

# Primjena teorije igara na primjeru Akselrodovog teorema

---

Žic, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University North / Sveučilište Sjever**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:122:564155>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-30**



Repository / Repozitorij:

[University North Digital Repository](#)



**SVEUČILIŠTE SJEVER**  
**SVEUČILIŠNI CENTAR VARAŽDIN**



DIPLOMSKI RAD 231/PE/2018

**PRIMJENA TEORIJE IGARA NA PRIMJERU  
AKSELRODOVOG TEOREMA**

Ivana Žic

Varaždin, travanj 2018.

**SVEUČILIŠTE SJEVER**  
**SVEUČILIŠNI CENTAR VARAŽDIN**  
**Studij ekonomije**



DIPLOMSKI RAD 231/PE/2018

**PRIMJENA TEORIJE IGARA NA PRIMJERU  
AKSELRODOVOG TEOREMA**

Studentica:  
Ivana Žic, 0384-336D

Mentor:  
doc. dr. sc. Damira Đukec

Varaždin, travanj 2018.

# Prijava diplomskog rada

studenta iv. semestra diplomskog studija

Poslovna ekonomija

ime i prezime studenta Ivana Žic matični broj 0384/336D

naslov rada Primjena teorije igara na primjeru Akxelrodovog teorema

naslov rada na engl. jeziku Axelrod's theorem example in Game theory

kolegij Kvantitativne metode poslovnog odlučivanja

mentor doc. dr. sc. Damira Đukec

članovi povjerenstva

- izv. prof. dr. sc. Ante Rončević
- doc. dr. sc. Dinko Primorac
- doc. dr. sc. Damira Đukec
- izv. prof. dr. sc. Anica Hunjet

VŽKC

MMI

## Zadatak diplomskog rada

broj 231/PE/2018

opis

U ovom radu biti će prikazana primjena teorije igara na primjeru Akxelrodovog teorema. Teorija igara je područje ekonomije koje se bavi analizama strateških problema u različitim okruženjima. S obzirom da postoji sve veća potreba da se objasne procesi iz prirode, međuljudski odnosi i poslovanje, raste i potreba za razvojem teorije igara. Osnovna ideja rada je dokazati i obrazložiti primjer Akxelrodovog modela, te prikazati rad programa. Akxelrodov model je igra koja je u svojoj osnovi bazirana na zatvorenikovoj dvojbi sa ponavljanjima kako bi se dobila što bolja strategija za daljnje djelovanje.

Praktičan dio diplomskog rada biti će napisan pomoću objektivnog jezika JavaScript. Akxelrodov teorem implementirati će se sa 6 strategija. Korištene strategije će biti ALLC, ALLD, TESTER, JOSS, RANDOM i TFT. Zbog lakšeg praćenja i zbrajanja pobjednika, bodovati će se samo suradnja koja će se dogoditi između obje strategije. Kako bi se osiguralo da su sve strategije međusobno suočene jedna sa drugom i radi što boljeg uvida u točnost rezultata provest će se 90 000 iteracija. Na osnovu testiranja i dobivenih rezultata biti će doneseni zaključci rada.

u Varaždinu, dana 15.03.2018.



## **Zahvala**

Veliku zahvalnost, dugujem svojoj mentorici doc. dr. sc. Damiri Đukec koja mi je pomogla svojim savjetima pri izradi ovog diplomskog rada i što je uvijek imala strpljenja i vremena za moje upite.

Također, zahvaljujem se svim svojim prijateljima i prijateljicama, koji su uvijek bili uz mene i bez kojih cijeli ovaj tijek mog studiranja ne bi prošao tako lako i zabavno.

Posebnu zahvalnost iskazujem B. koji me je uvijek podržavao i upućivao na pravi put sa savjetima i idejama.

I na kraju, najveću zaslugu za ono što sam postigla pripisujem svojim roditeljima, koji su uvijek bili TU, uz mene, bez obzira da li se radilo o teškim ili sretnim trenucima i bez kojih sve ovo što sam dosad postigla ne bi bilo moguće.

Velika hvala svima!

## Sažetak

Tema diplomskog rada je „Primjena teorije igara na primjeru Axelrodovog teorema. Teorija igara je dio područja unutar ekonomije i bavi se analiziranjem strateških problema u različitim okruženjima. Teoriju igara nailazimo u obiteljskim svađama, podizanju cijena, bračnim odlukama, izboru glavnog tajnika UN-a, korištenju prirodnih resursa i raznim drugim područjima. Budući da postoji sve veća potreba da se objasne prirodne pojave, međuljudski odnosi i poslovanje raste i potreba za razvojem teorije igara. To je disciplina koja se prikazuje matematičkim modelima.

Osnovna ideja ovog rada je dokazati i obrazložiti primjer Axelrodovog modela, te prikazati kako program radi. Axelrodov model je igra koja se zasniva na Zatlarenikovoj dvojbi sa ponavljanjima kako bi se dobila što bolja strategija za daljnje djelovanje.

Praktičan dio diplomskog rada napisan je objektivno orijentiranim jezikom JavaScript. JavaScript je jednostavan programski jezik koji se može izvoditi preko preglednika ili online programa, te nisu potrebne dodatne datoteke i programi. Axelrodov teorem je implementiran u 6 strategija. Korištene strategije su ALLC, ALLD, TESTER, JOSS, RANDOM i TFT.

Zbog lakšeg praćenja i zbrajanja pobjednika bodovana je samo suradnja koja se dogodila između obje strategije, a nesuradnja i polovična suradnja nisu bodovane. Kako bi bili sigurni da su sve strategije međusobno suočene jedna s drugom te kako bi dobili što bolji uvid u točnost rezultata odabrano je 90 000 iteracija. Na osnovu testiranja i dobivenih rezultata doneseni su zaključci koji potvrđuju Axelrodov teorem.

Ključne riječi: zatlarenikova dvojba, teorija igara, Nashova ravnoteža, Axelrodov teorem

## Summary

The theme of this thesis is "The Axelrod's theorem example in Game theory". Game theory is the branch within the economy and deals with the analysis of strategic problems in different environments. Game theory can be found in family quarrels, raising the price, double the decisions, the selection of the Secretary General of the UN, the use of natural resources and various other areas. Given that there is an increasing need to explain the processes of nature, human relations and business is growing need for the development of game theory. It is a discipline that is presented the mathematical models.

The basic idea of this paper is to demonstrate and explain the example Axelrodovog models, and show how the program works. Axelrodov model is a game that is essentially based on the Prisoner's dilemma with repetitions in order to obtain the best possible strategy for further action.

Practical part of thesis written in object-oriented language JavaScript. JavaScript is a simple programming language that can run through the browser or online programs, and no additional files and programs. Axelrodov theorem is implemented with six strategies. Used strategies are ALLC, ALLD, TESTER, JOSS, RANDOM and TFT.

In order to facilitate monitoring and aggregation winner, scored the only collaboration that took place between both strategies, non-cooperation and half collaboration are not marked. To ensure that all strategies with each other face to each other and to get a better insight into the accuracy of the results selected 90 000 iterations. Based on the tests and the results obtained have been adopted conclusions confirming Axelrodov theorem.

Key words: game theory, Nash equilibrium, Axelrod theorem, prisoner's dilemma

# Sadržaj

1. Uvod.....	1
2. Teorija igara .....	3
2.1. Uvod u teoriju igara .....	3
2.2. Vrste odlučivanja u teoriji igara .....	5
2.3. Povijest teorije igara .....	6
2.4. Primjena teorije igara u ekonomiji i u ostalim znanostima .....	12
2.5. Elementi igre.....	14
2.6. Temeljna klasifikacija igara.....	16
3. Zatvorenikova igra .....	18
3.1. Zatvorenikova igra u jednokratnim igrama .....	18
3.2. Zatvorenikova igra sa iteracijama.....	21
3.3. Nashova ravnoteža.....	22
4. Akselrodov teorem.....	23
4.1. Prvi Akselrodov turnir .....	23
4.2. Drugi Akeslrodov turnir .....	31
5. Primjer teorije igara na primjeru Akselrodovog teorema .....	35
5.1. Opis slučaja – programa .....	35
5.2. Odabrane strategije .....	36
5.3. Program i rad programa .....	38
5.4. Rezultat testiranja i zaključak.....	40
6. Zaključak.....	42
7. Literatura.....	43
Popis slika .....	44
Popis tablica .....	45
Prilozi.....	46



# 1. Uvod

Teorija igara je vrsta znanosti koja pokušava objasniti interakciju između pojedinaca ili skupine. Način na koji se odabire strategija rješavanja sukoba ili konkurencije, ali i suradnje opisuje se kao definicija teorije igara. Kao znanstvena disciplina teorija igara je više otkrivena i stvorena tek u 20. stoljeću, to jest tada su postavljeni prvi pravi temelji. Svrstana je među mlade znanosti unutar ekonomije, no primjenjuje se i u svim ostalim znanostima poput biologije, psihologije, prava i drugih.

Pojavom računala i modernih uređaja koji mogu brzo procesuirati podatke, te ponuditi odgovore i najbolja rješenja izlaza smatra se kako će se takve teorije razvijati i postajati sve složenije i sve upotrebljivije i u ostalim znanostima, a ne samo u ekonomiji.

Cilj diplomskog rada je prikazati primjer računalne interakcije između dva pojedinca koji svojim odabirom odlučuju surađivati ili se sukobiti radi postizanja određenog cilja prema Akselrodovom modelu, te analizirati dane rezultate.

Prvo poglavlje diplomskog rada je Uvod u kojem je pobliže objašnjena svaka cjelina da se dobije što bolji uvid u temu rada i odabranog primjera. U uvodu je sažeto i svih šest cjelina koje zajedno čine zaokruženu cjelinu rada, zadaju ton i određuju smjer istog.

Drugo poglavlje nosi naziv Teorija igara kojom se pobliže objašnjava uvod u teoriju igara, a zatim i vrste odlučivanja unutar igara. Objašnjena je povijest igara kronološkim redom, te razvoj unutar ekonomije. Opisana je primjena igara, postignuća kroz godine, te primjena teorije u ekonomiji, ali i drugim znanostima. Opisani su elementi potrebni za određenje igre. Prikazana je temeljna klasifikacija igara.

Treće poglavlje usmjereno je prema objašnjenju najpoznatije igre. Objašnjena je Zatvorenikova dvojba. Opisan je nastanak i mogućnosti igre. Prikazan je primjer zatvorenikove dvojbe u jednokratnim igrama i sa iteracijama. Analizirana je i prikazana Nashova ravnoteža.

Četvrto poglavlje opisuje princip Akselrodovog teorema na kojem se temelji primjer diplomskog rada. Objašnjen je princip igre, način kako funkcionira, te su opisane korištene strategije i dobiveni rezultati.

Peto poglavlje prikazuje Akselrodov teorem kroz napisani program. Opisan je odabrani slučaj, program, strategije koje su zadane unutar programa, sam rad programa, te je objašnjeno testiranje i dobiveni rezultati.

Posljednje, šesto poglavlje donosi zaključak diplomskog rada. U tom poglavlju ukratko je objašnjena bit cijelog diplomskog rada. Ovo poglavlje donosi zaključna razmatranja teorijskog dijela rada i slučaja, te je iznesen zaključak cjelokupnog diplomskog rada.

## 2. Teorija igara

U ovom poglavlju pobliže je definirana sama teorija igra, njeni elementi, i osnovni pojmovi. Objašnjen je začetak teorije igara, vrste odlučivanja prema kojima se igre dijele. Prikazana povijest teorije igara i primjena u ekonomiji i u ostalim znanostima. Opisani su elementi potrebni svakoj igri kako bi ona bila svrstana kao igra.

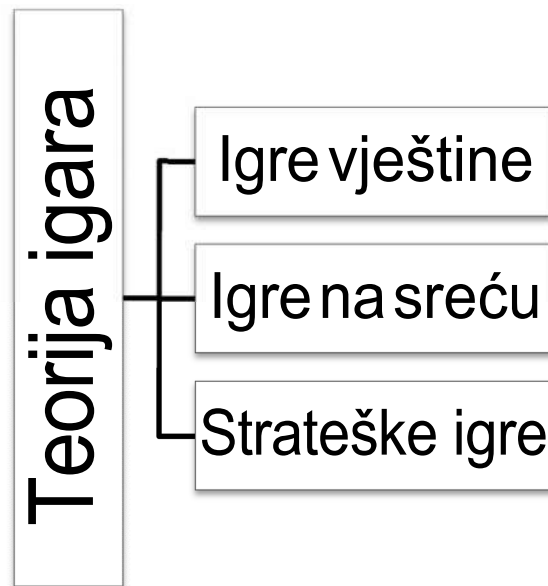
### 2.1. Uvod u teoriju igara

Teorija igara je relativno nova znanstvena disciplina. Temeljena je na matematici i primarno je usmjerena prema ekonomskom području, međutim, danas se teorija igara nalazi u različitim znanstvenim disciplinama. Razvila se u 20. stoljeću zahvaljujući matematičaru Johnu von Neumannu i ekonomistu Oskaru Morgensternu [1]. Teorija igre je određena vrsta strategije koja se odvija između dvoje ili više ljudi, a u današnje vrijeme između računalnih programa. Nailazi se svugdje u okruženju, u razgovoru, pregovorima, natjecanjima, poslu, prirodi, životinjama, popis gdje se može pronaći gotovo je neograničen. Teorija kao takva pomaže da pojedinci, ili ako se radi u skupini, imaju mogućnost doći do određenih informacija prema danim ulazima kako bi mogli odlučiti koji je najbolji izlaz, to jest najbolje rješenje sa najmanjim gubitkom za tu osobu ili skupinu [2].

Teorija igara nije nužno igra koja se igra samo radi pobjede nego nailazi i na suradnju između protivnika radi boljeg ishoda. Najpoznatiji primjeri pronađeni su u granama biologije u kojima znanstvenici proučavaju dvije i više vrsta kako si pomažu iako u prirodi vrijedi pravilo da preživljavaju najjači. Teorija igara je to opovrgnula što je vidljivo na primjerima u kojima se dva ili više živih bića koordiniraju radi preživljavanja. Takva vrsta koordinacije postoji i na primjeru kod ljudi, kada se usprkos svojim neslaganjima dolazi do dogovora, to jest rješavanja određenih problema radi boljitka drugih ljudi, to jest radi općeg dobra [3].

Osnovna podjela teorije igara je vrlo jednostavna. Tri su glavne kategorije: strateške igre, igre na sreću i igre vještine. Igre na sreću su vrsta igre u kojoj sudjeluje osoba protiv prirode. Igračeva pobjeda je kontrolirana samo u dijelu u kojem sudjeluje osoba, a drugi dio ovisi o prirodnim zakonitostima koje se ne mogu kontrolirati i zato se definira da se u tom slučaju radi o „sreći“, „sudbini“, „sudenosti“... Okolina djeluje na igru tako da na rezultat ne može utjecati. Igre na sreću dijele se na igre s nesigurnošću i na igre s rizikom [3].

Slika 1. Podjela teorije igara



Izvor: R. Kopal, D. Korkut: *Uvod u teoriju igara, Effectus, Zagreb, 2014.*

**Igra s rizikom** je vrsta igre u kojoj je igrač svjestan svakog rezultata okoline, a time i mogućnosti uspjeha, odnosno neuspjeha. Koncept očekivane vrijednosti daje odgovor na rješenje igara s rizikom. Cilj je pronaći granicu u kojoj će se rizik neutralizirati pod uvjetom da igrač osvoji pobjedu.

**Igra s nesigurnošću** je vrsta igre u kojoj postoji igrač, a na suprotnoj strani nalazi se priroda, to jest okolina. U ovoj vrsti igre ne postoji mogućnost znanja ishoda te se shodno tome igra rješava pomoću tri principa, a to su maxmax, minmax i maxmin.

Prvi princip je najoptimističniji i potiče se igrač da se opredijeli za strategiju kojom može najviše dobiti. Takav princip tjera igrača u najveći rizik.

