Upotreba metode najmanjih kvadrata kod promjene oblika čvrstog tijela uslijed djelovanja vanjske sile prema Hookovom zakonu

Kišiček, Hrvoje

Završni rad br. 405/PS/2022

Upotreba metode najmanjih kvadrata kod promjene oblika čvrstog tijela uslijed djelovanja vanjske sile prema Hookovom zakonu

Hrvoje Kišiček, 0035151345

Varaždin, siječanj 2023. godine

Odjel za strojarstvo

Preddiplomski stručni studij Proizvodno strojarstvo

Završni rad br. 405/PS/2022

Upotreba metode najmanjih kvadrata kod promjene oblika čvrstog tijela uslijed djelovanja vanjske sile prema Hookovom zakonu

Student

Hrvoje Kišiček, 0035151345

Mentor

izv. prof. dr. sc. Lovorka Gotal Dmitrović

Varaždin, siječanj 2023. godine

Prijava završnog rada

Definiranje teme završnog rada i povjerenstva

ODJEL Odjel za strojarstvo

STUDIJ preddiplomski stručni studij Proizvodno strojarstvo

PRISTUPNIK Hrvoje Kišiček | JMBAG 0035151345

DATUM 22.11.2022. | KOLEGIJ **Statistika**

NASLOV RADA Upotreba metode najmanjih kvadrata kod promjene oblika čvrstog tijela uslijed djelovanja vanjske sile prema Hookovom zakonu

NASLOV RADA NA ENGL. JEZIKU The use of the method of least squares when changing the shape of a solid body under the action of an external force according to Hooke's law

MENTOR izv.prof.dr.sc. Lovorka Gotal Dmitrović | ZVANJE izvanredna profesorica

ČLANOVI POVJERENSTVA

1. doc.dr.sc. Tomislav Veliki - predsjednik Povjerenstva
2. Mario Pintarić, pred.
3. izv.prof.dr.sc. Lovorka Gotal Dmitrović
4. izv.prof.dr.sc. Sanja Šolić (zamjenski član)
5.

Zadatak završnog rada

BROJ 405/PS/2022

OPIS

U Završnom radu važno je u teorijskom dijelu definirati osnove o Metodi najmanjih kvadrata, uključujući osnove regeresijske analize.

U praktičnom dijelu opisati primjenu Hookovog zakona kod promjene oblika čvrstog tijela. Primjeniti Metodu najmanjih kvadrata kod primjera te izračunati lineamu funkciju koja najbolje odgovara stvarnim eksperimentalnim mjerenjima.

Zavrsni rad koncipirati:

1. Uvod
2. Metoda najmanjih kvadrata
   2.1. Regresijska analiza
   2.2. Povijesni pregled
   2.3. Osnove o teoriji metode najmanjih kvadrata
3. Praktični dio
   3.1. Hookov zakon
   3.2. Primjena metode najmanjih kvadrata kod stvarnog eksperimentalnog mjerenja
4. Zaključak
5. Literatura

ZADATAK URUČEN 22. 11. 2022. | POTPIS MENTORA [signature]

REPUBLIKA HRVATSKA SVEUČILIŠTE SJEVER

Predgovor

Dugo vremena mi je trebalo da se odlučim završiti ovaj Završni rad. Međutim, ima ljudi koji ne odustaju od mene, pa su me uvjerili da je vrijeme da završim započeto.

Hvala mentorici, izv.prof.dr.sc. Lovorki Gotal Dmitrović na savjetima i razumijevanju, ali naročito na strpljenju.

Hvala mojoj Sonji za podršci, nadam se da neće imati toliko posla oko djece kad će studirati. Vjerujem da sam na svojem primjeru pokazao da nikad nije kasno završiti započeto.

Sažetak

U radu su prikazane osnove Metode najmanjih kvadrata, počevši od regresijske analize. Metodu najmanjih kvadrata postavio je 1795. g. Carl Friedrich Gauss. U praktičnom dijelu izvršena su mjerenja promjene dužine opruge u zavisnosti od opterećenja. Oprugu, kao i zakon elastičnosti postavio je Robert Hooke, pa se i zakon zove po njemu – Hookove zakon. Dobivene vrijednosti ucrtane su u graf, koji predstavlja početak dijagrama naprezanja. Linearna funkcija koja najbolje odgovara dobivenim točkama izračunata je ručno Metodom najmanjih kvadrata. Dobiveni koeficijenti pravca provjereni su korištenjem aplikacije Statistica.

