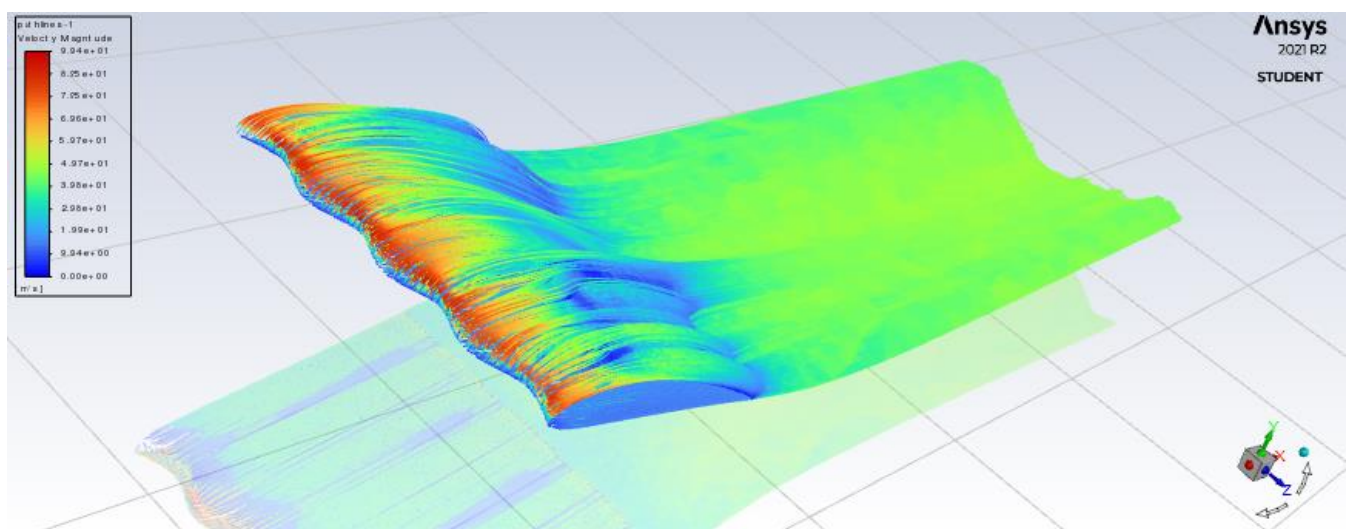


Slika 53. Distribucija brzine aeroprofila s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila

Napadni kut 14°			
	Obično krilo	Korigirani napadni rub na ivici	Korigirani napadni rub preko cijelog krila
Uzgon ( $C_L$ )	0.9410	1.5597	1.4094
Otpor ( $C_D$ )	0.2931	0.2002	0.2609

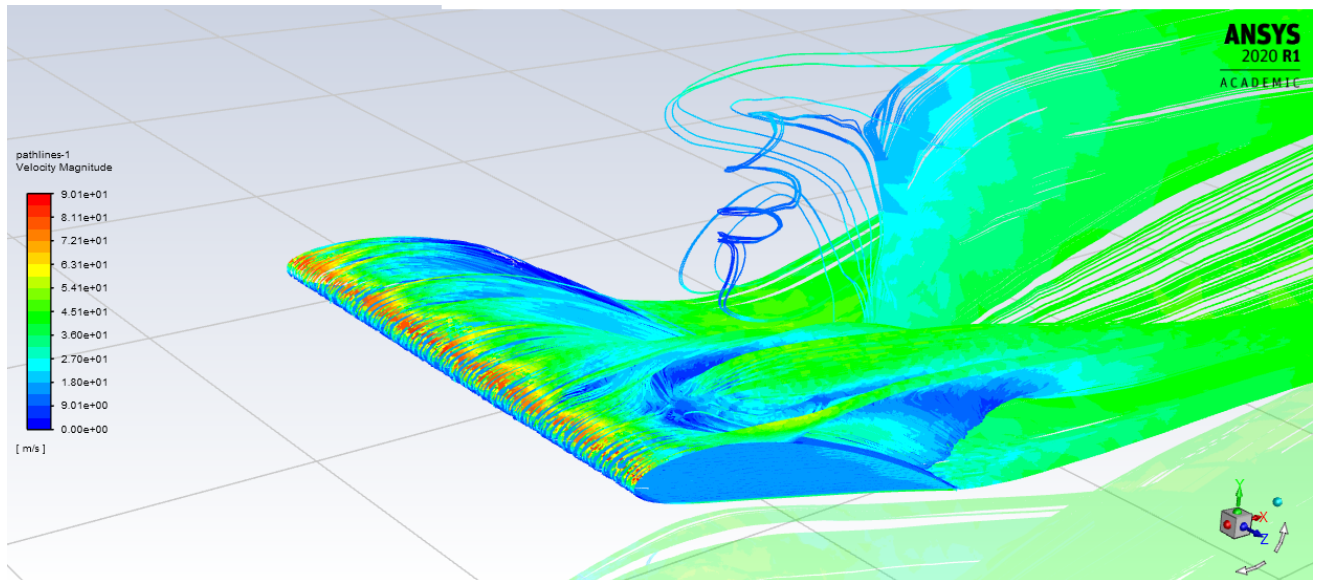
Tablica 5. Prikaz uzgona i otpora (napadni kut 14°)

Na slikama je vidljivo da kod većih napadnih kuteva dolazi do odvajanja strujnica fluida te stvaranja vrtloga na stražnjoj strani aeroprofila. Kod običnog krila odvajanje strujnica je intenzivnije. Do odvajanja strujnica dolazi u određenoj točki (točka separacije je bliža napadnoj ivici) i proteže se sve do kraja aeroprofila. Kod aeroprofila s korigiranim napadnim rubom vidljiva je razlika u odnosu na običan aeroprofil, gdje dolazi do znatno manjeg odvajanja strujnica. Protok fluida je usmjeren kroz kanale krila te se sprječava / odgađa odvajanje strujnica uz stijenku aeroprofila. Po površini aeroprofila putuje dovoljna količina fluida te se lakše izbjegne nagli slom uzgona kod većih napadnih kuteva. Iz simulacije se vidi da primjena korigiranog napadnog ruba ima popriličan aerodinamički utjecaj na povećanje uzgona kod većih napadnih kuteva te da najbolji rezultat pokazuje aeroprofil s korigiranim napadnim rubom na ivici. Iz prikaza distribucija brzina vidljivo je da maksimalna brzina raste s povećanjem napadnog kuta.