Drugi princip je princip maxmin takozvani Waldov princip prema kojemu igrač mora odabrati najbolju strategiju od svih loših ponuđenih strategija, izbjegava se pobjeda ali i gubitak [4].

Treći princip je minmax princip; Savageov princip u kojem igrač treba odabrati strategiju zbog koje neće požaliti, to jest mora igrati na način da koliko god je moguće umanjiti gubitak uzimajući u obzir svoje prethodne akcije [5].

**Igre vještina** su igre u kojima se nalazi jedan igrač, a protivnik mu je priroda koja je u ovim slučajevima konstantna i zapravo nema utjecaja na ishod.

Ishod igre zapravo ovisi samo o igraču. U ovakvim igrama nedostaje komponenta međuovisnosti i zato ih se svrstava u neprave igre teorije igara. Najpoznatiji primjeri ovakve vrste igara su rješavanje sukoba, plivanje na 100 metara, polaganje ispita. Ishod igre ovisi isključivo o igraču [3].

**Strateške igre** su vrste igara u kojima sudjeluje dvoje ili više igrača. Okolina je u takvim igrama nezavisna. Igrači moraju biti svjesni da potez jednog igrača utječe na potez drugog igrača i samim time na ishod igre. Strateške igre u većini slučajeva proizlaze kao izravno neslaganje između dvaju ili više igrača. Primjeri strateških igara su konkurentske cijene istih proizvoda, neslaganje između dviju država, utrke vozilima...Strateške igre su podijeljene na igre sa dva ili više igrača i prema ishodu ih dijelimo na konfliktne, igre koje zahtijevaju suradnju i mješovite igre sukobljavanja/suradnje. Iz ove podjele proizlaze: kooperativne strateške igre, igre s nultom sumom i igre mješovitih motiva [2].

**Kooperativne strateške igre** su igre u kojima se odluke dvaju ili više igrača podudaraju. Igre s nultom sumom su igre u kojima su odluke igrača uvijek različite, a rješenje igre je uvijek nula ili konstanta. Igre mješovitih motiva su igre u kojima igrači nemaju iste konflikte, ali niti iste suradnje i to su igre koje su najbliže primjerima iz stvarnog života. Teorija igara u sebi sadrži riječ igra, međutim, cilj nije pobjeda nego pronalazak najbolje strategije i potpune korisnosti za igrača [3].

## 2.2. Vrste odlučivanja u teoriji igara

Postoje razni pokazatelji prema kojima je moguće pratiti igru. Osnovni korišteni termini obuhvaćaju dvije skupine igrača koji se igraju odabirom proizvoljnih strategija. Glavni termini teorije prema su [5]:

- Interakcija: potez jednog igrača ima utjecaj na potez bar jednog igrača iz druge skupine.
- Skupina: jedna ili više osoba koje donose odluke, to jest povlače poteze.
- Racionalnost: svaki igrač donosi odluku koja njemu u danom trenu igre ide u najveću korist.

- Strategija: igrač ili skupina donosi odluku na temelju odluke suprotnog igrača ili skupine. Odluka, odnosno odlučivanje može sadržavati jedan ali i više koraka i zahtjeva linearan način djelovanja i nalazi se u neutralnoj okolini. Svaki igrač, tj. čovjek, odabire vlastiti smjer aktivnosti, strategiju bez straha od reakcije okoline ili drugog igrača. Igra uključuje povezanost između igrača koji su jednako svjesni i usmjereni svojoj pobjedi, međutim, pobjeda može biti međusobno konfliktna.

Za ostvarivanje igre potrebno je uključiti barem dvoje igrača koji moraju biti obostrano svjesni i racionalni te interakcija između njih mora postojati.

Primjer koji opisuje razliku između odluke i igre: Skupina od 10 ljudi odlazi na jedrenje i potrebno je platiti jedrilicu i skipera. Cijena je konstantna. U slučaju gdje svatko plati svoju desetinu tada se radi o problemu odlučivanja. U slučaju da deset ljudi plati koliko može i želi tada se radi o igri i to strateškoj u kojoj se svatko bori da plati manje, ali na kraju će netko morati platiti više [2].

Primjeri strateške interakcije:

- Dvije vlade pregovaraju o dijelu zaljeva.
- Nekoliko tvrtki vodi pregovore o cijeni nafte na tržištu.
- Obitelj raspravlja kamo će ići za praznike.

Napisani primjeri potiču strateški način rješavanja problema i odabir strategije prema danim informacijama kako bi došli do najbolje strategije, to jest cilja. Teoriju igara koriste znanstvenici za objašnjenje izlaza gotovih strateških interakcija, predviđanje izlaza budućih interakcija i kako bi savjetovali koja strategija je najpovoljnija svakom igraču prema danim ulazima.

Dio eksperimentalnih testova pokazuje da ljudi često emotivno odlučuju u igrama kada zapravo trebaju odlučiti razumno i bez emocija. Teorija igara je odličan alat koji služi kao pomoći prilikom vođenja poduzeća, osmišljavanja rješenja kako bi pojedinac ili skupina donijeli najbolju moguću odluku, to jest strategiju za dani problem ili igru [2].

### **2.3. Povijest teorije igara**

Teorija igara nije čvrsto utemeljena znanost. Proizašla je iz ekonomije i jednim djelom spada pod društvene znanosti, a društvene znanosti nisu uvijek znanstveno dokazive i kao takve sklone su češćim promjenama, nadopunama i izmjenama od strane ljudi. Drugi dio teorije igara temelji se

na matematici i izračunima. Igre i strategije postoje od kada je životinja i ljudi i tada su isto kao i danas sudjelovali u različitim oblicima razmjene. Pisana povijest teorije igara započinje tek pedesetih godina 20-og stoljeća uvođenjem matematike u teoriju igara i smatra se jednim od najvećih ekonomsko-intelektualnih postignuća 20-tog stoljeća. Najveće zasluge pripisuju se Johnu von Neumannu i Oskaru Morgensternu, te knjizi „Teorija igara i ekonomsko ponašanje“. Prvi zapis teorije igara pronađen je u babilonskom Talmudu 500. godina prije naše ere u zborniku rasprava o židovskom pravu, etici, običajima i povijesti.

Znanstvenike i mislioce je oko 2000 godina zaokupljao problem „bračnog ugovora“ prema kojemu muškarac ima tri žene i bračni ugovor u kojem je opisan slučaju da kad muškarac premine svaka žena dobije 100, 200, 300 od njegovog imetka u zavisnosti o veličini imetka u trenutku njegove smrti. Talmud, ali i prevoditelji, navodili su na krive pretpostavke gdje se za imetak od 100 navodila ravnomjerna podjela, za imetak od 200 navodila se podjela (50, 75, 75), a za imetak od 300 navodila se podjela od (50,100,150). U tablici 1. Prikaz raspodjele imetka prema Talmudu prikazana je podjela imetka. Stupci prikazuju potraživanja iz bračnog ugovora, a redovi veličinu imetka pokojnika [6].

*Tablica 1. Prikaz raspodjele imetka prema Talmudu*

	100	200	300
100	33 1/3	33 1/3	33 1/3
200	50	75	75
300	50	100	150

*Izvor: R. Kopal, D. Korkut: Uvod u teoriju igara, Effectus, Zagreb, 2014.*

Zagonetnost „bračnog ugovora“ riješena je 1985. godine. Rješenje su ponudili Michael Maschler i Robert Aumann principima matematičkih formula i teorijom koalicijskih igara. Odgovor, to jest rješenje, definirano je igrom i navodi ravnomjernu raspodjelu sporne sume. Ispravnost svog odgovora pronašli su i potvrdili proučavajući Talmud, a i nailazeći na različite probleme koji su

bili riješeni na isti način. U to doba židovske kulture ravnomjerna raspodjela bila je društveni običaj. Takva vrsta igre danas može se primijeniti na bankrot poduzeća i podjelu iznosa na dužnike [6].

„Uvjerljiva prijetnja“ je priča koja se često spominje u literaturama o teoriji igara u kojoj je španjolski osvajač Cortes 1519. godine krenuo na obale Meksika sa malom vojskom i 11 brodova. Stigavši na kontinent s namjerom da pokori Aztečko Carstvo zapovjedbno je da se spale svi brodovi kako vojnici ne bi pobjegli. Tim činom je natjerao svoju vojsku da se bori, a Aztecima je utjerao strah u kosti. Azteci vidno demoralizirani vidjevši da Cortes pali flotu predali su se. Azteci su imali nadmoć, no strateška igra Cortesa je u ovom slučaju pobijedila. Takva vrsta igre danas je znana kao uvjerljiva prijetnja [3].

James Waldgrave je 1713. godine izumio kartašku igru „La Her“. Igra sadrži formu minmax rješenja mješovite igre za dva igrača. U svom pismu objasnio je kako se igra takva igra.

Objašnjenje je da igrač odabire strategiju kojom minimalizira svoj gubitak, no nikad nije primijenio ta pravila na drugim igrama smatrajući da mješovita strategija nije uobičajena za korištenje u igrama na sreću.

Godine 1738. Daniel Bernoulli analizirao je „paradoks Sankt Petersburg“. Otkrivena je korisnost, maksimalizacija očekivane korisnosti, padajuća granična korisnost i ne sklonost prema riziku. Analizirao je paradoks kockanja i zaključio da se korisnost i kvantiteta ne mogu izjednačiti. Poznatiji primjer paradoksa je „dobitak na lotu“ Paradoks je u činjenici da bogatoj osobi koja osvoji zgoditak novac ima manju korisnost nego što bi to imala za prodavača, te predlaže metodu izračuna korisnosti.

Antonie Augustin Cournotov opisuje slučaj duopola i rješava problem na sličan način kao Nash svoju ravnotežu i to stotinjak godina prije Nashove definicije ravnoteže. Cournotov se danas smatra jednim od klasičara teorije igara [3].

Charles Darwin u svojoj knjizi „Podrijetlo čovjeka i odabir ovisan o spolu“ opisuje da omjer spolova ovisi o prirodnoj selekciji iz kojeg možemo iščitati o teoriji igara u evolucijskoj biologiji. Pravilo glasi ako se rodi manje ženskih jedinki tada one imaju više izbora pri odabiru odgovarajućeg mužjaka i time ostvare veći broj potomaka [7].

F. Y. Edgeworth u svojoj knjizi „Matematička fizika“ opisao je krivulju ugovora putem koje



rješava problem ishoda trgovanja među ljudima. Dokazao je da kada postoji situacija između dviju vrsta istih roba ili potrošača, tada će skup konkurentskih ravnoteža postati beskonačan.

U 20. stoljeću 1913. godine Ernest Zermel objavio je rad o primjeni teorije skupova na teoriju šaha. Dokazana teorija je da bijela figura ako se složi povoljan raspored figura može pobijediti drugog igrača sa manjim brojem poteza, to jest strategija sa savršenim informacijama u kojoj linearna ravnoteža i vjerojatno svakog poteza može biti 1 ili 0 [2].

### **Kronološki prikaz događaja prema Kopalu i Korkutu**

1921.- 1927. godine Emile Bordel definirao je normalni oblik igre, matični prikaz pomoću kojeg svaki igrač pokušava ostvariti najbolju strategiju neovisno o potezima, definirao je vrstu igre koja se danas zove povratna indukcija.

1926. godine John von Neumann dokazao je teorem o igrama s nultom sumom s dva igrača i postojanje jedinstvenog skupa mješovitih strategija.

1928. godine objavio je rad pod imenom „Teorija društvenih igara“.

1930. godine Frederik Zeuthen danski ekonomist otkrio je model „problem pregovaranja“ u kojem je opisao svjesnost pregovarača o mogućem neuspjehu i ekonomsko ratovanje.

1944. godine John von Neumann pridružio se austrijskom ekonomistu Oskaru Morgensternu i zajedno su napisali knjigu „Teorija igara i ekonomsko ponašanje“ u kojoj su razradili teorije igara sa nultom sumom za dva igrača, prenosivu korisnost i koalicijski oblik igara, te stabilne skupove.

1945. godine objavljena je prva recenzija Herbert Simonsa o Neumannovoj knjizi Teoriji igara i ekonomskom ponašanju.

1946. godine algebarski je dokazana teorija minmax od strane L. H. Loomisa, te je priznata putem Nacionalne američke akademije znanosti.

1950. godine na sveučilištu Princeton objavljena je knjiga od autora Kuhn i Tucker, Doprinos teoriji igara, Volumen 1. Drescher i Flood sproveli su eksperiment Zatvorenikova dvojba, te dokazali postojanost iste. McDonald objavio je u svojoj knjizi Strategija u pokeru, poslu i ratu, Zatvorenikovu dvojbu na način koji je prihvatljiv običnom čitatelju.

1950. – 53. godine Nash je doprinio otkrivanju teorije igara objavljivanjem teorija o nekooperativnim igrama i pregovaranju. Ispitana je Nashova ravnoteža na kooperativnim i ne kooperativnim igrama. Prikazana je prva primjena Nashova programa, te je otkrivena aksiomska teorija pregovaranja.

1951. godine George W. Brown opisao je iterativnu metodu određivanja rješenja posebnih

igara sa nultom sumom.

1952. godine objavljen je prvi udžbenik teorije igara pod nazivom Uvod u teoriju igara, McKinseya. Shapley razvio je i ispitao pojam jezgre kao koncept rješenja kooperativnih igara, te je objasnio strategije igrača prema igri.

1953. godine Shapley je dokazao koncept rješenja jedinstvene isplate, takozvana „Shapleyva vrijednost“, te je dokazano da su optimalne strategije nepromjenjive. Objavljena je druga poboljšana verzija knjige Doprinosi teoriji igara Volumen 2, od autora Kuhl, Tucker.

1954. godine objavljen je jedan od prvih političkih primjera teorije igara na primjeru određenja snage članica Vijeća sigurnosti UN-a u radu Shapley i Shubika. Rufus Isaacs razvio je i opisao diferencijalne igre temeljene na modelu igara vojne potjere.

1955. godine opisana je u knjizi od autora Braithwaite primjena teorije igara u filozofiji. 1957. godine objavljena je knjiga Igre i odluke od autora R. Luce i H. Raiffa.

1959. godine Aumann je uveo pojam snažne ravnoteže. Edgeworth je u svom radu prikazao igre sa neprenosivom koristi. Objavljeno je četvrto izdanje knjige autora Luce i Tuckera. Shubik je u svojoj knjizi objasnio temu modeliranja oligopola, te je opisao „Narodni teorem“.

1960. godine razvijene su igre sa neprenosivom korisnosti što je omogućilo širu primjenu kooperativnih igara. Schelling je predstavio ideju učinka fokalne točke na Harvard sveučilištu.

1961. godine primijenjena je prva eksplicitna teorija igara u evolucijskoj biologiji pod vodstvom R. C. Lewontina. U svom radu Aumann je proširio teoriju igre.

1962. godine Gale i Shapley dokazali su ne praznost definiranih koalicijskih igara sa neprenosivom korisnosti, te su razradili algoritam koji podržava tu teoriju. Prikazana je alokacija troškova prvom primjenom teorije igara. Borsch opisuje prvu primjenu teorije igara određivanjem premija za različite vrste osiguranja.

1963. godine Olga Bondareva dokazala je ravnotežu igara sa prenosivom korisnosti.

1964. godine opisan je algoritam za pronalazak Nashove ravnoteže u bimatričnim igrama, Lemke i Howson. Objasnjeno je dokaz o postojanju ravnotežne točke.

1965. godine objašnjena je Nashova ravnoteža sa konceptom savršene podigre. Kernel je objašnjen u radu autora M. Davisa.

1966. godine opisane su beskonačno iterirane igre sa nepotpunim informacijama u radu od Aumanna i Maschlara. Definirana je razlika između kooperativnih i nekooperativnih igara.