Ključne riječi: zakon elastičnosti, dijagram naprezanja, linija najmanjih kvadrata, regresijska analiza

Abstract

The paper presents the basics of the Method of Least Squares, starting with regression analysis. The method of least squares was established in 1795 by Mr. Carl Friedrich Gauss. In the practical part, measurements were made of the change in spring length depending on the load. The spring, as well as the law of elasticity, was established by Robert Hooke, so the law is named after him - Hooke's law. The obtained values are plotted in a graph, which represents the beginning of the stress diagram. The linear function that best fits the obtained points was calculated manually by the Method of Least Squares. The obtained direction coefficients were checked using the Statistica application.

Keywords: law of elasticity, stress diagram, line of least squares, regression analysis

Popis korištenih kratica

HTML	HyperText Markup Language Sintaksa za obilježavanje hipertektualnih dokumenata.
AC-DC	Izmjenična struja - istosmjerna struja

Sadržaj

1. Uvod

Prema istraživanju među učenicima osnovnih škola elastičnu silu često ne primjećuju, odnosno zaborave, a susrećemo se s njenom primjenom svakodnevno. Na primjer, trake za kosu ili elastična traka za odjeću. Brojna odjeća koristi elastičnu traku („gumu“) za pravilno prianjanje i pristajanje. Kada su ti pojasevi istegnuti, razvijaju elastičnu silu. Međutim, traka vraća svoj izvorni oblik čim se vanjska sila ukloni.

Elastičnu silu možda najbolje demonstrira traka za otpor. Najčešće se koristi u teretanama za izvođenje istezanja mišića i drugih srodnih vježbi. Kada se traka snažno povuče, korisnik osjeća otpor. Ovaj otpor nije ništa drugo nego elastična sila. Nakon otpuštanja napetosti, traka se nastoji vratiti u svoj izvorni oblik i izgubiti razvijenu elastičnu silu.

Vjerojatno prva asocijacija na elastičnu silu je korištenje opruga jer su opruge jedan od najboljih primjera elastične sile, vraćaju se u svoj izvorni oblik nakon podvrgavanja deformacijama kao što su kompresija i ekspanzija.

Bungee jumping jedan je od najpopularnijih pustolovnih sportova. Kada skakač skoči, ne zaustavi se odmah jer je uže je po prirodi elastično. Elastična sila koju posjeduje ovo uže pomaže skakaču da odskoči i uspori pad kako bi se izbjegle ozljede.

Čak i želudac koristi elastičnu sila, kad se rasteže prilikom unosa i probave hrane. Elastičnost je neophodna tijelu radi izbjegavanja ukočenosti i omogućavanja fleksibilnosti. Istegnuti mišići se, međutim, s vremenom vraćaju u prvobitni oblik.

Elastičnu silu i njezine zakonitosti otkrio je Robert Hook, koji je bio jedan od osnivača i kustos eksperimenata u Kraljevskom društvu – društvu koje je tradicionalno na samom vrhu znanstvenih otkrića u Britaniji. Njegov dar za intuitivno shvaćanje nevjerojatnih znanstvenih istina bez da je uvijek razumio znanstvenu podlogu dovelo je do mnogih otkrića.

Prema Hookovom zakonu deformacija tijela proporcionalna je primijenjenoj sili, pod uvjetom da se ne prijeđe granica elastičnosti tijela. Kada se sila ukloni tijelo se vraća u svoj prvobitni oblik. Ako se tijelo na elastičnoj opruzi pomakne iz ravnotežnog položaja, tj. ako se opruga rastegne ili stisne, djelovat će povratna sila (elastična sila opruge), koja će nastojati tijelo vratiti u ravnotežni položaj. Iznos te sile je proporcionalan pomaku tijela iz ravnotežnog položaja.