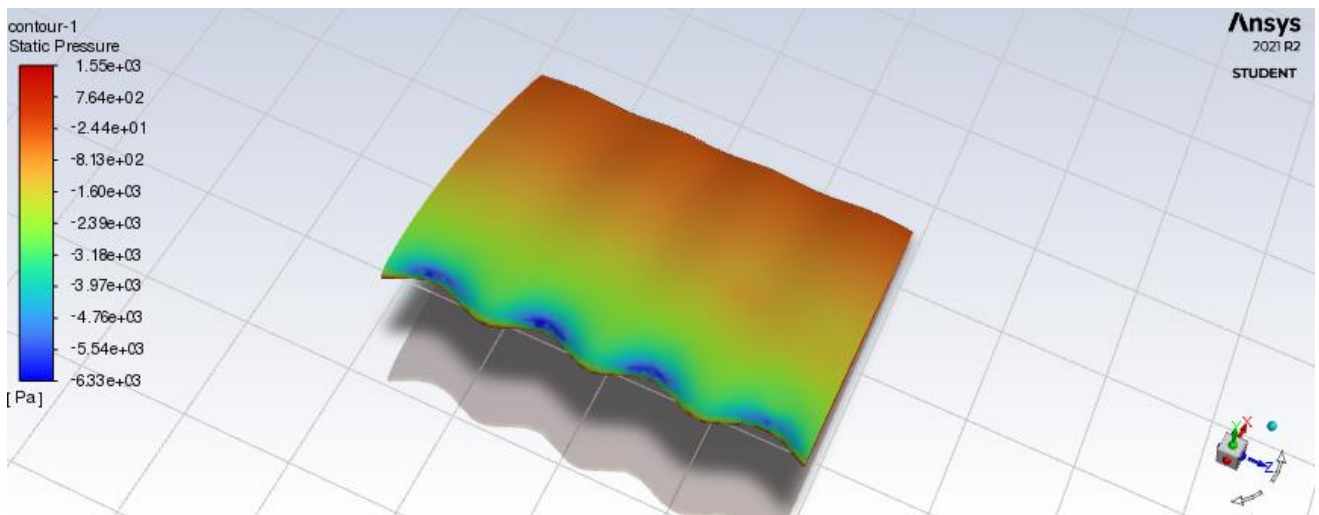


Slika 54. Prikaz strujnica krila s korigiranim napadnim rubom

Neposredno uz samu površinu aeroprofila i unutar vrtložnog traga najviše se izražava poremećaj u polju brzine. Brzina se mijenja od 0 na površini (unutar graničnog sloja) do brzine neporemećenog strujanja daleko od stijenke.