1967. godine Shapley je dodatno potvrdio Bondarevu teoriju. Scarf proširuje teoriju o uravnoteženosti igre sa neprenosivim rezultatima.

1968. godine određen je teorijski temelj informacijske ekonomije, opisana u radu Johna Harasanyia. Teorija igara definirana je unutar ekonomije kao dio znanstvene cijeline. Opovrgnuta je teorija o stabilnim skupovima.

1969. godine Lucas, Schmidler i Shaplay ispitali su postojanje jezgre (krenel) unutar igre i njenu primjenu.

1972. godine osnovan je „International Journal of Game Theory“. Maynard je uveo koncept stabilne strategije u teoriju igara svojim radom, takozvani koncept ESS.

1973. godine Harsanyi objasnio je randomizaciju strategije i mehanizam nasumičnog odabira. Spomenuo je načelo revelacije u Gibbardovu radu.

1974. godine ispitane su ne atomske igre, to jest igre sa višestrukim iteracijama. Opisan je koncept korelirane ravnoteže.

1975. godine objavljen je rad o savršenoj ravnoteži drhteće ruke, koji se pokazao kao začetnik „industrije pročišćavanja“ temeljen na Nashovoj ravnoteži.

1976. godine objašnjen je i uveden koncept „common knowledge“ igrača unutar teorije igara.

1977. godine korištena je teorija igara u avijatici. Teorija igara korištena je u izračunima za avio pristojbe.

1981. godine predstavljena je ideja izravne indukcije. Opisana je ideja primjene automata u iteriranoj igri u radu od Aumanna.

1982. godine objašnjena je sekvencijalna igra u radu od Krepsa i Wilsona. Objavljena je knjiga „Evolution and the Theory of Games“ J. M. Smitha.

1984. godine korištena je teorija igara u američkom zdravstvu. Teorija je primijenjena za problem raspoređivanja stažista u bolnicama prema radu A. E. Rotha. Objavljena je knjiga R. Axelroda „The Evolution of Cooperation“.

1985. godine dokazane su Bayesove igre velikih skupova. Aumannova teorija automata ispitana je za formuliranje ideje ograničene racionalnosti.

1986. godine objavljena je pročišćena verzija Nashove ravnoteže u radu kolega Kohelberg i J. F. Mertens.

1988. godine osmišljena je prva teorija odabira ravnoteže opisana u radu R. Selten i C. Harsanyi. U radu Kreps i Fudenberg interpretiran je naučeni „standard ponašanja“ u Nashovoj ravnoteži, te se pokazalo kako se često koriste modeli evolucijskih igara.

1989. godine pokrenut je časopis Games and Economic Behavior.

1990. godine objavljen je prvi udžbenik za diplomski studij iz mikroekonomije u kojem je teorija igara uvedena u standardni materijal o mikroekonomiji autora M. Krepsa.

1991. godine objavljena je rasprava o teoriji ideje savršene Bayesove ravnoteže.

1994. godine teorija igara korištena je u području prava i ekonomije, te obrađuje temu teorije igara unutar prava autora Pickera, Gertnera i Bairda. Nagrada Sveriges Riksbanka (Bank of Sweden) iz ekonomskih znanosti dodijeljena je John Nashu, C. Harsanyiju i R. Seltenu.

1995-2000. godine ispitane su teorije igara u područjima aukcija, industriji mobilnih aparata,

raspodjeli resora raznih vladi Europe i SAD-a.

2005. godine. Sveriges Riksbanka (Bank of Sweden) iz ekonomskih znanosti dodijeljena je Robertu J. Aumannu i Thomasu C. Schellingu za teoriju unapređenja razumijevanja sukoba i suradnje primjenom analize teorije igara u ekonomiji.

#### **2.4. Primjena teorije igara u ekonomiji i u ostalim znanostima**

Teorija igara nalazi se svugdje u okruženju i oduvijek se koristi, međutim, ljudi su teorije počeli proučavati, zapisivati i objašnjavati dosta kasno. Jedan od razloga kasnog zapisa je da teorija igara nije čisto matematička znanost nego sadrži elemente društvene znanosti što poprilično otežava cijeli proces jer društvo se stalno mijenja, a samim time i teorije.

**Ekonomska znanost** – primjer teorije igara kao dio ekonomije poznat je i opisan još 500. godine prije naše ere kada se radila raspodjela imovine u Talmudu. Razvojem računala i uređaja koji mogu obraditi veliku količinu informacija sve je veća primjena teorija igara u raznim područjima unutar ekonomije. Primjerice, koristi se kod analize carinskih dogovora i slobodne trgovine, u uvjetima oligopolnih tržišta, u makroekonomskoj politici kao dio skupa matematičkih tehnika koje služe za analizu događaja, u mikroekonomiji između dva proizvođača koji odlučuju o cijeni na tržištu u vezi sličnog proizvoda [8].

**Političke znanosti** – modeli teorije igara provukli su se kroz zakonodavstvo, izborno ponašanje te su se nastavili širiti na međunarodnu sigurnost, suradnju i demokraciju u vrlo kratkom vremenu. Iako nema puno literature koja povezuje politiku i teoriju igara dio problema počiva u činjenici da područje politike i ekonomije nisu dobro povezani i postoji jako malo spona koje se tek trebaju izgraditi. Drugi dio problema je da politolozi nevoljko odabiru ekonomske knjige kao izvore na koje se moraju oslanjati. Primjer teorije igara u politici uočen je prilikom strateškog glasovanja na izborima i prilikom formiranja koalicije radi lakše distribucije moći u tijelima s ponderiranim glasovanjem. Međuovisnost između glasača i države, to jest vlasti, kao između dvaju igrača unutar iste igre [2]. Drugi jako poznati primjer dogodio se 1962. godine na Kubi. Takozvana igra kukavice između zemalja SAD-a i Kube i Sovjetskog saveza kada je Kuba prijetila SAD-u da se na otocima nalaze rakete Sovjetskog saveza te će iste biti upotrijebljene protiv SAD-a. Spor je riješen povlačenjem raketa u korist SAD-a. Nakon napada 9/11 na SAD interes za razumijevanjem međunarodnih sukoba i analizom putem teorije igara naglo se povećao. Nažalost, teroristi i napadnute strane se vrlo dobro mogu prikazati strateškim međudjelovanjima koja nalazimo u primjerima teorija igara i strategije su vrlo primjenjive u

stvarnom svijetu.

**Pravo** – primjenjuje modele igre sa nepotpunim ili netočnim informacijama. Knjiga koja opisuje teoriju igre u pravu zove se *Game Theory and the Law*, a autori su Gertner, Baird i Picker. Klasični problemi koji se javljaju u pravu je da osuđenici ne žele priznati istinu, zatome je, nagode se, u nekim slučajevima istina se nikad niti ne sazna. Knjiga je fokusirana na strateško ponašanje, prikaz zakona i način na koji se pravna procedura odvija. Posebna pozornost u knjizi pridana je asimetričnim i nepotpunim informacijama koje rade problem prilikom strateškog rješavanja slučaja. Poznati primjer je poslodavac koji diskriminira žene koje lažno prikazuju da nešto ne mogu napraviti, a poslodavac zahtjeva jednakost između žene i muškaraca, te ih tretira jednako. Uvođenjem pravila da i žena i muškarac moraju posao obaviti na isti način dovodi do promjene ravnotežnog ishoda. Poslodavac usvaja novi zakon i rezultat je jednakost za oba spola [9].

**Filozofija** – teorija igara se susreće u etici, političkoj i moralnoj filozofiji gdje nailazimo na predviđanja, objašnjavanja i procjenu ljudskog odabira u okolini kada odabiri i procjene ovise o drugim igračima i na sam ishod cilja. Jedan od najstarijih filozofa koji je spojio i teoriju igara je Braithwait, a svoje ideje pretočio je u knjigu pod nazivom *Theory of Games as a Tool for Moral Philosopher*. U knjizi je objasnio da se distributivna pravednost može riješiti na jednak način kao i „problem pregovaranja“. Danas je teorija igara u filozofiji podijeljena na tri pravca: funkcijalizam, kontraktarijanizam i treći pravac koji zagovara obnovu tradicionalnih pravila i normi [10].

**Biologija** – teorija igara spojena sa teorijom evolucije objašnjava nastanak novih vrsta, psihologiju jedinke i skupine, ponašanje, međusobnu interakciju i zorno nam prikazuje ishode. Glavna pitanja koja se prožimaju su: „*Zašto životinje surađuju?*“ i „*Borba za opstanak najjačih*“. 60-ih godina prošlog stoljeća biolozi su počeli spajati teoriju igara sa biologijom radi lakšeg objašnjenja određenih teorija. Stvorena je evolucijska teorija, a podijeljena je u dva pravca.

Prvi pravac utemeljili su Maynard, Smith i Price. Osnovni alat za analizu im je bila evolucijska stabilna strategija. Drugi pristup je eksplicitni model koji putem frekvencija strategija proučava evolucijsku dinamiku. Jedna od prvih teorija koje su se nadovezale na Darwina i objasnile teorijom igara je činjenica da je količina ženskih i muških jedinki u svakoj vrsti podjednaka iako se većina muških jedinki nikad ne pari. Odgovor je da što je više ženki u populaciji to je muška

podobnost veća i obratno [7].

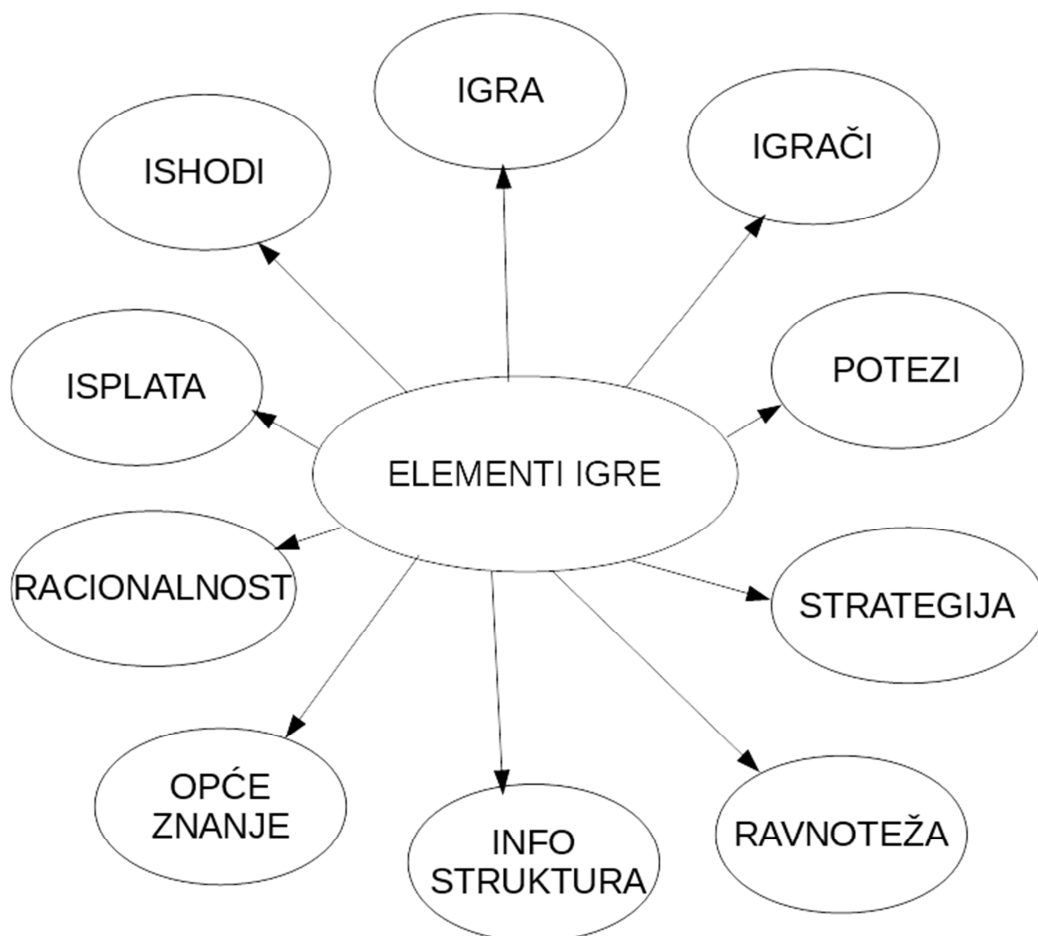
Drugi primjer je da se životinje, iako vrijedi pravilo da opstaje najjači, nužno ne dovode sebe u opasnost zbog hrane, skloništa, nego kao i u teoriji igara zbog odabira najveće koristi sa mogućnošću najmanjeg mogućeg lošeg ishoda.

Ponavljanje je u biologiji jedna od glavnih karakteristika pomoću koje se vrši analiza i donose zaključci. Implementacija teorije igara, evolucije i ponavljanja dovele do novih teorija o ponašanju čovjeka, životinja i njihovom ponašanju [11].

## 2.5. Elementi igre

Svaka igra sastoji se od svojih osnovnih dijelova. U ovom poglavlju opisana je terminologija igre, to jest osnova iz koje proizlaze sve igre i koje svaka igra mora imati te elemente, kako bi se mogla svrstati u igru [2].

Slika 2. Elementi igre



Izvor: Izrada autora

**Igra** (engl. game) – označava skup akcija koje se događaju određeno vrijeme između jednog ili više igrača, to jest skup dogovorenih pravila koji se odvijaju zbog konfliktne situacije. Cilj je rješenje igre i može biti jedan ili više mogućih ishoda.

**Igrači** (engl. players) – teorija igara obavezuje da moraju postojati minimalno dva igrača i maksimalno puno igrača, ali broj igrača mora biti konačan i poznat. Slučaj jednog igrača spada u nepotpunu teoriju igara i time se ne uzima kao „prava“ igra.

**Potezi/akcije** (engl. moves/actions) – je promjena koju igrač napravi u jednom koraku i pritom utječe na ishod igre. Prilikom svakog poteza igra napreduje i dolazi do novih informacija. Potezi mogu biti naizmjenični između dvaju ili više igrača ili simultani. Potezi mogu biti slučajni ili odabrani. Teorija igara se bavi analizom poteza, to jest pokušava dokučiti budući potez igrača.

**Strategija** (engl. strategy) - je odabir pojedinog igrača ili skupine igrača kako da odigra igru, to jest svaki pojedini potez, a nije način na koji se igra. Odabir strategije ovisi o tome hoće li se igra ponavljati ili ne. Primjer igre križić kružić naspram igre bacanje kamena u dalj. Optimalna strategija pruža igraču najbolji mogući ishod za njega. Razlikujemo čistu i mješovitu strategiju. Mješovita strategija označava da igrač za svaku akciju može odabrati drukčiji, slučajni izbor, dok čista strategija označava da se igrač odlučuje za uvijek isti potez.

**Ishodi** (engl. outcomes) – rezultati svih igrača unutar igre. Jedan igrač može imati više ishoda.

**Isplata** (engl. payoff) - broj koji se nalazi pored svakog ishoda pojedinog igrača ili skupine igrača. Veća isplata označava da je igrač ili skupina uspješnija.

**Racionalnost** (engl. rationality) – svaki igrač ili skupina igrača igra igru sa ispravnim ciljem i željom za uspjehom u igri, te svjesnošću svojih odluka i mogućeg ishoda.

**Opće znanje** (engl. common knowledge) – Prilikom pristupanju igri svaki igrač ili skupina igrača svjesna je svih pravila igre.

**Informacijska struktura** (engl. information structure) – su informacije koje su poznate prilikom igranja igre i koje se mijenjaju svakim potezom igrača ili skupine igrača.

**Ravnoteža** (engl. equilibrium) – označava sve strategije unutar igre, a koje daju najbolji ishod s

obzirom na ostale igrače.