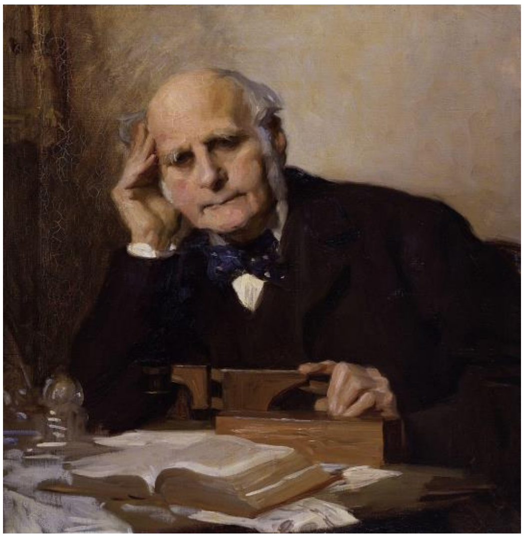
2. Metoda najmanjih kvadrata

Metoda najmanjih kvadrata je metoda za obradbu eksperimentalnih podataka s elementima numeričke matematike i statistike koja omogućava dobivanje funkcionalne ovisnosti mjerenih veličina iz eksperimentalnih podataka. Funkcija i vrijednosti parametara funkcije određuju se tako da je zbroj kvadrata razlika između izmjerenih i izračunanih vrijednosti minimalan, odnosno, određuje se funkcija kojoj krivulja prilazi što bliže danim točkama. Dobivena funkcionalna ovisnost omogućava predviđanje vrijednosti mjerene veličine u područjima koja nisu obuhvaćena mjerenjem [1].

2.1. Regresijska analiza

Regresijska analiza ispituje ovisnost zavisne varijable o nezavisnoj, odnosno regresijskom analizom se na temelju utvrđene povezanosti i poznavanja vrijednosti nezavisne varijable (x) predviđa vrijednost zavisne varijable (y). Varijable moraju biti inherentno povezane, odnosno mora postojati neka zavisnost (korelacija) među njima.

Samo ime dolazi od latinske riječi *regressio* što znači povrat, vraćanje, odstup, uzmak i nazadovanje. Koncept korelacije i regresije postavio je u 19 st. Sir Francis Galton, engleski polihistor.



Slika 1 - Sir Francis Galton

Primijenio je statističke metode u proučavanju ljudskih različitosti i nasljeđivanju inteligencije. Uveo je korištenje upitnika i anketa za prikupljanje podataka o ljudskim zajednicama. Prikupljene podatke koristio je za genealoške i biografske radove te za antropometrijska istraživanja.

Regresijskim tehnikama kvantitativno se izražava ta zavisnost (korelaciju). Najčešće se koristi u slučaju predviđanja, odnosno prognoziranja određenih pojava, a može se koristiti za zaključivanje uzročnih odnosa između nezavisnih i zavisnih varijabli.

Regresijski model se koristi za:

- predviđanje nekih podataka za koje ne postoje mjerenja i/ili
- dobivanje konstanti koje tu zavisnost opisuju i sl.

Prema broju varijabli regresijska analiza može biti:

- jednostavna ili
- višestruka,

a s obzirom na linearnost:

- linearna,
- nelinearna [2],
- multivarijatna regresija - zavisnost jedne varijable (y) o više nezavisnih varijabli.

Jednostavna linearna regresija – postavlja odnos nezavisne i zavisne varijabla, odnosno prikazuje utjecaj nezavisna varijable (x) na zavisnu varijablu (y) [3]. Razvoj model koji daje najbolju linearnu ovisnost, odnosno prema kojemu su podatci prikupljeni eksperimentom najbolje prikazani naziva se regresijski model. Regresijski model korištenjem matematičkog zapisa daje opis odnosa dviju ili više varijabli. [4].

Postoje deterministički i statistički regresijski modeli. Deterministički opisuje funkcija [3]:

$$y = a_0 + a_1 x \tag{1}$$

Ovaj model opisuje točnu povezanost varijable x i y, odnosno dokazuje kako je varijabla y određena točno jednom varijablom x.

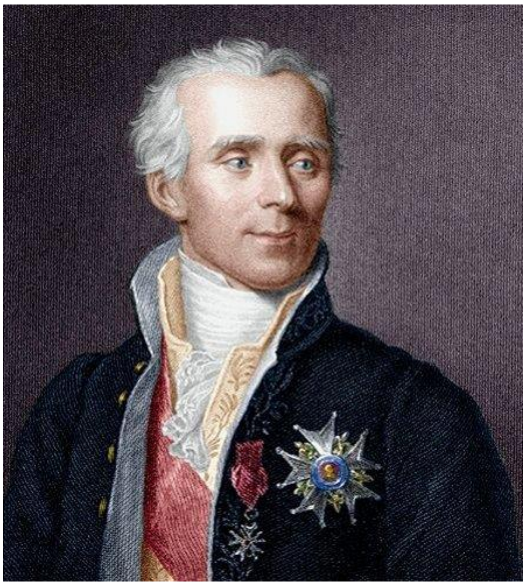
Statistički model opisuje funkcija [3]:

$$y = a_0 + a_1 x + u \tag{2}$$

u kojem je u slučajna pogreška, a ona obuhvaća varijable koje nisu sadržane u modelu, ali utječu na vrijednosti varijable y i njezine slučajne promjene, a njena vrijednost prikazuje razliku između eksperimentalno izmjerenih vrijednosti varijabli y i teorijskog predviđanja.