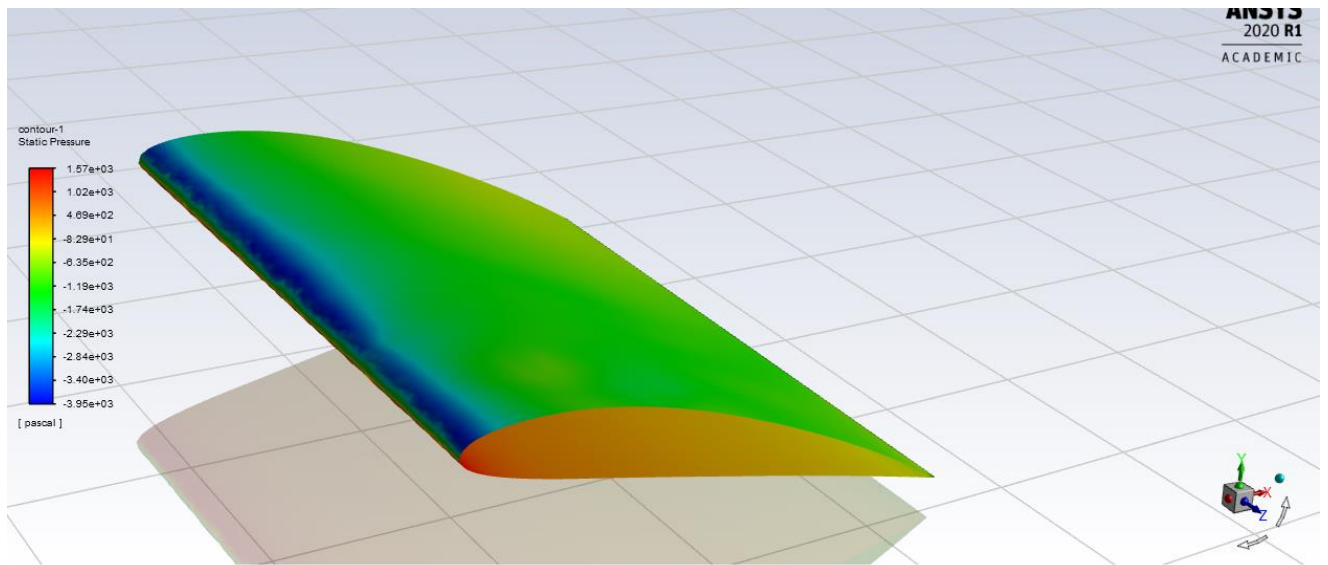


Slika 55. Prikaz strujnica običnog krila



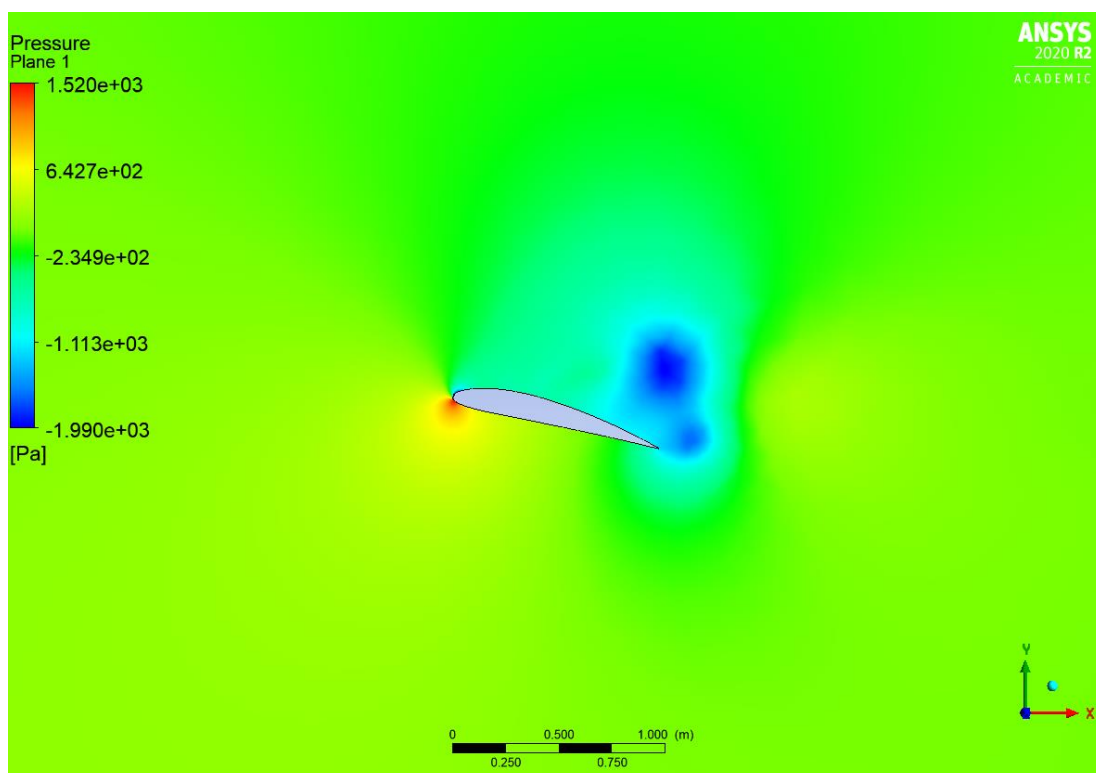
Slika 56. Prikaz raspodjele statičkog tlaka krila s korigiranim napadnim rubom



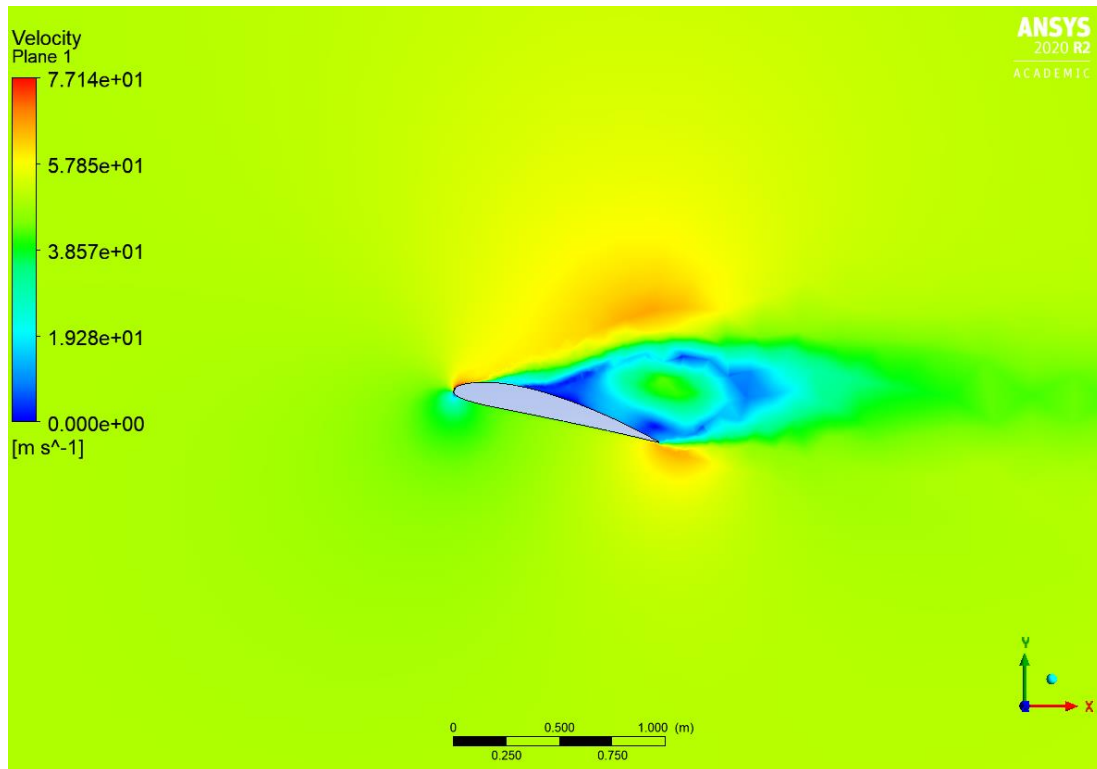


Slika 57. Prikaz raspodjele statičkog tlaka običnog krila

Na slici 56 se vidi da krilo s korigiranim napadnim rubom ima manji tlak na napadnoj ivici u odnosu na obično krilo slika 57. U kanalima krila s korigiranim napadnim rubom tlak je najmanjeg iznosa, što je očekivano pošto se fluid u tim dijelovima ubrzava.