## 2.6. Temeljna klasifikacija igara

Postoji nekoliko vrsta igara koje ovisno o kontekstu i okolini poprimaju različita obilježja. Prema tim obilježjima napravljene su grube podjele, međutim, svaka igra može sadržavati jedno ali i više obilježja drugih igara. Ovo su temeljne podjele ali sa razvojem novih igara, razviti će se nova podjela [12].

**Sekvencijalne igre** – poznate i pod nazivom dinamičke igre. To su igre u kojima se potezi između dva ili više igrača izmjenjuju dajući drugom igraču informaciju o potezu prvog. Samim time svaki igrač ima mogućnost izmijeniti svoj potez i prilagoditi se novonastaloj situaciji u igri.

**Simultane igre** – takozvane statične igre. Vrsta igre u kojoj igrači odabiru poteze istovremeno, a sami potezi ovise o samim igračima, a ne o protupotezima suprotnih igrača. Funkcija vremena je isključena u ovakvim igrama, odabir strategije je na pojedinom igraču ili skupini igrača, koji ne znaju poteze suparničkog tima, ali moraju razmišljati koju će strategiju suprotan igrač ili tim odabrati.

**Igre s nultom sumom** – su strateške igre u kojima su strategije dvaju ili više igrača konfliktne, potpuno suprotne. Pobjeda jednog igrača označava gubitak drugog igrača i u jednoj igri može postojati samo jedan pobjednik. Primjeri: kamen-papir-škare, križić- kružić, šah.

**Igre s promjenjivom sumom** - su strateške igre u kojima cilj nije pobjeda, nego suradnja zbog činjenice da ne suradnjom ishod igre može biti negativan za oba igrača, dok kooperacijom oba igrača pobjeđuju, to jest mogu ishoditi puno bolji rezultat suradnjom. Primjeri: zatvorenikova dvojba, lov na jelene, igra kukavice.

**Jednokratne igre** – su igre koje igrači igraju samo jednom. Takva vrsta igara igra se agresivnim strategijama zbog činjenice da igrači ne poznaju protivnika, njegove strategije i igra se odvija samo jednom što umanjuje posljedice kajanja što povećava dominantnost i okrutnost igre.

**Iterirane igre** - su igre koje igrači igraju više puta, ponavljaju se. Strategije u iteriranim igrama mogu ovisiti o prethodnim potezima, igračima i njihovoj strategijskoj reputaciji. Poznate strategije koje se koriste u iteriranim igrama su: meta strategije, strategija ponavljanja istog



poteza u svim ponavljanjima igre. Strategija okidača, „oko za oko“, „tit for tat“ i mnoge druge. Možemo ih podijeliti u konačne i beskonačne. Konačne su ograničene vremenskim trajanjem ili količinom ponavljanja. Beskonačne igre mogu trajati neograničeno dugo sve dok se igra ne završi.

**Igre sa savršenim informacijama** – su igre u kojima svi igrači posjeduju informacije vezane uz igru, igrača suparnika, prethodne poteze i na temelju tih informacija odlučuju o svojem sljedećem potezu.

**Kooperativne igre** – su igre u kojima se smatra da igrači suprotnih strana surađuju i dogovaraju se radi pozitivnog zajedničkog ishoda. Dije se na igre s prenosivom korisnošću i igre sa neprenosivom korisnošću.

**Nekooperativne igre** – su igre u kojima se smatra da igrači suprotnih strana odabiru svoj interes, strategije i odlučuju ne surađivati sa protivnim igračem.

**Simetrične igre** – vrste igra u kojima se promjenom igrača ili isplate ne mijenja strategija i tok igre.

**Asimetrične igre** – vrste igra u kojima promjenom igrača, isplate ili okoline dolazi do promjene igre i strategije.

*Tablica 2. Klasifikacija igara*

	Sekvencijalna	0 – suma	Savršene informacije	Kooperativna	Simetrična
Borba spolova	NE	NE	NE	NE	DA
Courtnotova igra	NE	NE	NE	DA	-
Igra provjeravanja	DA	NE	NE	NE	NE
Igra signalizacije	DA	NE	NE	NE	NE
Igra ultimatum	DA	NE	DA	NE	NE
Koordinacija	NE	NE	NE	NE	DA
Križić – kružić	DA	DA	DA	NE	NE
Kukavica (jastreb - golub)	NE	NE	NE	NE	DA
Lov na jelene	NE	NE	NE	DA	DA
Nashova igra pregovaranja	NE	NE	NE	NE/DA	NE
Papir - škare – kamen	NE	DA	NE	NE	NE
Rat do istrebljenja	NE	NE	NE	NE	NE
Rezanje kolača	NE	DA	DA	NE	NE
Stonoga	DA	NE	DA	NE	NE
Zatvorenikova dvojba	NE	NE	NE	NE	DA

*Izvor: R. Kopal, D. Korkut: Uvod u teoriju igara, Effectus, Zagreb, 2014.*

### **3. Zatvorenikova igra**

Jedan od najpoznatijih primjera teorije igara je Zatvorenikova dvojba. Koristi se najčešće kao glavni primjer teorija igara iako je dvojba samo jedan od primjera igara unutar teorije igara. U diplomskom radu opisana je i objašnjena Zatvorenikova dvojba. Odabrana je zbog nadovezivanja na Akselrodov teorem i praktični dio diplomskog rada.

#### **3.1. Zatvorenikova igra u jednokratnim igrama**

Zatvorenikova igra ili dvojba je jedan od najpoznatijih pojmova teorije igara. Osnovni problem u kojem dva igrača, odnosno dvije strane koje moraju surađivati a ne surađuju, je okosnica igre koju su izmislili i opisali Merrill Flood i Melvin Dresher pedesetih godina dvadesetog stoljeća baveći se istraživanjem globalne nuklearne strategije u RAND korporaciji [13].

Alber W. Tucker formalizirao je igru, dodavši joj igrače i vrijednosti, te je tako stvorio zagonetku za znanstvenike i probudio je uspavane znanstvene krugove koji su krenuli u rješavanje problema. Ekonomska struka počela je primjenjivati zatvorenikovu dvojbu za objašnjenje ponašanje oligopola, inflacije, međunarodne trgovine i razmjene dobara i usluga i drugih problema [3].

Zatvorenikova dvojba temelji se na priči da nadležne vlasti, to jest policija, ispituje dvije osumnjičene osobe za koje se pretpostavlja da su počinile kazneno djelo, ali ne postoje sigurni dokazi za optužnicu niti jednog osumnjičenika. Zbog takve situacije svaki osumnjičenik odveden je u zasebnu prostoriju na ispitivanje. Za svakog osumnjičenika postoje dvije strategije - prva je priznanje zločina, a druga je poricanje zločina. U slučaju u kojem oba dva osumnjičenika poriču zločin policija ne može dokazati isti, ako jedan osumnjičenik prizna zločin tada taj zatvorenik biva osuđen sa manjom kaznom, ako oba osumnjičenika priznaju tada oba osumnjičenika dobivaju istu kaznu.

Tablica 3. Zatvorenikova dvojba

		IGRAČ 1	
		SURADNJA	IZDAJA
IGRAČ 2	SURADNJA	<p>NAGRADA</p> <p>Uzajamna suradnja</p> <p>-1 godina</p>	<p>KAZNA ZA NAIVCA</p> <p>NAGRADA ZA IZDAJU</p> <p>0, - 10 godina</p>
	IZDAJA	<p>NAGRADA ZA IZDAJU</p> <p>KAZNA ZA NAIVCA</p> <p>- 10, 0 godina</p>	<p>KAZNA</p> <p>Obostrana izdaja</p> <p>- 5 godina</p>

Izvor: R. Kopal, D. Korkut: *Uvod u teoriju igara*, Effectus, Zagreb, 2014.

Kada se svaki osumnjičenik nalazi u zasebnoj prostoriji, oba osumnjičenika svjesna su da se za izdaju saznato tek kada je istraga završila. Pitanje koje se postavlja je kako se zatvorenici ponašaju? Postoji puno metoda koje se mogu primijeniti.

Sa gledišta igre poricanje je dominantna strategija koje bi se oba zatvorenika trebala pridržavati, ali ako zatvorenici žele maksimizirati svoje izgleda i racionalni su tada dolazi do promjene u strategiji, te nova dominantna strategija postaje priznati – priznati iako bi nagrada za suradnju bila veća, ipak se odlučuju na samostalan rad, takozvana Nashova ravnoteža ili Pareto neučinkovito rješenje.

### **Pareto optimalnost**

Pareto optimalnost nailazimo kada u nekoji igri trebamo odrediti koji ishod igre je bolji. Izvana, teško je odrediti jeli dobit jednog igrača bolja od dobiti drugog igrača. Stoga je potrebo pronaći

način usporedbe dvaju ishoda jedne igre. Odabrani primjer igre koja se evaluira mora imati usporedive ishode, da bi iz njih mogli izvući podatke.

Odličan primjer je igra u kojoj dobit nekog igrača njegova godišnja zarada, u američkim dolarima. Igrač broj dva godišnju zaradu dobiva u eurima. Problem nastaje zbog različitosti valute, ako ne postoji podatak o tečaju. Iako je u tom slučaju nemoguće odrediti čija dobit je bolja, mogu se izvući određeni zaključci. Prema tome ishoda sa 5 jedinica valute je bolji od ishoda sa 2 jedinice valute. [3]

**Definicija Pareto dominacije.** *Strateški profil  $s$  Pareto dominira strateški profil  $s'$  ako za svaki  $i \in N$ ,  $(s)_i \geq (s')_i$ , i postoji neki  $j \in N$  za koji  $(s)_j > (s')_j$ .*

Strateškim profilom smatra se neka od mogućih kombinacija strategija koje su dostupne igračima, to jest u Pareto dominiranom profilu, neki igrač može imati veću dobit, bez da se drugom igraču dobit smanji. Iz toga definiramo Pareto optimalnost.

**Definicija Pareto optimalnost.** *Strateški profil  $s$  je Pareto optimalan(efikasan) ukoliko ne postoji drugi strateški profil  $s' \in S$  koji dominira  $s$ .*

Dakle Pareto optimalan profil je onaj u kojem ne možemo povećati dobit jednog igrača, bez da smanjimo dobit nekog drugog igrača.[3]

### **Dominirana strategija**

Dominantna strategija je ona strategija u nekoj igri u kojoj su postavljene određene pretpostavke. Prva pretpostavka je da igru igraju racionalni igrači. Pojam racionalan podrazumijeva da igrač neće odigrati strategije koje su dominirane. Definicija dominirane strategije glasi.

*U normalnoj formi igre  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ , neka su  $s_1'$  i  $s_1''$  dostupne strategije igraču  $i$ . Strategija  $s_1'$  čvrsto je dominirana od strategije  $s_1''$  ako za svaku kombinaciju strategija protivnika, dobit igrača  $i$  je manja ukoliko igra strategiju  $s_1'$  umjesto strategije  $s_1''$ .*

Tri osnovna obilježja označavaju Zatvorenikovu dvojbu: svaki igrač raspolaže sa dvije strategije i svaki igrač ima mogućnost odigrati dominantnu strategiju a neravnotežna strategija uvijek je bolji izbor strategije od dominantne strategije [3].

### 3.2. Zatvorenikova igra sa iteracijama

Zatvorenikova dvojba koja je opisana u prethodnom potpoglavlju zainteresirala je znanstvenike te je provedeno istraživanje kako bi se ponašali igrači ako se ista igra odvija više puta. Mijenja li činjenica da igrači dok igra traje mogu učiti tuđe strategije ili igraju po vlastitim izborima bez da pamte prošle postupke. Ovisi li rezultat o igraču ili o strategiji? Iteracija je prema rječniku hrvatskog jezika opetovanje, ponavljanje, višekratna radnja u trajanju. U slučaju Zatvorenikove dvojbe radi se o igri koja se ponavlja između dva igrača sa ciljem i u tom slučaju najbolja opcija je Nashova ravnoteža. U slučaju zatvorenikove dvojbe u kojoj postoje iteracije, metodološkim postupkom zaključivanja kojim se od činjenica izvodi opći sud, takozvana povratna indukcija, navodi da će svaka iteracija biti riješena Nashovom ravnotežom [3].

Zbog neintuitivnosti rješenja takav ishod igre naziva se paradoks povratne indukcije. Odabirom 30 iteracija unutar igre Zatvorenikova dvojba analiziran je se svaki korak, počevši od zadnjeg, to jest tridesetog u kojem oba igrača znaju da je to zadnji krug igre i da nisu dužni sudjelovati. Ponašali su se kao da se radi o jednokratnoj igri i odabrali su strategiju za zadnji krug koja se navela sama od sebe, a to jest Nashova ravnoteža (priznati, priznati).

U dvadesetdevetom (29.) koraku oba igrača bila su svjesna da u zadnjem koraku priznati i zato nisu imali želju surađivati niti u predzadnjem koraku, te iz toga slijedi da je Priznati glavna strategija.

U dvadesetomom (28.) koraku oba igrača svjesna su da je kraj igre blizu, znaju kako su odigrali igru ne surađivati u zadnjem i predzadnjem koraku, te nemaju želju surađivati niti u 28. koraku te odabiru strategiju Priznati. Isti način razmišljanja će se primijeniti i na ostalih 27 koraka igre. Oba igrača su od prve iteracije odabrali igrati strategiju Priznati, te je iz toga proizašao zaključak da (Priznati, Priznati) Nashova ravnoteža unutar Zatvorenikove dvojbe sa iteracijama je glavna strategija za oba igrača.

Iako se čini nelogičnim da unutar tridesetak ponavljanja ne dolazi do suradnje između dvaju igrača zato što barem jednom igrači mogu isprobati suradnju, te da u slučaju da suradnja i ne uspije igrači se uvijek mogu vratiti strategiji ne suradnje. Ovakav način ponašanja nije logičan ali je potvrđen brojnim eksperimentima [14].

### 3.3. Nashova ravnoteža

Ovo potpoglavlje usmjereno je prema objašnjenju načina na koji igrači igraju strategije kada se radi o igri u kojoj ima iteracija. Za uspjeh u takvoj vrsti igre sa ponavljanjima potrebno je taktički odigrati dane strategije što će pobliže biti prikazano u praktičnom djelu rada. Nashova ravnoteža, ekvilibrijum, nazvan je prema američkom matematičaru Johnu Forbesu Nashu Jr. Koncept koji je sličan Nashovom obradio je Antonie Augustin Cournot u kojem unutar oligopola dva poduzeća maksimiziraju svoj profit na način da ako jedno poduzeće poveća profit i drugo poduzeće povećati će profit. Taj koncept je bio nerazrađen i loše proširen na ostale igre. Godine 1944. John von Neumann i Oskar Morgenstern objasnili su miješane strategije koje su koncipirane isključivo za igre sa nultom sumom, te su otvorili put Nashu i njegovoj teoriji.

Godine 1951. Nash je predstavio svoj teorem. Uspio je dokazati da svaki igrač koji odigra mješovitu strategiju maksimizira svoju isplatu ako strategija drugoga igrača ostane ista kao i strategija prvoga igrača. Iz toga proizlazi da je strategija svakog igrača optimalna prema strategiji drugog igrača.

Nashova ravnoteža je koncept kojim se pokušava naći najbolje rješenje igara sa simultanim potezima, u kojima igrači ako se pridržavaju svojih specifičnih strategija, niti jedan ne uspijeva ostvariti veću isplatu odabirom neke druge strategije. Nashova ravnoteža je kombinacija strategija, za svakog pojedinog igrača koja najbolje odgovara strategijama i odlukama svakog pojedinog suigrača. Potrebno je uzeti u obzir da ravnoteža ne daje najbolju skupnu isplatu za sve igrače. Dogovor između igrača u vezi strategija donosi mnogo više isplate, no to nije cilj u Nashovoj ravnoteži. Objašnjeno laičkim jezikom, kada igrač 1 zna koju će strategiju koristiti igrač 2 ali i dalje ne želi promijeniti svoju strategiju tada možemo reći da se radi o Nashovoj ravnoteži, ako igrač 1 promjeni strategiju tada se ne radi o Nashovoj ravnoteži [14].