2.2. Povijesni pregled nastanka metode najmanjih kvadrata

U 18. st. (1799. g.) francuski matematičar i astronom Pierre-Simon Laplace (Slika 2) daje najraniji oblik regresije koristeći princip minimiziranja zbroja apsolutnih pogrešaka $\sum_{i=1}^{m}|r_i|$, s dodatnim uvjetom da će zbroj pogrešaka biti jednak nuli. Dokazao je da rješenje x tada mora zadovoljiti točno n od m jednadžbi [4].



Slika 2 - Pierre-Simon Laplace [5]

U tumačenje znanstvenih podataka Pierre-Simon Laplace, uveo je teoriju vjerojatnosti te je na taj način pridonio njezinom razvoju kao matematičke discipline. U radu Analitička teorija vjerojatnosti (Théorie analytique des probabilités) objavljenom 1812. g. daje klasičnu definiciju vjerojatnosti. Teorija vjerojatnosti je polazište njegovog Filozofskog eseja o vjerojatnostima (Essai philosophique sur les probabilités) objavljenog 1814. g. u kojem je zastupao ideje sveopćega determinizma (tzv. Laplaceov demon). Djelo se bazira na shvaćanju po kojem je s pomoću zakona klasične mehanike moguće izračunati svako prošlo ili buduće stanje ako netko, npr. demon, zna sve položaje i količine gibanja svih atoma u svemiru [5].

Njemački matematičar Carl Friedrich Gauss (Slika 3) tvrdio je kako su, po načelima vjerojatnosti, veće ili manje pogreške jednako moguće u svim jednadžbama. Po njegovom mišljenju, rješenje koje zadovoljava točno n jednadžbi, treba smatrati manje u skladu sa zakonima vjerojatnosti.

Slika 3 - Carl Friedrich Gauss [6]

Godine 1795. Carl Friedrich Gauss postavlja osnove metode najmanjih kvadrata, iako je metoda prvi put objavljena tek 1809. g. u radu o nebeskoj mehanici naziva Torijevo gibanje nebeskih tijela u stožastim presjecima koji okružuju Sunce *(lat. Thoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium).* [4]

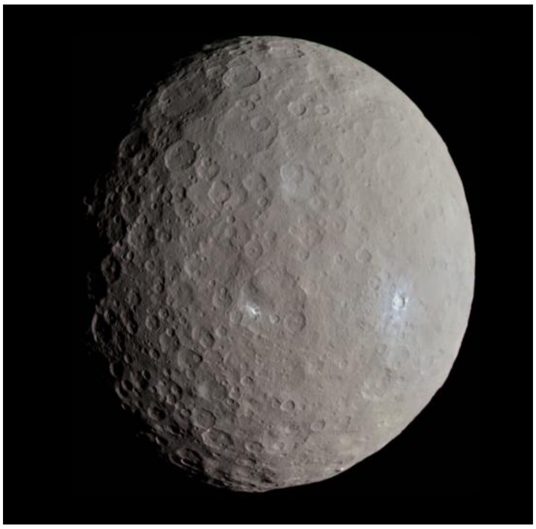
Prije objavljivanja osnova metoda najmanjih kvadtara, Carl Friedrich Gauss, 1801. g. objavio je Istraživanja u aritmetici *(lat. Disquisitiones arithmeticae)* kojim je postavio osnove suvremenoj teoriji brojeva. Prikazao je kompleksne brojeve u kompleksnoj ravnini i tako ih povezao s realnim brojevima. [6]

U teoriji vjerojatnosti prikazao je normalnu raspodjelu s pomoću Gaussove krivulje. Djelo Opća istraživanja zakrivljenih ploha *(lat. Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1828)* objavljeno 1828. g. nova su etapa u razvoju diferencijalne geometrije i osnovica njezina napretka sve do danas. [6]