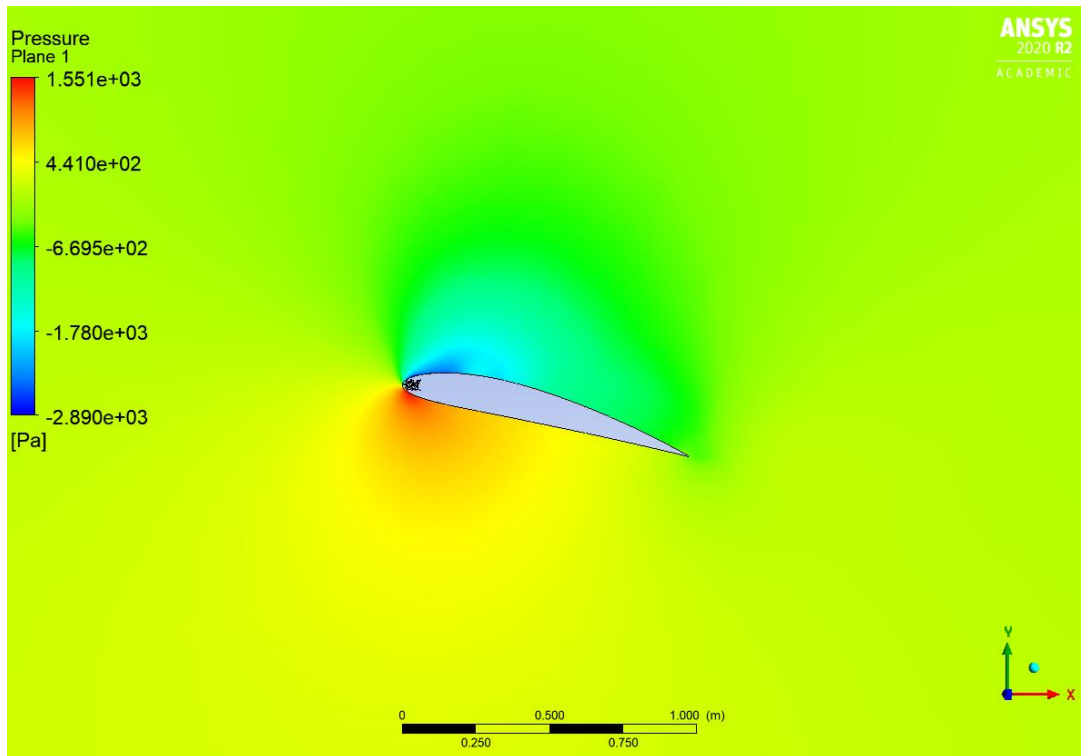


Slika 58. Polje tlaka aeroprofila bez korigiranog napadnog ruba

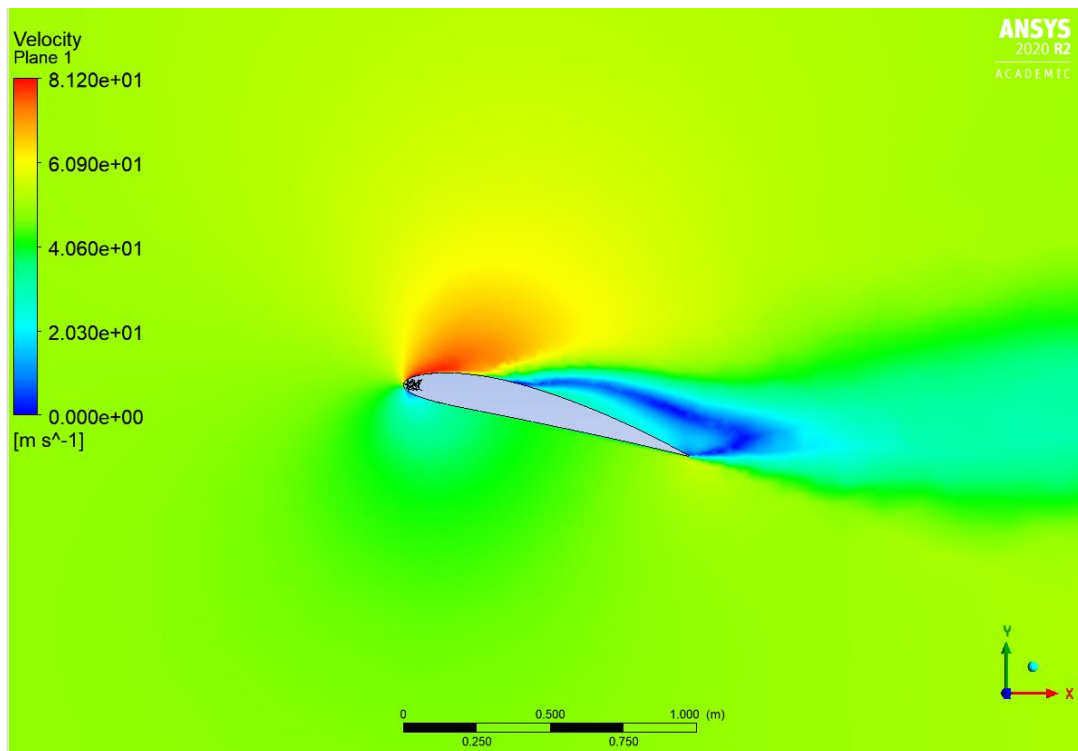


Slika 59. Distribucija brzine aeroprofila bez korigiranog napadnog ruba

Na slici 59 dolazi do usporavanja fluida u graničnom sloju sa naglim gubitkom kinetičke energije što dovodi do odvajanja strujnica s površine aeroprofila. Uslijed odvajanja dolazi do stvaranja vrtloga te deformacije strujnica u nizvodnom toku. Povećanjem napadnog kuta uzgon raste sve dok ne postigne svoj maksimum, nakon čega se njegova vrijednost smanjuje. Vrlo je važno proučavati pojavu vrtložnog strujanja pošto je ta pojava neizbježna u zrakoplovstvu, te tražiti način kako smanjiti utjecaj vrtloženja. Kod napadnog kuta od  $14^\circ$  koeficijent uzgona je znatno manji u odnosu na krilo s korigiranim napadnim rubom.