## 4. Akselrodov teorem

U ovom poglavlju objašnjen je teorem prema kojem je napravljen praktični dio rada. Akselrod je napravio dva turnira. U prvom turniru sudjelovalo je 15 strategija, a u drugom turniru sudjelovale su 63 strategije. Zaključci i dobiveni rezultati ostavili su ih u nedoumici jer takve rezultate nisu očekivali.

Igra je temeljena na Zatvorenikovoju dvojbi u kojoj postoji tablica s bodovima. Istovremeno sudjeluju dva igrača, svaki sa jednom odabranom strategijom. Svaki igrač ima pravo na suradnju ili ne suradnju, to jest igranje izdaje. U slučaju kada oba igrača surađuju svaki igrač dobiva 3 boda. Kada jedan igrač odigra suradnju, a drugi izdaju, igrač koji je igrao suradnju dobiva 0 bodova, a igrač koji je igrao izdaju dobiva 5 bodova. Ako oba igrača ne surađuju, nego odigraju izdaju, oba dobivaju 1 bod [15].

### 4.1. Prvi Akselrodov turnir

U ovom poglavlju objašnjen je teorem prema kojem je napravljen praktični dio rada. Akselrod je napravio dva turnira. U prvom turniru sudjelovalo je 15 strategija, a u drugom turniru sudjelovale su 63 strategije. Zaključci i dobiveni rezultati ostavili su ih u nedoumici jer takve rezultate nisu očekivali.

Igra je temeljena na Zatvorenikovoju dvojbi u kojoj postoji tablica s bodovima. Istovremeno sudjeluju dva igrača, svaki sa jednom odabranom strategijom. Svaki igrač ima pravo na suradnju ili ne suradnju, to jest igranje izdaje. U slučaju kada oba igrača surađuju svaki igrač dobiva 3 boda. Kada jedan igrač odigra suradnju, a drugi izdaju, igrač koji je igrao suradnju dobiva 0 bodova, a igrač koji je igrao izdaju dobiva 5 bodova. Ako oba igrača ne surađuju, nego odigraju izdaju, oba dobivaju 1 bod [15].

### 4.1. Prvi Akselrodov turnir

Axelrod je 1984. godine odradio razna ispitivanja i jedno od njih je bilo koja je strategija najbolja? Ideja mu je bila organizira računalni turnir, no za to su mu trebale razne strategije do kojih je došao zamolivši zajednicu stručnjaka teorije igara da napišu svoje strategije, to jest pravila strategija. Dobio je 14 strategija koje je programirao, te je dodao petnaestu strategiju kao slučajnu koja je zapravo bila ne - strategija i koja je služila kao kontrolna provjera.

Program je sučelio 15 strategija 15 puta, to jest 225 igara, u 200 iteracija Zatvorenikove dvojbe, a glavni cilj je bio skupiti što više bodova. Pobjedila je jednostavna strategija profesora Anatola Rapoporta nazvana TFT (engl. tit for tat) u slobodnom prijevodu „milo za drago“. *TFT strategija* je strategija u kojoj igrač 1 prvo uvijek surađuje, a u drugom koraku igre gleda prošli potez igrača 2, te prema potezu igrača 2 odabire suradnju ili izdaju u drugom koraku. Dobre strategije su prošle puno bolje od loših strategija. Zaključak je da uspjeh jedne strategije ovisi o drugoj ponuđenoj strategiji [15].

U ovom slučaju 3 glavna faktora TFT strategije su: da se izbjegava nepotreban sukob dokle god protivnik surađuje, oprašta protivnikov ulazak u sukob i odgovara na protivnikov neizravan sukob. TFT je strategija kojoj je cilj sakupiti što više bodova sa suradnjom, ali ne želi dopustiti gubitak bodova iskazivanjem dobronamjernosti dok suprotan igrač izaziva nesuradnju. Bitno je da postoji mogućnost oprosta, to jest kada suprotan igrač krene surađivati tada TFT surađuje, neovisno o prošlim potezima [15].

Originalna igra prema kojoj je američki znanstvenik Robert Axelrod osmislio turnir zove se zatvorenikova igra. Radi se o jednostavnoj kockarskoj igri koja je svojom jednostavnošću ponekad uspjela zbuniti cijenjene znanstvenike. Igra je objašnjena u mnogim knjigama. Smatra se da će zatvorenikova igra i načini igranja riješiti bitne strateške probleme današnjice, kao na primjer mogući treći svjetski rat. Vjeren prikaz u stvarnom životu nam pružaju divlje životinje i biljke koje prikazuju beskonačnu zatvorenikovu igru. Osnovni primjer koji je Axelrod prezentirao svojim kolegama zvuči ovako: „ Određeni bankar isplaćuje i presuđuje dobitke dvojci igrača. Pretpostavka je da su igrači jedan drugome protivnici iako za igru nije nužno da su igrači na suprotstavljenim stranama. Svaki igrač ima na raspolaganju samo dvije karte: izdaju i suradnju. Igra započinje odabirom jedne karte za svakog igrača, te okretanjem karte licem prema stolu. Oba igrača igraju istovremeno kako odabir jednog igrača ne bi utjecao na odabir drugog igrača. Bankar okreće obje odabrane karte. Postoje četiri moguća ishoda, zbog 2x2 karata i igrača. Svaki ishod igre nagrađen je američkim dolarima, a visina nagrade ovisi o dogovorenim pravilima [15].

Ishod 1: Oba igrača igraju suradnju. Prema pravilima igre bankar obojci igrača isplaćuje 300 američkih dolara. Ishod 1 prozvan je „nagrada za obostranu suradnju“.

Ishod 2: Oba igrača igraju izdaju. Prema pravilima igre bankar obojci igrača isplaćuje 10 američkih dolara, to jest kažnjava ih malom svotom novaca. Ishod 2 prozvan je „kazna za obostranu izdaju“.



Ishod 3: Igrač jedan igra suradnju, igrač dva igra izdaju. Prema pravilima igre bankar igraču jedan isplaćuje 100 američkih dolara zbog „naivnosti“ to jest suradnje, a igraču dva isplaćeno je 500 američkih dolara zbog „iskušenja za izdaju“.

Ishod 4: Igrač broj jedan igra izdaju, a igrač broj dva igra suradnju. Prema pravilima igre bankar igraču jedan isplaćuje 500 američkih dolara zbog „iskušenja za izdaju“, a igraču dva 100 američkih dolara zbog „naivnosti“.

Ishodi 3 i 4 su zrcalan projekcija u kojoj jedan igrač prolazi odlično, a drugi vrlo loše. Ishodi 1 i 2 su dobra za oba igrača, no ishod 1 je puno bolji ishod od ishoda 2. Točni iznosi nagrade ili kazne su manje bitni. Nebitna je i količina isplata i kazni. Glavna značajka igre koja se zove zatvorenikova igra je pravilo, to jest redosljed. Pokušaj izdaje je bolji od nagrade za obostranu suradnju, a nagrada za obostranu suradnju je bolja od kazne za obostranu izdaju, a kazna za obostranu izdaju je bolja od kazne za naivca.

*Slika 3. Zatvorenikova igra primjer isplata*

		IGRAČ 1	
		SURADNJA	IZDAJA
IGRAČ 2	SURADNJA	<p>NAGRADA</p> <p>Uzajamna suradnja</p> <p>300 \$</p>	<p>KAZNA ZA NAIVCA</p> <p>-100\$</p>
	IZDAJA	<p>IZDAJA</p> <p>500\$</p>	<p>KAZNA</p> <p>Obostrana izdaja</p> <p>-10\$</p>

*Izvor: R. Dawkins: Sebični gen, Izvori, Zagreb, 2007.*

Postoji valjan razlog zašto se zatvorenikova igra naziva i zatvorenikova dilema. Dilema je kolebanje u odlučivanju, položaj sa dvije mogućnosti u kojoj je potrebo odlučiti se za jednu mogućnost. Pregledom slike Zatvorenikova igra pregled isplata vidljivo je što prolazi kroz glavu igraču jedan. Svjestan je da može odigrati samo dvije opcije, izdaju ili suradnju. Pregledom slike ako igrač 2 odigra izdaju, najbolja opcija je da i igrač 1 odigra izdaju. Rezultat je kazna za obostranu izdaju, no da je igrač 1 odigrao suradnju dobio bi kaznu za naivca, što je puno lošije od izdaje. Druge opcije koje se mogu odigrati su: suradnja ali protivnik može odigrati izdaju. Igranjem obostrane suradnje oba igrača profitiraju sa 300 američkih dolara, ali ako jedan odigra izdaju nagrada je 500 američkih dolara. Odluka izdaje ostaje najbolja odluka za igrača 1, bez obzira na odluku igrača 2. Tako se razvila logika da što god učinio igrač 2, igrač 1 mora odigrati izdaju, ali gledajući sa strane igrača 2 njegova logika je da isto mora odigrati izdaju bezobzira na igrača 1. Kada igru odigraju dva razumom vođena igrača, oba igrača će odigrati izdaju iako su svjesni da bi suradnjom zaradili puno više. To je odgovor na riječ dilema u zatvorenikovoju igri, zbog činjenice da se čini ludo paradoksalnom. Riječ zatvorenikova dolazi od primjere sa kaznama zatvora umjesto novčanom nagradom ili kaznom. [15]

Zatvorenikova igra kao takva je igra u kojoj se potezi dogode samo jednom, no postoji drugi oblik zatvorenikove igre takozvana zatvorenikova igra sa iteracijama, to jest ponavljanima. Ponavljana igra je malo složenija, ali to daje nadu da se igra, to jest igre ne moraju završiti samo izdajom. Ponavljana zatvorenikova igra je ista igra kao i zatvorenikova igra sa istim igračima i bankarom, koja se ponavlja neograničeni broj puta. Igra se igra sa dva igrača, bankarom koji dijeli i otkriva karte. Karte su izdaja ili suradnja. Razlika je da nakon svake igre, igra ne prestaje nego se nastavlja sa istim igračem. Takva vrsta igre dopušta da se stvori povjerenje ili ne povjerenje prema suprotnom igraču. U iteriranoj zatvorenikovoju igri fokus se prebacuje na zaradu od bankara, a ne na zaradu od izdaje drugog igrača. Prema pravilima igre nakon 10 iteracija teorijski zarada iznosi 5000 američkih dolara, ali takav slučaj moguće je samo ako je jedan igrač naivan, dok drugi igrač stalo igra izdaju. Puno realniji slučaj je da oba igrača igraju suradnju, te oba igrača bivaju isplaćena sa 3000 američkih dolara. Najrealniji slučaj je da će svaki igrač igrati naizmjenično izdaju i suradnju, te će oba igrača priskrbiti srednju svotu novaca. [15]

Vrlo realan prikaz zatvorenikove igre sa iteracijama je primjer ptica koje se čiste od krpelja.

Slika 4. Zatvorenikova igra primjer uklanjanje krpelja kod ptica

		PTICA 1	
		SURADNJA	IZDAJA
PTICA 2	SURADNJA	<b>OBOSTRANA NAGRADA</b> Obostrano uklanjanje krpelja	<b>KAZNA ZA NAIVCA</b> Naivnoj ptici ostaju krpelji, dok ih ona čisti sa druge ptice
	IZDAJA	<b>IZDAJA</b> Druga ptica biva očišćena od krpelja, dok naivcu ostaju krpelji	<b>KAZNA</b> Obostrano ne uklanjanje krpelja

Izvor: R. Dawkins: *Sebični gen, Izvori, Zagreb, 2007.*

Primjer koji potječe iz prirode i iz nužnosti zbog činjenice da ptice same sebi ne mogu očisti krpelje sa glave prikazuju stvaran prikaz zatvorenikove igre sa iteracijama. Čini se pravednim da se pomoć uzvrati pomaganjem, no ptice su individualan bića.

Ishod 1: Obje ptice surađuju tako da jedna drugu očiste od krpelja. Nagrada za obostranu suradnju je ptica bez krpelja i dobiveno povjerenje za sljedeću iteraciju, to jest čišćenje.

Ishod 2: Obje ptice odabiru izdaju, to jest ne pomoći jedna drugoj. Kazna za takvo ponašanje je da obje ptice ostaju ne očišćene od krpelja, stvoreno je ne povjerenje među pticama, a nagrada je neutrošeno vrijeme i energija na čišćenje.

Ishod 3: Ptica 1 čisti krpelje ptici 2, ali ptica 2 odbija očistiti pticu 1. Ptica 1 doživljava izigranost od ptice 2, to jest postaje naivac zbog svoj utrošenog vremena i energije, a zauzvrat biva izdana, to jest neočišćena.

Ishod 4: Ptica 2 čisti krpelje ptici 1, ali ptica 1 odbija očistiti pticu 2. Ishod 4 prikazuje ishod 3 samo sa obrnute strane, to jest sa strane izdajnika, a ne naivca. U ovom slučaju ptica biva očišćena, bez da uloži vrijeme i energiju u čišćenje druge ptice.

Činjenica da se ptice ne čiste samo jednom nego više puta tokom svog života i da pamte ponašanja, otvara mogućnost da se zatvorenikova igra doživi u stvarnom životu . Prema dosadašnjim zapažanjima ptica, ptice koje surađuju nastavljaju daljnju suradnju, ptice koje ne surađuju traže nove ptice za suradnju, a ishodi sa izdajom i suradnjom u ovisnosti su ponašanja samih ptica i okoline.[15]

U jednostavnoj zatvorenikovoj igri najrazumnija strategija je izdaja. Zatvorenikova igra sa iteracija nudi puno više strateških mogućnosti i ishoda. Iteracija, ponavljanje pruža mogućnost razrade strategija. Neke strategije su bolje od drugih, gledano prema količini nagrada, no za sada nije otkrivena najbolja strategija. Znanstvenici su stvorili razne strategije, neke su preuzete iz prirode i okoline, neke su stvorene pukom maštom znanstvenika. Zadatak otkrivanja najbolje strategije postavio je američki znanstvenik Robert Axelrod. Ideja je pokrenuta organizacijom natjecanja. Poslana je obavijest znanstvenicima koji se bave istraživanjem „teorije igara“ da su slobodni pristupiti natjecanju na način da pošalju svoju strategiju kako pobijediti u zatvorenikovoj igri sa iteracijama. Strategije su u ovom slučaju preprogramirana pravila za igranje, opisane su programskim jezikom. Poslano je 14 različitih strategija. Radi ispravnosti mjerenja znanstvenik Axelrod dodaje 15. strategiju, takozvana slučajna strategija. Slučajna strategija isprogramirana je da nasumično odabire suradnju ili izdaju. Služi kao osnovna „ne strategija“, to jest ako strategija daje lošije rezultate od slučajne strategije tada je ta strategija jako loša. Znanstvenik Axelrod objedinjuje sve strategije u veliko računalo. Svaka strategija sparena je sa svakom strategijom, pa i sa svojim kopijom u zatvorenikovoj igri sa iteracijama. Postojanje 15 strategija zahtjeva igru 15 x 15, zapravo 225 odvojenih igra. Svaka igra odigrava 200 iteracija. Zbrojeni dobitci tvore popis strategija od najbolje prema najlošijima. Cilj je pronaći najbolju strategiju koja je skupila najviše bodova, novaca. Prema Axelrodovom nacrtu za obostranu suradnju dodijeljeno je 3 boda, iskušenje za izdaju 5 bodova, obostrana izdaja 1 bod, a kazna za naivca 0 bodova.