U djelu Teorija kombiniranja uz najmanje pogreške opažanja *(lat. Theoria combinationis observantium erroribus minimis obnoxiae, I–III, 1821–26)* postavlja teoriju pogrešaka pri mjerenju preko metode najmanjih kvadrata, prema kojoj je najpogodnija vrijednost mjerene veličine ona za koju je zbroj kvadrata pogrešaka najmanji. [6]

U vremenu između Gaussova otkrića metode i njezinog objavljivanja, do slične metode je došao i francuski matematičar Adrien-Marie Legendre. On je 1805. g. napisao knjigu Nove metode za određivanje orbita kometa *(fran. Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des cometes),* s dodatkom O metodi najmanjih kvadrata *(fran. Sur la méthode des moindres carrés).*

Gauss je pomoću metode najmanjih kvadrata, korištenjem podataka, koje je prikupio talijanski astronom i matematičar Giuseppe Piazzi za vrijeme četrdesetodnevnog praćenja kretanja patuljastog planeta Ceresa (Slika 4), 1801. g. predvidio kada će Ceresa opet doći u vidno polje.



Slika 4 - Ceres [7]

Planet Ceres je otkrio Giuseppe Piazzi, 1. siječnja 1801. g. U početku je mislio da je komet, ali zbog sporog i pravilnog kretanja vjerovao je „da bi moglo biti nešto bolje od komete".[8]

Ubrzo nakon ovoga, Ceresova prividna pozicija se promijenila (većinom zbog Zemljinog orbitalnog kretanja). Tada je već bio preblizu Sunčevom sjaju, pa drugi astronomi nisu mogli potvrditi Piazzieva posmatranja sve do kraja godine. Ipak nakon toliko dugo vremena, bilo je teško predvidjeti njegovu točnu poziciju. Da bi ponovo pronašao Ceres, Carl Friedrich Gauss, tada star 24 godine, je izumio efikasnu metodu otkrivanja orbite.[9]

Nakon toga metoda najmanjih kvadrata postaje uobičajen postupak za analiziranje astronomskih i geodetskih podataka.

2.3. Osnove o teoriji najmanjih kvadrata

Regresijskom analizom u dijagram rasipanja ucrtava se pravac regresije, koji će najbolje opisati odnos promatranih varijabli. Kroz oblak točaka moguće ucrtati skoro beskonačno mnogo pravaca.

Svaki od pravaca bit će određen jednadžbom s različitim vrijednostima parametara a_0 *i* a_1. Međutim, samo jedan od tih pravaca će imati najbolji odnos promatranih varijabli. To je aproksimacijski pravac. Kod aproksimacijskog pravca minimizirane su udaljenosti svih koordinatnih točaka dijagrama rasipanja. [3]

2.3.1. Linija najmanjih kvadrata

Linija najmanjih kvadrata minimizira kvadratnu udaljenost između pravca i točaka. Budući da je to linija koja najbolje odgovara podacima, u literaturi se može naći i naziv linija najboljeg pristajanja.

Od svih mogućih linija koje se mogu nacrtati, linija najmanjih kvadrata najbliža je skupu podataka u cjelini. To može značiti da će linija propustiti pogoditi bilo koju točku skupa podataka.

Ako su koordinate točke i (x_i, y_i), a oblik aproksimacijskog pravca je $y = a_0 + a_1x$, tada je y koordinata najboljeg aproksimacijskog pravca za x_i jednaka $y_i = a_0 + a_1x_i$. Rezidual prikazuje razlika: $yi – (a_0 + a_1x_i)$.

Metodom najmanjih kvadrata procjenjuju se vrijednosti a_0 i a_1. Sama metoda bazira se na minimiziranju sume kvadrata reziduala.

Regresijski parametri a_0 i a_1 se procjenjuju tako da vrijedi [10]:

$$f(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 = \min_{(a_0, a_1 \in R^2)} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 = \\ = \min_{(a_0, a_1 \in R^2)} f(a_0, a_1) \qquad (3)$$

Svaka linija najmanjih kvadrata posjeduje karakteristike:

1. Nagib linije predstavlja koeficijent korelacije podataka, odnosno nagib pravca je jednak $r(s_y/s_x)$, gdje s_y i s_x označavaju standardnu devijaciju x, odnosno y koordinata podataka.
2. Svaka linija najmanjih kvadrata prolazi kroz srednju točku podataka, odnosno kroz srednju vrijednost x vrijednosti i srednju vrijednost y vrijednosti.