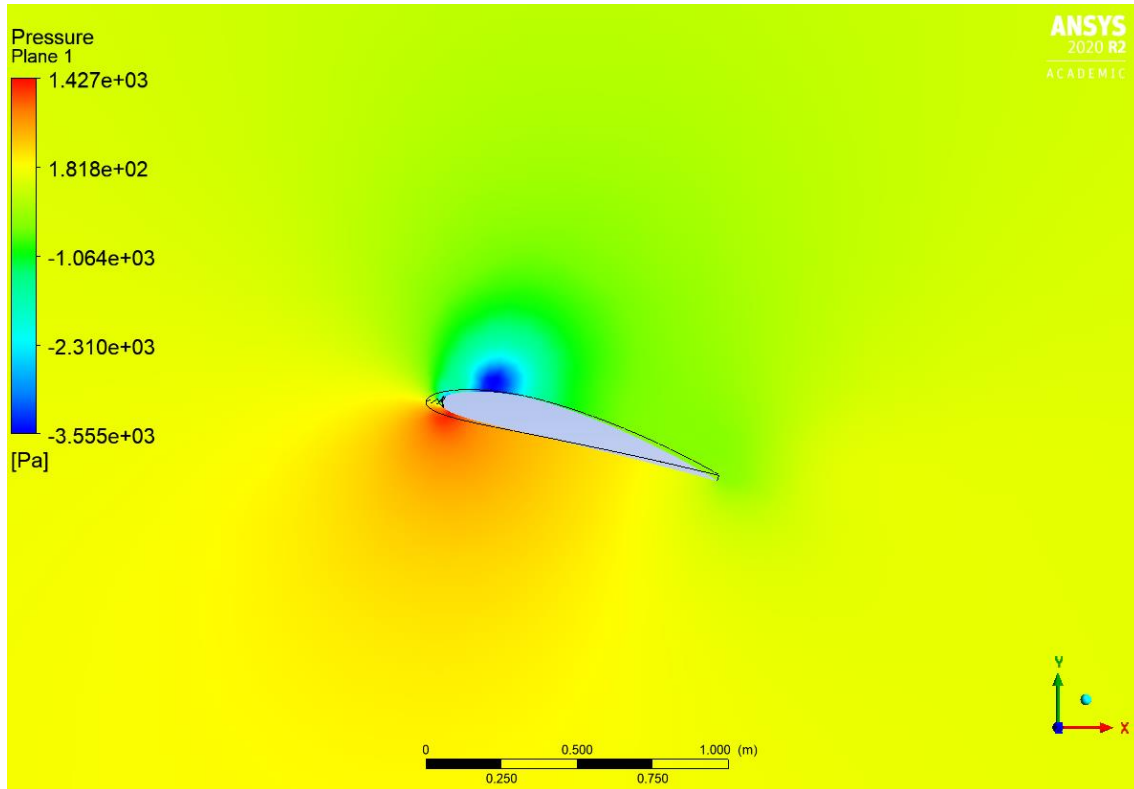
Slika 60. Polje tlaka aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici



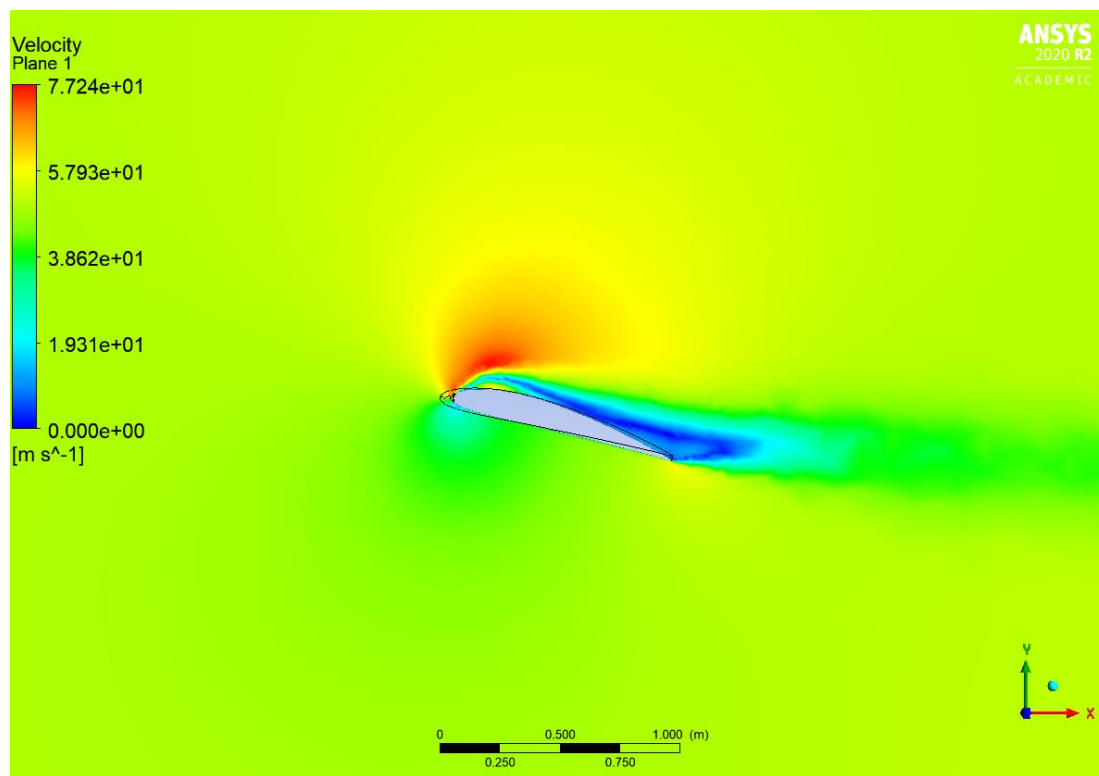
Slika 61. Distribucija brzine aeroprofila s korigiranim napadnim rubom na ivici

Na slici 61 može se vidjeti odvajanje strujnica fluida pod utjecajem vrtloga nastalih kod većeg napadnog kuta krila s korigiranim napadnim rubom na ivici. Protok fluida koji je usmjeren kroz kanale ubrzava te se stvaraju vrtloženja koja povećavaju kinetičku energiju graničnom sloju što

rezultira odgađanjem odvajanja strujnica. Vidljivo je da se značajne promjene kod primjene korigiranog napadnog ruba odražavaju tek kod većih napadnih kuteva. Povećanjem napadnog kuta iznad kritičnog (kut pri kojem je uzgon maksimalan) krilu s korigiranim napadnim rubom se poboljšavaju aerodinamičke performanse.