Slika 5. Prvi Akxelrodov turnir – bodovanje

		IGRAČ 1	
		SURADNJA	IZDAJA
IGRAČ 2	SURADNJA	<b>NAGRADA</b> Uzajamna suradnja 3 boda	<b>KAZNA ZA NAIVCA</b> 0 bodova
	IZDAJA	<b>IZDAJA</b> 5 bodova	<b>KAZNA</b> Obostrana izdaja 1 bod

Izvor: R. Dawkins: *Sebični gen, Izvori, Zagreb, 2007.*

Minimalan broj bodova prema zadanim bodovima iznosi 0, a maksimalan broj bodova prema zadanim bodovima i iteracijama (200 igra, maksimalan broj bodova 5, 15 strategija) iznosi 15000 bodova. Realno ostvarenje bodova neke strategije je 600 bodova. Igrači na turniru nisu ljudi nego programi, a strategije su predstavnici svojih autora. Ponuđene su jako maštovite strategije. Pobjednička strategija je zapravo jedna od jednostavnijih i vrlo racionalna. Strategija TFT, prevedeno na hrvatski „milo za drago“ stvorena od profesora, filozofa i teoretičara Anatola Rapoporta. Milo za drago strategija započinje igru sa suradnjom, a zatim oponaša prethodni potez protivnika. Prva iteracija započinje sa suradnjom, ako protivnik prvu igru odigrati isto milo za drago i prvu iteraciju odigra suradnju, druga iteracija će se nastaviti sa suradnjom, kao i sve ostale iteracije dok se ne odigra svih 200. Oba igrača dobivaju 600 bodova prema zadanim pravilima igre. Slučaj kada jedan igrač igra milo za drago, a drugi igrač odabire strategiju „naivni istraživač“ ; vrsta strategije koja je slična strategiji milo za drago ali svakih 10 poteza nasumično odigra izdaju radi dobivanja velikog dobitka, to jest izdaje.

Takva igra odigrava se izdajom drugog igrača koji osvaja 5 bodova, zatim prvi igrač igra izdaju, te osvaja 5 bodova što dovodi do naizmjenične izdaje i suradnje i na kraju je zbroj bodova 300.

Slučaj dvojice naivnih istraživača donosi još manje bodova, zbog činjenice da uzastopne izdaje počinju puno ranije. Slučaj sa pokajničkim istraživačem započinje slično kao strategija naivan istraživač, no pokajnički istraživač napisan je kao strategija koja aktivno pokušava prekinut niz izdaja ukoliko se krenu događati. Strategija je napisana tako da zapisuje u memoriju prethodne izdaje i suradnje. Na višestruke ponovljene izdaje strategija reagira suradnjom, te tako guši dugotrajne gubitke u početnim koracima igre.

Jedna od najuspješnijih strategija Akselrodovog turnira ujedno je i jedna od najrazrađenija od svih ostalih strategija. Poslana od nepoznatog autora pod imenom „poticaj za ugodno nagađanje“. Akselrod strategije dijeli prema namjeni na „dobre“ i „loše“. Prema toj podijeli dobre strategije su one koje nikad prve ne igraju izdaju, no ako primijete osvetu izdavanjem i same će krenuti igrati izdaju. Naivni istraživač i pokajnički istraživač svrstane su u zle strategije, a milo za drago svrstana je među dobre strategije. Od 15 ponuđenih strategija koje sudjeluju u turniru, 8 strategija okarakterizirano je kao dobre strategije, dok je 7 strategija okarakterizirano kao loše strategije i zadnja strategija je tester strategija koja je postavljena od samog Roberta Akselroda. Zanimljiva činjenica je da su prvih 8 strategija sa najboljim rezultatima baš sve dobre strategije, dok su zle strategije prema rezultatima ostale daleko iza prema bodovima. Strategija milo za drago postigla je rezultat od 84 % od osnovne vrijednosti. Ostale dobre strategije postigle su rezultate između 83% i 78% od osnovne vrijednosti, dok je najuspješnija zla strategija postigla tek 66% sa imenom „graaskamp“. Sa popriličnim brojem dokaza ovo je igra, turnir u kojoj dobri momci dobro prolaze. [15]

Osim osnovne podjele strategija, Akselrod je strategije podijelio na opraštajuće i ne opraštajuće. Milo za drago spada pod opraštajuće strategije, jer kažnjava trenutnu izdaju, no nakon toga nastavlja sa suradnjom. Ne opraštajuće strategije imaju puno dužu memoriju pamćenja izdaja. Jedna od takvih strategija nazvana je „zlopamtilo“. Strategija zlopamtilo pamti izdaju kroz cijelu igru i sve iteracije. Razlog zašto ne opraštajuće prolaze lošije nego opraštajuće, gledajući prema dobivenim bodovima na Akselrodovu turniru je ta da se ne mogu izvući iz niza obostranog osvećivanja nakon što jedna strana prva odabere odigrati izdaju, pa čak i onda kada jedna strana odluči pokajati se i odigrati suradnju. Strategija dvostruko milo za drago klasificirana je kao jako opraštajuća jer omogućava suparnicima dvije izdaje u nizu prije igranja karte osвете, to jest izdaje. Strategija se na prvu čini previše naivnom no prema Akselrodovom izračunu strategija postiže odlične rezultate, jer je odlična u izbjegavanju nizova međusobne izdaje i time postiže više bodova.

Dvije glavne karakteristike strategija koje pobjeđuju su prema Akselrodovom turniru: dobrota i praštanje. Utopijski zaključak da se dobrota i praštanje cijene i isplate začudilo je mnoge znanstvenike jer su htjeli ponuditi lukave i zle strategije misleći da će te strategije ostvariti bolje bodove. [15]

#### **4.2. Drugi Akseirodov turnir**

Drugi turnir održan je zbog činjenice da su mnogi stručnjaci ostali iznenađeni rezultatima prvog turnira i činjenicom da su najbolje prošle strategije koje su uključivale dobrotu i praštanje, naspram strategija koje nisu surađivale. Za novi turnir znanstvenici su ponudili profinjeno zle strategije. Objavom drugog turnira Robert Akselrod je dobio 62 prijave strategija, te je dodao strategiju slučajni uzorak. U ovom slučaju nije određen broj iteracija na 200 nego je ostavljen otvoren zbog većeg broja strategija koje su međusobno morale doći u interakciju. Znajući što ih čeka znanstvenici su pokušali zavarati program tako što su usmjerili svoje strategije u činjenicu da je TFT, to jest „*milo za drago*“ bio pobjednik prethodnog turnira, te su pisali strategije koje bi mogle pobijediti TFT [15].

Dvije osnovne podjele između novih strategija bile su: dobre strategije koje praštaju. John Maynard Smith napisao je strategiju „*milo za dvostruko drago*“ smatrajući ako je TFT pobijedio prvi put u prvom turniru, da sa superopraštajućom strategijom sigurno pobjeđuje. Druge strategije bile su zle strategije kojima je cilj gledati sebe i svoju korist. No i ovaj put pokazalo se da opraštajuće, dobre strategije prolaze bolje nego ne opraštajuće, zle strategije. Iako u drugom turniru dobre strategije nisu imale toliko dobre rezultate zbog činjenice da je bilo puno zlih strategija koje su bile usmjerene namjernom uništavanju dobrih strategija. Uspjeh jedne strategije ovisio je o ponuđenoj suprotnoj strategiji [15].

Jedno od najvećih iznenađenja pobjeda je strategije *milo za drago* Anatola Rapoporta uz uspjeh od 96% od osnovne vrijednosti. U drugom turniru je ponovo dokazano da dobre strategije prolaze bolje od zlih strategija. Među prvih 15 mjesta našlo se 14 dobrih i jedna zla strategija, dok se na 15 posljednjih mjesta smjestilo 14 zlih i jedna dobra strategija. Favorit ovog turnira bila je strategija dvostruko *milo za drago*, no to se nije dogodilo zbog ciljano napisanih zlih strategija koje su programirane posebno protiv takve i sličnih dobrih opraštajućih strategija. Drugi turnir istaknuo je važnu činjenicu da uspjeh strategije ovisi o ostalim ponuđenim strategijama. Razlika u bodovima pobjedničkih strategija i samim strategijama između prvog i drugog turnira to dokazuju. [15]

Nakon odrađenih turnira Robert Akselrod svoje teorije i ideje usmjerava prema ESS terminima. ESS (engl. evolutionarily stable strategy) označava evolucijski stabilnu strategiju. ESS je vrsta strategije sa načelom da se igrač uspješno bori protiv kopija samog sebe. Znanstvenici objašnjavaju ESS kao uspješnu strategiju koja prevladava u populaciji, te zato teži suzbiti samu sebe i ju dovodi do većeg uspjeha. Robert Akselrod stupa u kontakt sa znanstvenikom W. D. Hamiltonom, te je njihova suradnja zapisana u odličnom zajedničkom radu koji je objavljen u časopisu Science 1981. godine. Rad je osvojio nagradu Newcomb Cleveland Američkog udruženja za napredak znanosti. U radu su opisani biološki primjeri zatvorenikove igre sa iteracijama i odličnim rješenjima.

Akselrod spaja ESS i „kružni dodir“. Kružni dodir je način sučeljavanja strategija. Svaka strategija jednog igrača sučeljava se sa svakom strategijom drugog igrača jednak broj puta. Zbroj bodova sučeljenih strategije se sumira i svaka strategija dobiva bodove ovisno o zadanim pravilima igre, te se generira završni rezultat svake strategije. Uspješne strategije u ovom slučaju da bi bile uspješne moraju zadovoljiti dva kriterija. Prvi kriterij je da strategija bude uspješnija od ostalih strategija, a drugi je da pobedi samog sebe, to jest svoju kopiju. Akselrod takve strategije naziva „čvrstim“ strategijama. Primjer jedne takve strategije je milo za drago. Ono što zabrinjava znanstvenike su slučajne strategije predložene od ostalih znanstvenika. Slučajnost je da je u prvom Akselrodovom turniru pola strategija bilo napisano kao dobre strategije, a pola njih kao zle strategije. Slučaj da je 13 strategije bilo napisano kao zle strategije označavalo bi da milo za drago ne bi pobijedila jer bi okruženje za nju bilo loše.

Uspješnost neke strategije ovisi o ponuđenim strategijama, to jest ovisi o ljudskoj hirovitosti. Da bi takvu vrstu slučajnosti i hirovitosti sveli na minimum znanstvenici su krenuli razmišljati na način evolucijski stabilne strategije. Odabirom strategija koje se dobro snalaze među sobom i kada su brojne u populaciji strategija. To je bitno ako primjerice zamijenimo bodove sa potomstvom kao u svijetu darvinizma. Darwinisti smatraju da su uspješne one strategije koje su postale brojne u populaciji strategija. Da bi se strategija smatrala uspješnom, potrebno je da dobro prolazi u sukobima, posebno ako je brojna, to jest ako se nalazi u okruženju u kojem dominiraju njeni duplikati. [15]

Robert Akselrod održava treći turnir. Cilj turnira je sprovesti prirodni odabir i naći evolucijski stabilnu strategiju, ESS. Akselrod formalno ne smatra to trećim turnirom zbog činjenice da koristi već postojeće strategije drugog turnira, svih 63 ponuđenih i napisanih od znanstvenika s



tog područja. Postavljeni su osnovni parametri igre, strategije, te su procesirane u računalu koje je prikazalo rezultate prve generacije evolucijskog nasljeđivanja. U prvoj generaciji prije igranja svaka strategija ima jednak udio u okruženju. Nakon odigranog prvog kruga, dobitci su isplaćeni kao potomstvo, a ne kao novac ili bodovi. Iteracijom igre, neke strategije ostaju u igri, dok neke postaju sve rjeđe i s vremenom izumiru i nestaju iz igre. Jake strategije postaju sve brojnije. Mijenjanjem odnosa u okolini, mijenjaju se i strategije i potezi u svakoj iteraciji. [15]

Stabilnost je dostignuta oko 1000. iteracije. Stabilizirale su se promjene u odnosima, a time i u okruženju. Zle strategije krenule su umirati od početka iteracija, do 200. Iteracije većina zlih strategija bila je ne postojeća. Samo jedna zla strategija uspjela je doživjeti 200. Iteraciju. Strategija pod imenom Harrington. Nena uspješnost rasla je do 150. Iteracije da bi do 1000 u potpunosti nestala. Strategija je dobro prolazila zbog odlične taktike da iskorištava dobre strategija poput dvostruko milo za drago dok one nisu ispale zbog činjenice da su bile previše opraštajuće, a time i naivne. Izumiranjem zlih strategija, ostaju samo dobre strategije. Dobre strategije međusobno nastavljaju surađivati, jer nema izdaja i time prestaje mogućnost razlučivanja istih.

Iako strategije koje su surađivale i došle do 1000. iteracije izgledaju kao ESS, zapravo nisu pravi ESS, jer prava evolucijski stabilna strategija ne smije, biti podložna napadima rijetkih zlih strategija kada je česta. Znanstvenici Robert Boyd i Jeffrey Lorberbaum pokušavajući stvoriti ESS strategiju igrali su se idejom spajanja strategija dvostruko milo za drago i nasumični milo za drago. Želja je bila spojiti dobru strategiju sa zlom strategijom koja i nije zapravo zla ali prvi korak započinje sa izdajom što ju klasificira kao zlu strategiju. Problem kod takve vrste strategije je da u iteraciji sa dobrom strategijom, ne dolazi do napretka jer početna izdaja generira niz obostranog osvećivanja što vodi u propast strategije. U slučaju spajanja sa jako opraštajućom strategijom obje strategije završavaju sa barem osnovom vrijednošću. Boyd i Lorberbaum dokazuju da spoj opraštajuće dobre i malo zle strategije može stvoriti napade na strategije slične ESS, te ih maknuti iz igre. [15]

Znanstvenik Robert Axelrod priznao je da milo za drago nije prava evolucijski stabilna strategija, te je opis morao prilagoditi tako što je uveo pojam „kolektivno stabilna strategija“. U igrama sa iteracijama pogotovo igrama sa 1000 iteracija količina ESS i kolektivno stabilnih

strategija može biti jedan ali i više njih istovremeno. No pitanje je sreće i hira koja će od njih prevladavati u populaciji. Ovisno o okolini, u nekim okolinama uvijek izdaja postavit će se kao stabilna strategija, a u drugoj okolini to će biti primjerice strategija milo za drago. Svaka stabilna strategija teži tome da ostane glavna. [15]

## 5. Primjer teorije igara na primjeru Akselrodovog teorema

U praktičnom djelu rada testiran je primjer Akselrodovog turnira. Akselrodov turnir opisan je u četvrtom poglavlju diplomskog rada. U praktičnom dijelu rada korišteno je samo 6 strategija. Radi jednostavnosti i izvedbe prijenosa samog programa te demonstracije istog odabran je objektno orijentiran programski jezik JavaScript i JSBin tool. Ovi alati jednostavni su za korištenje, besplatni i svima dostupni.

### 5.1. Opis slučaja – programa

U empirijskom djelu rada odabran je Akselrodov turnir. Na turniru sudjeluju dva igrača. Svaki igrač ima pravo u jednoj iteraciji, to jest igri, iskoristiti jednu od 6 ponuđenih strategija. Strategije koje su dozvoljene su: ALLC, ALLD, RAND, TFT, JOSS i TESTER. Kako bi bili sigurni da je svaki igrač odigrao barem jednom sve strategije postavljen je velik broj iteracija. U ovom primjeru broj iteracija je 90 000. Unutar svake iteracije igrač može odigrati suradnju ili izdaju.

U praktičnom dijelu rada vrijedi pravilo da obostrana suradnja donosi svakom igraču 1 bod. U slučaju kada jedan igrač odigra suradnju, a drugi izdaju ili obrnuto tada oba igrača ostaju bez bodova. Treći slučaj je kada oba igrača odigraju izdaju i tada oba igrača ostaju bez bodova. Više iteracija jednog igrača čini strategiju tog igrača.

Program radi tako da u  $n$  koraka nasumično odabire strategije i međusobno ih sukobljava. Na taj način, to jest nasumičnim odabirom strategija izbjegava se ovisnost o redoslijedu strategija (konačni rezultat je strogo ovisan o redoslijedu s kojim se strategije sukobljavaju), takozvana "ovisnost puta", dok se velikim brojem iteracija stabilizira prosjek konačnog rezultata.