2.3.2. Procjena parametara modela regresije

Ucrtavanjem u graf niza parova vrijednosti (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_i, y_i) dobije se dijagram rasipanja. Ako dijagram rasipanja pokazuje linearnu ovisnost, tada vrijedi:

$$f(a_0, a_1) \equiv y = a_0 + a_1 x \tag{4}$$

U idealnom slučaju, sve točke (parovi vrijednosti), ležat će na istome pravcu. Međutim, najčešće točke nisu ravnomjerno raspoređene po pravcu. Razlog tome je što dolazi do pogrešaka prilikom mjerenja. Za određivanje najboljeg mogućeg pravca, te pogreške se moraju svesti na minimum.

Pravac $y = a_0 + a_1 x$ najvjerojatniji je pravac regresije ako vrijedi da je suma kvadratnog odstupanja dana izrazom:

$$f(a_0, a_1) \equiv \sum_{i-1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 = min \tag{5}$$

Nuţan uvjet ekstrema kod funkcije više varijabli je:

$$\frac{\delta f(a_0, a_1)}{\delta a_0} = 0 \tag{6}$$

i

$$\frac{\delta f(a_0, a_1)}{\delta a_1} = 0 \tag{7}$$

Parcijalnom derivacijom po varijablama i dobije se:

$$\frac{\delta f(a_0, a_1)}{\delta a_0} = \sum_{i-1}^{n} 2[y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = 0 \tag{8}$$

i

$$\frac{\delta f(a_0, a_1)}{\delta a_1} = \sum_{i-1}^{n} 2[y_i - (a_0 + a_1 x_i)] x_i = 0 \tag{9}$$

Za izražavanje koeficijenata a_0 i a_1, potrebno je riješiti sustav dviju jednadžbi:

$$\sum_{i-1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] \cdot 1 = 0 \tag{10}$$

$$\sum_{i-1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] \cdot x_i = 0 \tag{11}$$

te se dobije:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a_i \sum_{i=1}^{n} x_i - na_0 = 0 \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_i \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{13}$$

Iz (12) izrazi se koeficijent a_0:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{14}$$

Izraz (14) uvrsti se u jednadžbu (13):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_i \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{15}$$

Množenjem cijele jednadžbe (15) s *n* dobije se:

$$n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_1 n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i + a_1 (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = 0 \tag{16}$$

iz (16) matematičkim operacijama se izlučuje *a*:

$$a_1 n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - a_1 (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{17}$$

$$a_1 [n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2] = n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{18}$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \tag{19}$$

uvrštavanjem (19) u (14) dobije se:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{20}$$

$$a_0 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i[n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2] - (n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i)\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}}{n} \tag{21}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i[n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2] - (n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i)\sum_{i=1}^{n} x_i}{n[n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2]} \tag{22}$$

$$a_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - (n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i)\sum_{i=1}^{n} x_i}{n[n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2]} \tag{23}$$

$$a_0 = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i)}{n[n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2]} \tag{24}$$

pa je konačni izraz za koeficijent a_0:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \tag{25}$$

2.3.3. Procjena pogreške parametara

Nakon dobivanja oblaka točaka, ucrtavanjem podataka dobivenih eksperimentom, procjenjuju se parametri radi ucrtavanja regresijskog pravca koji najbolje odgovara podacima. Međutim, s obzirom na to da su parametri procijenjeni, mora se procijeniti i kolike su njihove pogreške. To se radi korištenjem pojmova iz deskriptivne statistike.

Aritmetička sredina spada u mjere centralne tendencije. Njihova svrha je da opišu skup varijabilnih podataka. Srednje vrijednosti dobivene korištenjem svih podataka zovu se potpune. Potpunim srednjim vrijednostima pripada aritmetička sredina [11].

Aritmetička sredina je najvažnija srednja vrijednost i najčešće se koristi. Izračunava se na temelju vrijednosti podataka cijele populacije. Aritmetička sredina je omjer zbroja vrijednosti numeričkog niza i broja njegovih članova:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{26}$$

gdje je:

$\sum_{i=1}^{N} x_i$ – zbroj vrijednosti numeričkog niza i

N – broj članova.