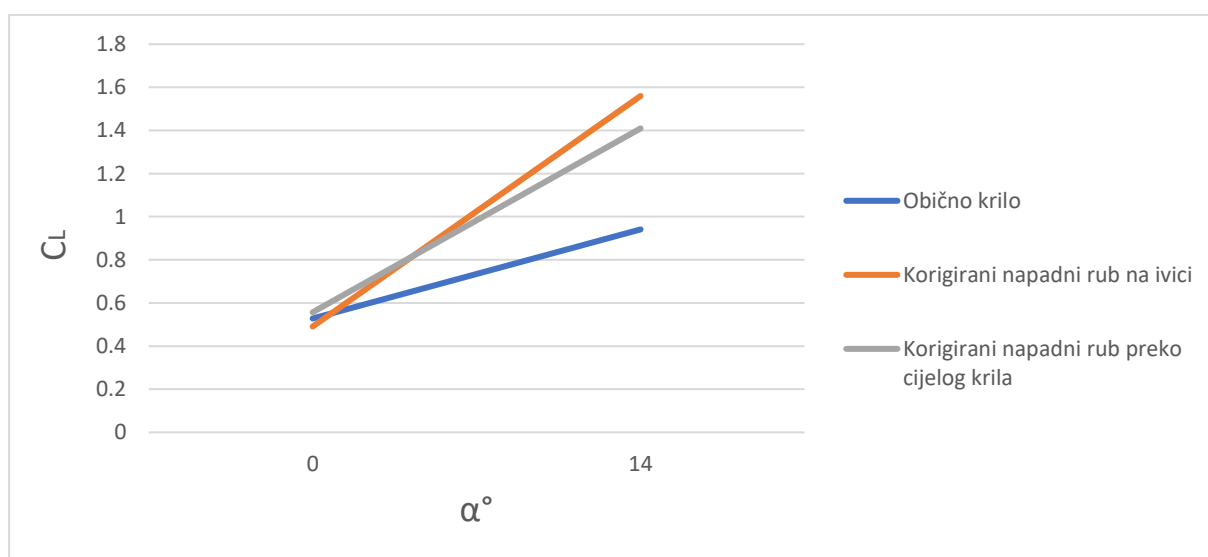
Slika 62. Polje tlaka aeroprofila s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila



Slika 63. Distribucija brzine aeroprofila s korigiranim napadnim rubom preko cijelog krila

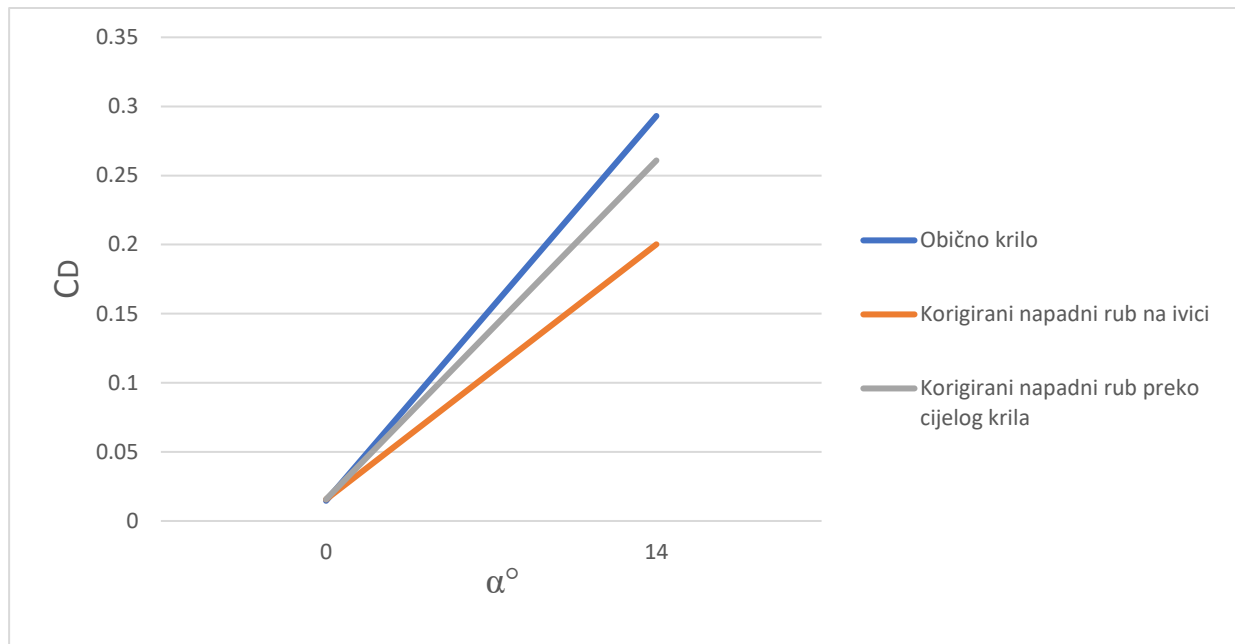
## 8.5. Prikaz rezultata CFD simulacije

U nastavku su dani grafički prikazi rezultata dobivenih numeričkom simulacijom. Vidljivi su koeficijenti uzgona i otpora za sva tri krila u ovisnosti o napadnom kutu.