Ovisnost puta je objašnjena tako da su odluke koje odabiremo za bilo koju okolnost ograničene odlukama koje smo donijeli u prošlosti ili događajima koje smo doživjeli iako te odluke možda nisu više značajne za odabir novih odluka. Također, nasumičan odabir strategija kroz velik broj iteracija eliminira potrebu takozvanog višeagentnog sustava kako je konačni rezultat u prosjeku jednak.

U tablici 4. prikazana je matrica koja je korištena u programu. Prema toj matrici dobiva se bod kada oba igrača surađuju. U slučaju kada samo jedan igrač surađuje tada nitko ne dobiva bod,

kao ni kad niti jedan igrač ne surađuje. U zaključku će biti uspoređena razlika između Akselrodove tablice i tablice autora u kojoj mjeri je rezultat isti ili drugačiji ako nema umanjnih i negativnih bodova.

*Tablica 4. Matrica bodovanja praktičnog rada*

		IGRAČ 1	
		SURADNJA	IZDAJA
IGRAČ 2	SURADNJA	<p>NAGRADA</p> <p>Uzajamna suradnja</p> <p>1 bod</p>	<p>KAZNA ZA NAIVCA</p> <p>0 bodova</p>
	IZDAJA	<p>IZDAJA</p> <p>0 bodova</p>	<p>KAZNA</p> <p>Obostrana izdaja</p> <p>0 bodova</p>

*Izvor: Izrada autora*

## 5.2. Odabrane strategije

U ovom potpoglavlju opisane su strategije koje su korištene u praktičnom dijelu diplomskog rada. Danas postoji mnogo strategija i potrebno je samo malo mašte za stvaranje nove strategije. Strategija kao takva je planiranje ponašanja radi ostvarenja zadanog cilja. U programu je korišteno 6 poznatijih strategija. Svaki igrač koristi svih 6 strategija.

**ALLC** - (engl. Always cooperate) strategija u kojoj igrač uvijek surađuje. Kada jedan igrač unutar igre sa više iteracija stalno odabire surađivati tada igrač koristi surađujuću strategiju.

**ALLD** – (engl. Always defect) strategija u kojoj se igrač uvijek sukobljava. Kada jedan igrač

unutar igre sa više iteracija stalno odabire ne surađivati, to jest izdaju, tada igrač koristi ne surađujuću strategiju.

**RAND** – (engl. Random) strategija u kojoj igrač nasumičnim odabirom bira između dviju strategija. Kada jedan igrač u jednoj iteraciji odabire surađivati, a u drugoj ne surađivati tada igrač koristi nasumičnu strategiju.

**TFT** – (engl. Tit for tat) strategija u kojoj igrač u prvom potezu odabire suradnju, a zatim ponavlja prethodnikov potez (*milo za drago*). Kada igrač unutar jedne igre sa više iteracija prvo odabire igrati suradnju, a zatim gleda protivnikov potez i prema tom potezu igra sljedeću iteraciju, to jest ako protivnik u prvoj iteraciji odigra suradnju, u sljedećoj iteraciji igrač će odigrati suradnju. Ako protivnik u prvoj iteraciji odigra ne suradnju igrač će u drugoj iteraciji odigrati nesuradnju iako je u prvoj iteraciji odigrao suradnju.

**JOSS** – (Johann Joss) strategija koja je ista kao TFT, ali svaku petu igru igra kao sukob. Kada igrač unutar jedne igre sa više iteracija prvo odabere igrati suradnju, a zatim gleda protivnikov potez i prema tome potezu odigra sljedeću iteraciju, to jest ako protivnik u prvoj iteraciji odigra suradnju, u sljedećoj iteraciji igrač će odigrati suradnju. Ako protivnik u prvoj iteraciji odigra nesuradnju igrač će u drugoj iteraciji odigrati nesuradnju iako je u prvoj iteraciji odigrao suradnju.

Osim što u svakoj petoj iteraciji sa protivnikom igra nesuradnju iako je protivnik u prethodnoj iteraciji možda igrao suradnju.

**TESTER** – strategija koja u prvom potezu igra sukob, a u drugom ako suprotan igrač surađuje igra TFT, ako suprotan igrač ne surađuje tada nasumično (RAND) surađuje i igra sukob. Kada igrač unutar jedne igre sa više iteracija prvo odabire igrati nesuradnju, a zatim ako protivnik odigra suradnju, igrač nastavlja igrati iteracija kao TFT, a ako protivnik odigra nesuradnju tada igrač nastavlja igrati iteracije nasumično, to jest igra RAND.

### 5.3. Program i rad programa

U ovom potpoglavlju opisan je program koji je korišten u praktičnom dijelu diplomskog rada, objašnjeno je zašto je odabran, koje su mu prednosti i opisan je rad samog programa prema Akselrodovom teoremu.

JavaScript, popularno zvan JS je dinamičan, objektno orijentiran, funkcionalan skriptni, programski jezik. Pored HTML-a i CSS-a, JS je jedan od tri jezika koji se koriste za izradu web stranica. Zbog ugrađenih programa u web preglednicima nije potreban dodatan program za izvođenje koda, nego se kod izvodi putem web preglednika. Zbog toga se pokazao kao idealan alat za napisati program. Jednostavan je za korištenje, besplatan je, ima mogućnost da se pokrene na svakom računalu koje ima pristup Internetu. Za upotrebu JavaScript koda nije potrebno imati posebne alate, dovoljno je napisati kod u već danim programima poput Notepada (Blok za pisanje), te ga pokrenuti u pregledniku, kao na primjer Chrome ili Internet Explorer.

Mogućnosti JavaScript-a:

- Reagira na događaje
- Pretvara dinamički tekst u HTML stranicu
- Validira podatke
- Kreira kolačiće
- Čitanje i pisanje HTML koda
- Detektiranje preglednika koji korisnik koristi

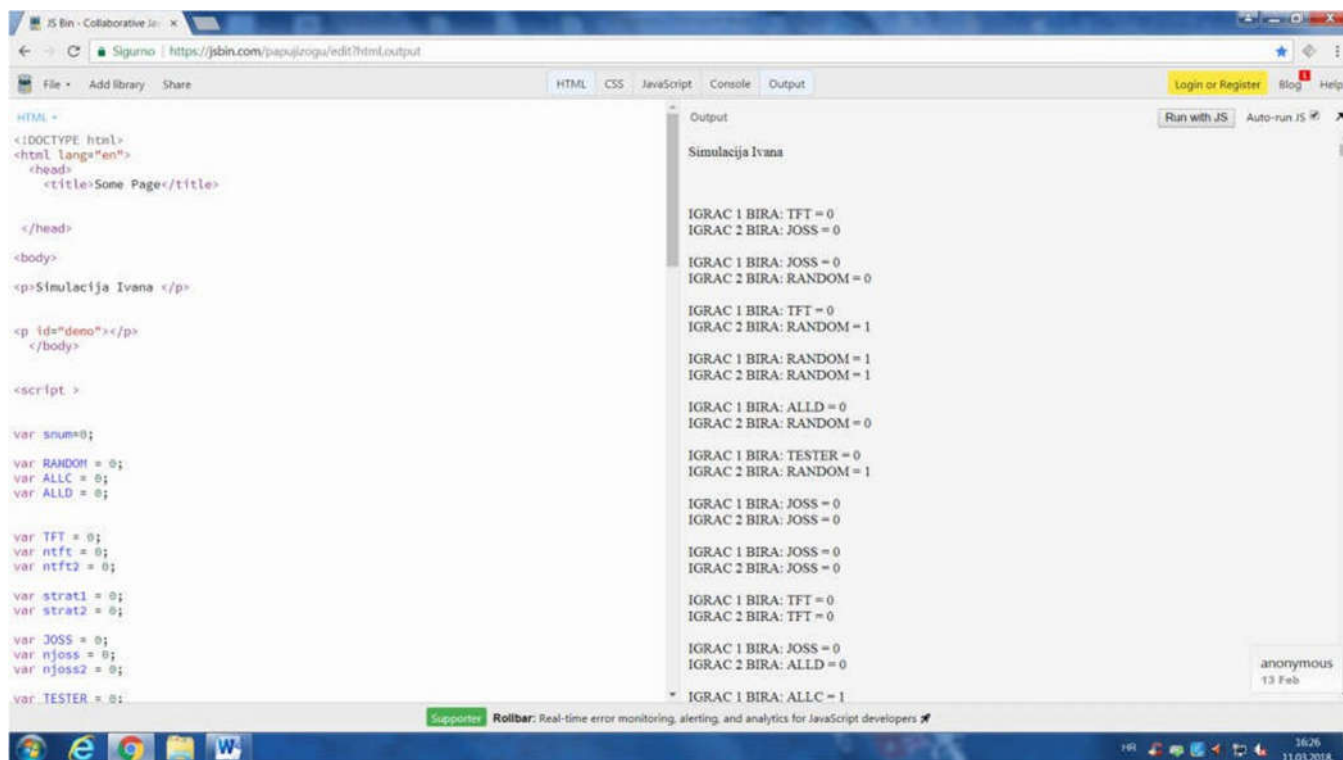
1996. godine Brendan Eich razvija JavaScript za kompaniju Netscape Navigator.

1997. godine ECMO razvija standard za JavaScript. Standard je nazvan ECMA – 262. 1998.

godine ISO je odobrio ECMA standard za JavaScript jezik.

Danas se JavaScript razvija i dalje, kao i standard. JS Bin program je besplatan online program za pronalazak grešaka u web jezicima. Web stranica putem koje se program izvršava: <https://jsbin.com/?html,output> U daljnjem djelu poglavlja prikazan je sam program, te je objašnjena njegova funkcionalnost dio po dio radi lakšeg razumijevanja koda.

Slika 6. Prikaz sučelja



Izvor: <https://jsbin.com/?html,output>

Program je pokrenut u JS Bin programu na Internetu. Prvi dio programa prikazuje varijable koje služe kao mjesta gdje se čuvaju brojevi podaci. Kod pokretanja programa sam program ih postavlja na zadane brojeve ili ako nema upisanih podataka tada ih po „defaultu“ (prema zadanom) postavlja u nulu. U prilogu 2. prikazane su varijable RANDOM, ALLC, ALLD, TFT, JOSS I TESTER. Jednostavne strategije imaju jednu varijablu. Složene strategije imaju više varijabli koje služe za pamćenje prošlih poteza.

U prilogu 2 prikazano je pokretanje petlje u kojoj se nalazi brojač kojem se može zadati količinu iteracija. U ovom radu odabrano je 90 000 iteracija radi vjerodostojnosti podataka.

U prilogu 2 prikazano je kako igrač 1 ulazi u igru tako da nasumično odabire broj od 1 do 6. Svaki broj označava jednu strategiju. Zatim igrač 1 odabirom broja od 1 do 6 bira, postaje mu zadana jedna od 6 strategija. Broj 1 označava odabir strategije TFT, broj 2 označava odabir strategije ALLC, broj 3 označava odabir strategije ALLD, broj 4 označava odabir strategije RAND, broj 5 označava odabir strategije JOSS i broj 6 označava odabir strategije TESTER.

U prilogu 4 prikazano je kako igrač 2 ulazi u igru tako da nasumično odabire broj od 1 do 6. Svaki broj označava jednu strategiju. Zatim igrač 2 odabirom broja od 1 do 6 bira, postaje mu

zadana jedna od 6 strategija. Broj 1 označava odabir strategije TFT, broj 2 označava odabir strategije ALLC, broj 3 označava odabir strategije ALLD, broj 4 označava odabir strategije RAND, broj 5 označava odabir strategije JOSS i broj 6 označava odabir strategije TESTER.

U prilogu 2 prikazano je kako program ulazi u uvjetnu naredbu. Uvjetna naredba zadana je unutar svakog koda i omogućuje grananje koda ako je određen slijed naredbi ispunjen. Program ulazi u uvjetnu naredbu u kojoj sumira koju strategiju je igrao igrač 1, a koju igrač 2. Ako su oba igrača odigrala unutar iteracije suradnju tada se *if naredba* ispunjava i program pamti suradnju, ako je jedan igrač ili su oba igrača odigrali nesuradnju, to jest izdaju, tada program nastavlja prolaziti kroz kod dok ne dođe do kraja koda. U prilogu 2 prikazan je ispis strategija sa brojem suradnji koje su zapamćene.

#### 5.4. Rezultat testiranja i zaključak

U ovom potpoglavlju objašnjeni su rezultati koji su posljedica koda objašnjenog u prethodnom poglavlju. Ispis se vrši kao brojčane vrijednosti za svaku strategiju. U prilogu 1 je prikaz zadnjih 200 iteracija i ispis rezultata igre. Tablica 5 prikazuje rezultate igre. U igri su sudjelovala 2 igrača. Svaki igrač je na raspolaganju imao 6 strategija i mogućnost odabira suradnje i ne suradnje. Zbog nekorištenja višeagentnog sustava korištena je velika količina iteracija 90 000 kako bi bili sigurni da je svaki igrač odigrao svaku strategiju i da je svaka strategija došla u sukob sa svakom strategijom. Broj iteracija = 90 000

Tablica 5. Rezultati testiranja

STRATEGIJA	REZULTAT
TFT	10856
ALLC	15699
ALLD	0
TESTER	11550



JOSS	3081
RANDOM	7928

*Izvor: Rješenje programa koda autora*

Nakon što je program obradio svih 90 000 zadanih iteracija, sa 6 različitih strategija i dva igrača, te odabirom suradnje ili ne suradnje. Prikazani su rezultati se prema tablici zbrajaju samo kada dva igrača surađuju i tada dobivaju svaki po 1 bod. Iako je program koji je napravljen za diplomski rad pojednostavljen, te u igru nisu uvedeni bodovi za nesuradnju i djelomičnu suradnju nego im je kazna nedobivanje bodova, dolazimo do sličnog zaključaka da suradnja uvijek ima više bodova, to jest koristi.

Program u n koraka nasumično odabire strategije i međusobno ih sukobljava. Na taj način, to jest nasumičnim odabirom strategija izbjegava se ovisnost o redoslijedu strategija (konačni rezultat je strogo ovisan o redoslijedu s kojim se strategije sukobljavaju), takozvana “ovisnost puta“, dok se velikim brojem iteracija stabilizira prosjek konačnog rezultata.

Također, nasumičan odabir strategija kroz velik broj iteracija eliminira potrebu takozvanog višeagentnog sustava kako je konačni rezultat u prosjeku jednak.

Zaključak je da strategije koje surađuju imaju zabilježene visoke bodove, a to su TFT sa 10856 bodova, ALLC sa 15699 bodova. Od ALLD je za očekivati da nema bodova zato što je programiran da ne surađuje, a ne suradnja donosi 0 bodova. JOSS je programiran da ne surađuje kada uđe u svaku petu iteraciju te rezultat od 3081 bodova to i prikazuje. Random u ovom slučaju ima više od 50% suradnje što je malo zabrinjavajuće ali ne i čudno. Zadnja strategija Tester koja je prekriveni TFT u pola slučajeva tako da je visoki rezultat opravdan.

Ovim primjerom smo dokazali da zapravo niti jedna strategija nije bolja od druge, nego da ovisnost proizlazi iz činjenice nasumičnosti koje dvije strategije će se sukobiti. Ono što je iznenadilo stručnjake prilikom testiranja Akxelrodovog teorema 1984. godine je da su dobre strategije koje surađuju imale više bodova, što je potvrđeno i u ovom primjeru.

Primjerom teorije igara na primjeru Akelrodovog teorema dokazano je da su sve strategije jednako dobre i da pobjeda jedne strategije ovisi o nasumično odabranoj strategiji protivnika.

## 6. Zaključak

U diplomskom radu obrađena je tema teorija igara. Teorija igara je mlada znanost koja postaje sve popularnija i zanimljivija za korištenje uz pomoć računala i raznih programa. Spoj prirodnih problema objašnjen putem matematike. Objašnjena je povijest teorije igara kao i primjena u različitim znanostima od biologije, politike do prava i filozofije.