Slika 64 . Ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu

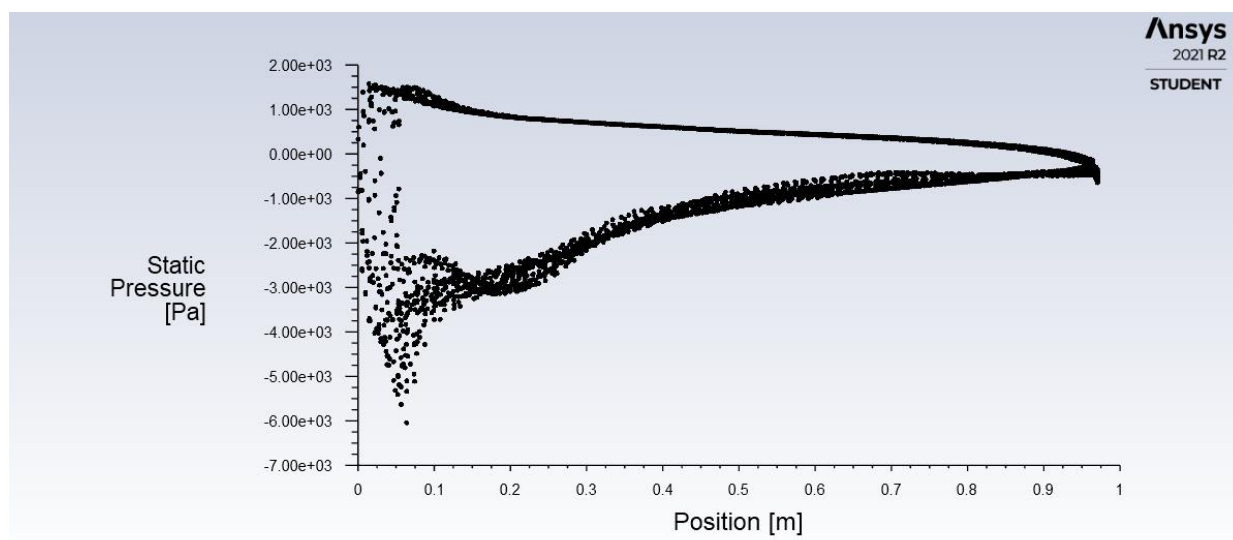
Graf na slici 64 prikazuje usporedbu koeficijenta uzgona za sva tri krila, gdje se vidi značajno poboljšanje krila primjenom korigiranog napadnog ruba.



Slika 65 . Ovisnost koeficijenta otpora o napadnom kutu

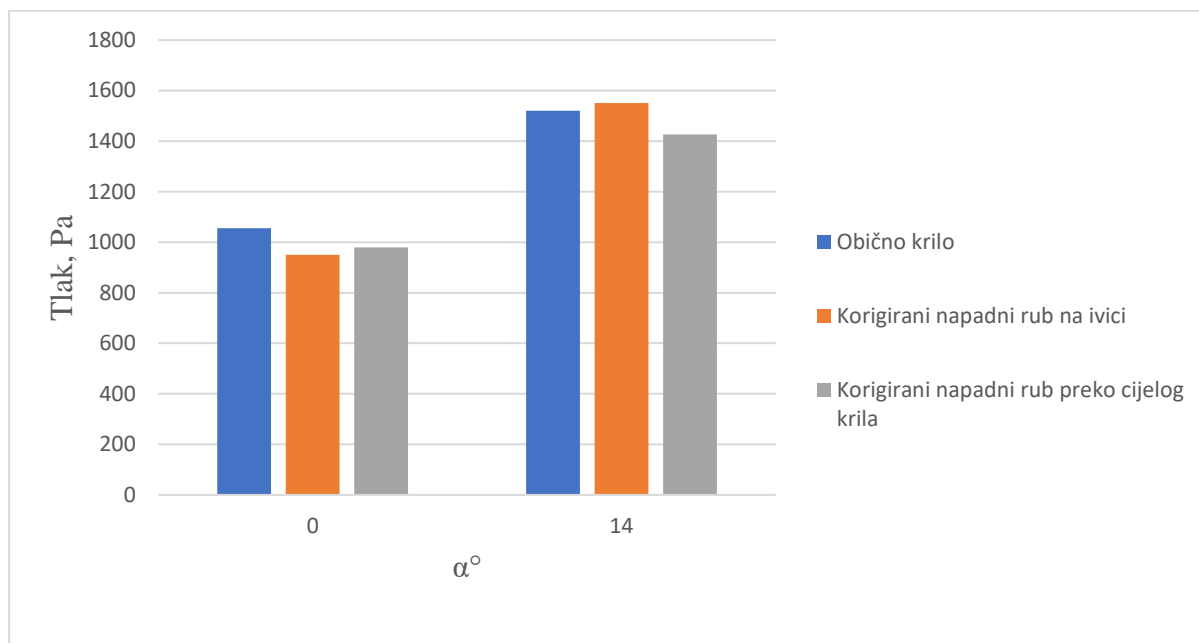
Na slici 65 najveći rast koeficijenta otpora uslijed odvajanja strujnica s površine može se vidjeti kod običnog krila. Primjenom korigiranog ruba dolazi do manjeg rasta koeficijenta otpora a kod određenog napadnog kuta i do njegovog pada (ovisno o tipu aeroprofila).

Za primjer, istraživanje je pokazalo da korigirani napadni rub ima veću efikasnost kod NACA 65-021 aeroprofila u odnosu na NACA 0021. Kada je položaj maksimalne debljine na udaljenosti 50% od napadne ivice kao kod NACA 65-021 aeroprofila, napadni rub postaje efikasniji. [16]



Slika 66. Prikaz tlaka ovisno o poziciji

Slikom 66 dani je prikaz rasporeda statičkog tlaka uzduž aeroprofila. Na poziciji 0 nalazi se napadna ivica. Gornji dio grafa prikazuje donju krivulju aeroprofila dok je na donjoj površini prikazan tlak na gornjoj krivulji aeroprofila.



Slika 67. Prikaz statičkog tlaka aeroprofila

Slika 67 prikazuje vrijednosti statičkog tlaka u zaustavnoj točki aeroprofila (napadnoj ivici). Kod napadnog kuta od  $0^\circ$  maksimalni tlak iznosi  $P = 1056 \text{ Pa}$  koji je pridružen aeroprofilu bez korigiranog napadnog ruba. Aeroprofil s korigiranim napadnim rubom na ivici pokazuje najveći tlak kod napadnog kuta od  $14^\circ$ .

## 9. ZAKLJUČAK

Povećanjem vrijednosti sile uzgona kod optjecanja aeroprofila ima veliki značaj u zrakoplovstvu. Provedena numerička simulacija pokazuje učinkovitost primjene korigiranog napadnog ruba na aeroprofil. Budući da se simulacija radila u studentskoj verziji Ansysa bilo je nekih ograničenja poput broja elemenata na koje je domena podijeljena. Numerička simulacija izvedena je uz primjenu  $k - \omega SST$  modela turbulencije. Analizom rezultata numeričke simulacije može se vidjeti da obično krilo ima bolje aerodinamičke karakteristike kod manjih napadnih kuteva. U slučaju kada je napadni kut  $0^\circ$  aeroprofil bez korigiranog napadnog ruba ima veći uzgon u odnosu na aeroprofil s korigiranim napadnim rubom na ivici. Pozitivan utjecaj primjene korigiranog napadnog ruba na aeroprofil može se vidjeti tek kod većih napadnih kuteva. U rezultatima je vidljivo da kada napadni kut dosegne  $14^\circ$  aeroprofilu se povećava uzgon i smanjuje otpor. Korigirani napadni rub se na neki način ponaša kao Vortex generator koji stvara vrtloge koji su u stanju odgoditi odvajanje strujnica s površine stijenke. Fluid koji nastrojava na prednji dio aeroprofila usmjerava se kroz kanale korigiranog napadnog ruba te ubrzava što uzrokuje stvaranje vrtloga. Ti vrtlozi povećavaju kinetičku energiju graničnom sloju što rezultira odgađanjem odvajanja strujnica s površine aeroprofila.

Uzgon je usko povezan s brzinom leta, budući da se polijetanje odvija pri malim brzinama potrebno je povećati napadni kut krila zrakoplova što može dovesti do naglog sloma uzgona. Korigirani napadni rub na krilu mogao bi riješiti taj problem. Dodatnim povećanjem uzgona kod viših napadnih kuteva bila bi potrebna kraća staza za polijetanje i slijetanje. Povećanje uzgona i smanjenje utjecaja otpora znači i smanjenje potrošnje goriva zrakoplova, što bi znatno utjecalo na uštedu materijalnih sredstava u procesu eksploatacije.

Primjena korigiranog napadnog ruba bi također dala prednost borbenim zrakoplovima kojima je potrebna velika okretnost. Povećala bi se i efikasnost vjetroturbina u područjima s manjom brzinom vjetra. Izradom simulacije te istraživanjem ostalih radova zaključak je da bi primjena korigiranog napadnog ruba na aeroprofil također moglo rezultirati postepenijim slomom uzgona. Kada dođe do sloma uzgona kod običnog krila, koeficijent uzgona naglo opada. Primjenom korigiranog napadnog ruba pad koeficijenta uzgona gotovo je nezamjetan, no žrtvuje se maksimalni koeficijent uzgona koji je u tom slučaju manji u odnosu na obično krilo. Međutim, numeričke simulacije nisu potpuno pouzdane te bi rezultati simulacija trebali biti popraćeni eksperimentalnim mjerenjima. Buduća istraživanja u području primjene korigiranog



napadnog ruba na aeroprofile svakako bi mogla doprinijeti boljem uvidu u njihove prednosti i nedostatke, pa čak i značajnim korakom u njihovoj optimizaciji.

## 10. LITERATURA

- [1] Predavanja, Numeričko modeliranje, Tihomir Mihalić
- [2] Završni rad, Izračun sile otpora i uzgona aeroprofila, FSB
- [3] Mehanika fluida 1, što valja zapamtiti, FSB
- [4]<https://www.eventshigh.com/detail/Chennai/286cddb938973e793fdc2f857ee815d5-workshop-on-computational-fluid-dynamics?src=widget&widget=true&weekwid=1&widHeader=1>
- [5]<https://www.bionicsurface.com/en/computational-fluid-dynamics-cfd-simulation-cfd-analysis/>
- [6] Predavanja iz Mehanike fluida, Sveučilište Sjever
- [7] Basics of Turbulent Flow, MIT
- [8] RAČUNALNA DINAMIKA FLUIDA, FSB, Ivo Džijan
- [9] <https://www.bronkhorst.ch/blog-ch/tag/laminare-stromung>
- [10] <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0741521415003006>
- [11] [http://techofthetour.tripod.com/new\\_page\\_3.htm](http://techofthetour.tripod.com/new_page_3.htm)
- [12] <https://scholarworks.gvsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1972&context=theses>
- [13] <https://www.invetr.com/body-and-structure/air-curtains>
- [14] [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-23792-9\\_1](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-23792-9_1)
- [15] <http://blogs.colgate.edu/sustainability/2017/06/09/taking-a-cue-from-nature/>
- [16] NUMERICAL INVESTIGATION INTO THE AERODYNAMIC EFFECTS OF TUBERCLES IN WIND TURBINE BLADES
- [17] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M., et al., The finite volume method in computational fluid dynamics, Springer, 2016.
- [18] <https://kamenjar.com/na-danasnji-dan-1903-prvi-let-brace-wright/>
- [19] Proračun koeficijenta otpora i tlaka na optjecanje cilindra podkritičnim Reynoldsovim brojem, završni rad FSB
- [20] <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=naca4412-il>
- [21] <https://www.neaq.org/blog/whale-watch-log-july-6-2016/>
- [22] <https://www.technologyreview.com/2008/03/06/221447/whale-inspired-wind-turbines/>
- [23] F. E. Fish and J. M. Battle, "Hydrodynamic design of the humpback whale flipper," Journal of Morphology, vol. 225, no. 1, pp. 51–60, 1995.

[24] D. Miklosovic, M. Murray, L. Howle, and F. Fish, "Leading-edge tubercles delay stall on humpback whale (*megaptera novaeangliae*) flippers," *Physics of Fluids* (1994-present), vol. 16, no. 5, pp. L39–L42, 2004.

[25] Effect of leading edge tubercles on airfoil performance, Kristy Lee Hansen