Opisani su osnovni pojmovi koji igru čine igrom, te je opisana osnovna klasifikacija igara koja će se kroz vrijeme vjerojatno nadograđivati i doći će do dodavanja novih igara. Objašnjena je jedna od osnovnih igara, a to je Zatvorenikova dvojba u jednokratnim igrama kako bi dobili uvid u problem igre, te Zatvorenikova dvojba sa iteracijama. U daljnjim potpoglavljima objašnjena je Nashova ravnoteža i Akselrodov teorem na kojem se praktični dio rada temelji.

Praktični dio rada objašnjava implementaciju Akselrodovog turnira da bi utvrdili najbolju strategiju između dva proizvođača koji se trebaju probiti na tržištu. Programski kod napisan je u JavaScriptu zbog jednostavnosti izvedbe. JavaScript je jednostavan programski jezik koji se može izvoditi preko preglednika ili online programa, te nisu potrebne dodatne datoteke i programi.

Odabran je Akselrodov turnir u pojednostavljenoj verziji sa samo 6 strategija. Korištene strategije su ALLC, ALLD, TESTER, JOSS, RANDOM i TFT. Zbog lakšeg praćenja i zbrajanja pobjednika, bodovana je samo suradnja koja se dogodila između obje strategije, a nesuradnja i polovična suradnja nisu bodovane. Kako bi postojala sigurnost da su sve strategije međusobno suočene jedna sa drugom i kako bi se dobio što bolji uvid u točnost rezultata, odabrano je 90 000 iteracija. Kako je i Akselrodov teorem dokazao da dobre strategije koje surađuju bolje prolaze tako je i ovaj program potvrdio taj dokaz, kao i činjenicu da niti jedna strategija nije bolja jedna od druge, nego ovisno kako koja dođe u sukob jedna sa drugom tako je jedna uvijek bolja od druge strategije.

U Varaždinu, 18.05.2018.

IZJAVA O AUTORSTVU  
I  
SUGLASNOST ZA JAVNU OBJAVU

Završni/diplomski rad isključivo je autorsko djelo studenta koji je isti izradio te student odgovara za istinitost, izvornost i ispravnost teksta rada. U radu se ne smiju koristiti dijelovi tuđih radova (knjiga, članaka, doktorskih disertacija, magistarskih radova, izvora s interneta, i drugih izvora) bez navođenja izvora i autora navedenih radova. Svi dijelovi tuđih radova moraju biti pravilno navedeni i citirani. Dijelovi tuđih radova koji nisu pravilno citirani, smatraju se plagijatom, odnosno nezakonitim prisvajanjem tuđeg znanstvenog ili stručnoga rada. Sukladno navedenom studenti su dužni potpisati izjavu o autorstvu rada.

Ja, Ivana Žic (ime i prezime) pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor/ica završnog/diplomskog (obrisati nepotrebno) rada pod naslovom Primjena teorije igara na primjeru Akseleodovog teorema (upisati naslov) te da u navedenom radu nisu na nedozvoljeni način (bez pravilnog citiranja) korišteni dijelovi tuđih radova.

Student/ica:

(upisati ime i prezime)

(vlastoručni potpis)

Sukladno Zakonu o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju završne/diplomske radove sveučilišta su dužna trajno objaviti na javnoj internetskoj bazi sveučilišne knjižnice u sastavu sveučilišta te kopirati u javnu internetsku bazu završnih/diplomskih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice. Završni radovi istovrsnih umjetničkih studija koji se realiziraju kroz umjetnička ostvarenja objavljuju se na odgovarajući način.

Ja, Ivana Žic (ime i prezime) neopozivo izjavljujem da sam suglasan/na s javnom objavom završnog/diplomskog (obrisati nepotrebno) rada pod naslovom Primjena teorije igara na primjeru Akseleodovog teorema (upisati naslov) čiji sam autor/ica.

Student/ica:

(upisati ime i prezime)

(vlastoručni potpis)

## 7. Literatura

- [1] J. von Neumann, O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [2] R. Kopal, D. Korkut: *Teorija igara*, Comminus, VPŠ Libertas, Zagreb, 2011.
- [3] R. Kopal, D. Korkut: *Uvod u teoriju igara*, Effectus, Zagreb, 2014.
- [4] A. Wald: Statistical decision functions which minimize the maximum risk. *Ann. Math.* 46 (1945), 265–280
- [5] L.J. Savage: The theory of statistical decision. *J. Am. Stat. Assoc.* 46 (1951), 55–67.
- [6] R. Aumann, S. Hart: *Handbook of Game Theory with Economics Applications*, Volumen 1, Amsterdam, North-Holland, 1992.
- [6] C. Darwin: *Postanak vrsta*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [7] R. Selten. R. (1965), Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragerträgeit – Teil I Bestimmung des dynamischen Preisgleichgewichts, *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 1965, str. 301–24.
- [9] D.G. Baird, R.H. Gertner, R.C. Picker: Game theory and the law. *Public choice*, 95(1-2): 201-204.
- [10] R.B. Braithwaite: *Theory of Games as a Tool for the Moral Philosopher*, Cambridge University Press, Cambridge, 1955.
- [11] M.J. Smith, G.R. Price (1973) The logic of animal conflict, *Nature* 246, 1973, str. 15-18.
- [12] A. Dixit, S. Skeath: *Games of Strategy*, Norton, New York, 2009.
- [13] M.M. Flood: (1958) Some Experimental Games, Research Memorandum RM-789, RAND Corporation, Management Science, 1958.
- [14] A. Axelrod: *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, New York, 1984.
- [15] R. Dawkins: *Sebični gen*, Izvori, Zagreb, 2007.

## Popis slika

Slika 1. Podjela teorije igara.....	4
Slika 2. Elementi igre .....	14
Slika 3. Zatvorenikova igra primjer isplate .....	25
Slika 4. Zatvorenikova igra primjer uklanjanje krpelja kod ptica .....	27
Slika 5 Prvi Akselrodov turnir – bodovanje .....	29
Slika 6. Prikaz sučelja.....	39

## **Popis tablica**

Tablica 1 Prikaz raspodjele imetka prema Talmudu .....	7
Tablica 2. Klasifikacija igara.....	17
Tablica 3. Zatvorenikova dvojba .....	19
Tablica 4. Matrica bodovanja praktičnog rada .....	36
Tablica 5. Rezultati testiranja .....	40

## Prilozi

### Prilog 1. Varijable

```
var RANDOM = 0;
var ALLC = 0;
var ALLD = 0;

var TFT = 0;
var ntft = 0;
var ntft2 = 0;

var strat1 = 0;
var strat2 = 0;

var JOSS = 0;

var njoss = 0; var
njoss2 = 0;

var TESTER = 0;
var ntester = 0; var
ntester2 = 0;
```

### Prilog 2. Brojač

```
for(i=0; i<90000; i++)
```

### Prilog 3. Odabir igrač 1

```
document.write("<br><br>IGRAC 1 BIRA: ");
rez = Math.floor((Math.random() * 6) + 1);
switch(rez) {
  case 1:
    snum = 1;
    ntft++;
    if(ntft==1) {strat1=1;}
    else{
      (strat2==1) ? strat1 = 1 : strat1 = 0;
    }
    document.write("TFT = " + strat1 );
    break;
  case 2:
```

```

    snum = 2;
        strat1 = 1;
        document.write("ALLC = " + strat1 );
    break;
case 3:
    snum = 3;
        strat1 = 0;
        document.write("ALLD = " + strat1 );
    break;
case 4:
    snum = 4;
        strat1 = Math.floor((Math.random() * 2) + 0);
        document.write("RANDOM = " + strat1 );
    break;
case 5:
    snum= 5;
        njoss++;
        (njoss % 5) ? strat1 = 0 : strat1 = 1;
        document.write("JOSS = " + strat1);
    break;
case 6:
    snum= 6;
        ntester++;
        if(ntester > 1) {strat2 ? T=1 : T=0;} else strat1=0;

        if(T) {strat2 ? strat1 = 1 : strat1 = 0;}
            else { strat1 = Math.floor((Math.random() * 2) + 0);}

        document.write("TESTER = " + strat1);
    break;

```

#### Prilog 4. Odabir igrač 2

```

document.write("<br>IGRAC 2 BIRA: "
); rez = Math.floor((Math.random() * 6)
+ 1); switch(rez) {
case 1:
    s2num = 1;
    ntft2++;

```



```

if(ntft2==1)
{strat2=1;} else {
    (strat1==1) ? strat2 = 1 : strat2 = 0;
}
document.write("TFT = " + strat2);
break;
case
2:
    s2num = 2;
    strat2 = 1;
    document.write("ALLC = " + strat2);

    break;
case 3:
    s2num = 3;
    strat2 = 0;
    document.write("ALLD = " + strat2);

    break;
case 4:
    s2num = 4;
    strat2 = Math.floor((Math.random() * 2) + 0);
    document.write("RANDOM = " + strat2);

    break;
case 5:
    s2num= 5;
    njoss2++;
    (njoss2 % 5) ? strat2 = 0 : strat2 = 1;
    document.write("JOSS = " + strat2);

    break;
case 6:
    s2num= 6;
    ntester2++;
    if (ntester2 > 1) {strat1 ? T2=1 : T2=0;} else strat2=0;

    if(T) {strat1 ? strat2 = 1 : strat2 = 0;}
        else { strat2 = Math.floor((Math.random() * 2) + 0);}

    document.write("TESTER = " + strat2);
    break;

```

Prilog 5. If naredba

```

if(strat1 && strat2) {

```

```

switch(snum){
  case 1:
    TFT++;
    break;
  case 2: ALLC++;
    break;
  case 3: ALLD++;
    break;
  case 4: RANDOM++;
    break;
  case 5: JOSS++;
    break;
  case 6: TESTER++;
    break;
}

```

```

switch(s2num){
  case 1:
    TFT++;
    break;
  case 2: ALLC++;
    break;
  case 3: ALLD++;
    break;
  case 4: RANDOM++;
    break;
  case 5: JOSS++;
    break;
  case 6: TESTER++;
    break;
}

```

#### Prilog 6. Ispis

```

document.write("<br>" + "<br>" + "Broj prodjenih krugova = " + i);
document.write("<br>" + "<br>" + "TFT = " + TFT);
document.write("<br>" + "ALLC = " + ALLC);
document.write("<br>" + "ALLD = " + ALLD);
document.write("<br>" + "TESTER = " + TESTER);
document.write("<br>" + "JOSS = " + JOSS);
document.write("<br>" + "RANDOM = " + RANDOM);

```

Prikaz zadnjih 200 iteracija i ispis rezultata

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1



IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 1

IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 1

IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0

IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 1

IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 1

IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0

IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0

IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0

IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0

IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0

IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1

IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 2 BIRA: JOSS = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0

IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1

IGRAC 2 BIRA: TESTER = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1

IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: TESTER = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: JOSS = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 0  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 0

IGRAC 1 BIRA: RANDOM = 1  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLD = 0  
IGRAC 2 BIRA: TESTER = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: RANDOM = 0

IGRAC 1 BIRA: TFT = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLD = 0

IGRAC 1 BIRA: ALLC = 1  
IGRAC 2 BIRA: TFT = 1

IGRAC 1 BIRA: JOSS = 0  
IGRAC 2 BIRA: ALLC = 1

Broj prodjenih krugova = 90000

TFT = 10856

ALLC = 15649

ALLD = 0

TESTER = 11550

JOSS = 3081

## Programski kod

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="en">
  <head>
    <title>Some Page</title>

  </head>

  <body>

  <p>Simulacija Ivana </p>

  <p id="demo"></p>
  </body>

  <script >

var snum=0;
var s2num=0;

var RANDOM = 0;
var ALLC = 0;
var ALLD = 0;

var TFT = 0;
var ntft = 0;
var ntft2 = 0;

var strat1 = 0;
var strat2 = 0;

var JOSS = 0;
var njoss = 0;
var njoss2 = 0;

var TESTER = 0;
var ntester = 0;
var ntester2 = 0;

var ntftT = 0;
var ntftT2 = 0;

var rez = 0;
var i = 0;
var T = 0;
var T2 = 0;
for(i=0; i<90000; i++)
{
```

```

document.write("<br><br>IGRAC 1 BIRA: ");

rez = Math.floor((Math.random() * 6) + 1);

switch(rez) {
  case 1:
    snum = 1;
    ntft++;
    if(ntft==1) {strat1=1;}
    else{
      (strat2==1) ? strat1 = 1 : strat1 = 0;
    }
    document.write("TFT = " + strat1 );
    break;
  case 2:
    snum = 2;
    strat1 = 1;
    document.write("ALLC = " + strat1 );
    break;
  case 3:
    snum = 3;
    strat1 = 0;
    document.write("ALLD = " + strat1 );
    break;
  case 4:
    snum = 4;
    strat1 = Math.floor((Math.random() * 2) + 0);
    document.write("RANDOM = " + strat1 );
    break;
  case 5:
    snum= 5;
    njoss++;
    (njoss % 5) ? strat1 = 0 : strat1 = 1; document.write("JOSS = "
+ strat1);
    break;
  case 6:
    snum= 6;
    ntester++;
    if(ntester > 1) {strat2 ? T=1 : T=0;} else strat1=0;

    if(T) {strat2 ? strat1 = 1 : strat1 = 0;}
    else { strat1 = Math.floor((Math.random() * 2) + 0);}

    document.write("TESTER = " + strat1);
    break;
}

document.write("<br>IGRAC 2 BIRA: ");

rez = Math.floor((Math.random() * 6) + 1);

switch(rez) {
  case 1:

```

```

s2num = 1;

    nftf2++;

if(ntft2==1) {strat2=1;}
else{
    (strat1==1) ? strat2 = 1 : strat2 = 0;
}
document.write("TFT = " + strat2); break;
case 2:
    s2num = 2;
    strat2 = 1;
    document.write("ALLC = " + strat2);

    break;
case 3:
    s2num = 3;
    strat2 = 0;
    document.write("ALLD = " + strat2);

    break;
case 4:
    s2num = 4;
    strat2 = Math.floor((Math.random() * 2) + 0);
    document.write("RANDOM = " + strat2);

    break;
case 5:
    s2num= 5;
    njoss2++;
    (njoss2 % 5) ? strat2 = 0 : strat2 = 1;
    document.write("JOSS = " + strat2);

    break;
case 6:
    s2num= 6;
    ntester2++;
    if (ntester2 > 1) {strat1 ? T2=1 : T2=0;} else strat2=0;

    if(T) {strat1 ? strat2 = 1 : strat2 = 0;}
        else { strat2 = Math.floor((Math.random() * 2) + 0);}

    document.write("TESTER = " + strat2);
    break;
    }

if(strat1 && strat2) {

    switch(snum){ case
    1: TFT++;
        break;
    case 2: ALLC++;
        break;
    case 3: ALLD++;
        break;

```



```

        case 4: RANDOM++;

            break;

case 5: JOSS++;

    break;
    case 6: TESTER++;
        break;
    }

switch(s2num){

    case 1:
        TFT++;
        break;
    case 2: ALLC++;
        break;
    case 3: ALLD++;
        break;
    case 4: RANDOM++;
        break;
    case 5: JOSS++;
        break;
    case 6: TESTER++;
        break;
    }

}

snum=0;
s2num=0;

}

document.write("<br>" + "<br>" + "Broj prodjenih krugova = " + i);
    document.write("<br>" + "<br>" + "TFT = " + TFT);
    document.write("<br>" + "ALLC = " + ALLC); document.write("<br>"
    + "ALLD= " + ALLD); document.write("<br>" + "TESTER = " +
    TESTER); document.write("<br>" + "JOSS = " + JOSS);
    document.write("<br>" + "RANDOM = " + RANDOM);

</script>
</html>

```