Aritmetička sredina N grupiranih podataka računa se kao vagana sredina. U razdiobi frekvencija prekidnog numeričkog obilježja ta se vrijednost numeričkog obilježja pojavljuje s nekom frekvencijom, pa se aritmetička sredina izvodi na način [11]:

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{f_i x_i} \tag{27}$$

gdje je:

$$\mathrm{N} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{f_i} \tag{28}$$

To je vagana ili ponderirana aritmetička sredina. Ona ne pripada posebnoj vrsti aritmetičke sredine, nego samo načinu izračuna (računa se pomoću pondera (frekvencija)).

Aritmetička sredina računa se samo za numeričke vrijednosti, a njena se vrijednost ne mora podudarati ni s jednom vrijednosti iz skupa podataka. Budući da pripada potpunim srednjim vrijednostima, na nju utječu sve vrijednosti iz skupa podataka. Ako u skupu podataka postoji jako mala ili jako velika vrijednost koja se izdvaja od ostalih, aritmetička sredina će biti pod njihovim utjecajem i zato može slabo predočavati skup podataka. [11]

Za kvalitetno opisivanje skupa podataka, uz mjere centralne tendencije, važno je koristiti i mjere raspršenosti. Za procjenu pogreške parametara koristi se varijanca.

Varijanca je sredina kvadrata odstupanja vrijednosti od aritmetičke sredine:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{29}$$

Varijanca razdiobe frekvencija je vagana sredina kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja od njihove sredine:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_1(x_i - \bar{x})^2\,, \quad N = \sum_{i=1}^{k} f_i \tag{30}$$

Stoga parametri a_0 (24) i a_1 (19) mogu biti zapisani kao:

$$a_1 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{n\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i \tag{31}$$

i

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} \tag{32}$$

u kojima su:

$\bar{x}$ i $\bar{y}$– aritmetička sredina za x, odnosno y,

σ_x^2 i σ_y^2 – varijanca za x, odnosno y,

σ_{xy}^2 – mješovita varijanca.

Ako se koeficijent a_1 promatra kao funkcija n slučajnih varijabli y_i:

$$a_1 \equiv f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{x_1 - \bar{x}}{n\sigma_x^2}y_1 + \frac{x_2 - \bar{x}}{n\sigma_x^2}y_2 + \cdots + \frac{x_n - \bar{x}}{n\sigma_x^2}y_n \tag{33}$$

prema izrazu zakona rasprostiranja grešaka [12]:

$$M_y = \sqrt{(m_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}|_{x_{1=x_{1,n_1}}})^2 + (m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}|_{x_{2=x_{2,n_2}}})^2 + \cdots} \tag{34}$$

slijedi da je:

$$M_{a_1}^2 = [\frac{x_1 - \bar{x}}{n\sigma_x^2}]^2 m_{y_1}^2 + [\frac{x_2 - \bar{x}}{n\sigma_x^2}]^2 m_{y_2}^2 + \cdots + [\frac{x_n - \bar{x}}{n\sigma_x^2}]^2 m_{y_n}^2 \tag{35}$$

Sve greške od y_n međusobno su jednake pa vrijedi:

$$m_{y_1}^2 = m_{y_2}^2 = \cdots = m_{y_n}^2 = m^2 \tag{36}$$

stoga se izraz za M_{a1} može raspisati kao:

$$M_{a_1}^2 = \frac{m^2}{n^2\sigma_x^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{37}$$

Izraz $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ može se zamijeniti varijancom varijable x, pa slijedi:

$$M_{a_1}^2 = \frac{m^2}{n^2\sigma_x^4} n\sigma_x^2 = \frac{m^2}{n\sigma_x^2} \tag{38}$$

Uvrsti li se u izraz (38) izraz srednje pogreške od n-1 nezavisnih mjerenja:

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i^2}{n-2} = \frac{n(\sigma_y^2 - a_1^2\sigma_x^2)}{n-2} \tag{39}$$

dobiva se izraz:

$$M_{a_1}^2 = \frac{\frac{n(\sigma_y^2 - a_1^2\sigma_x^2)}{n-2}}{n\sigma_x^2} \tag{40}$$

koji se daljnjim sređivanjem svede na konačni oblik:

$$M_{a_1}^2 = \frac{n(\sigma_y^2 - a_1^2\sigma_x^2)}{(n-2)n\sigma_x^2} = \frac{1}{n-2}(\frac{n\sigma_y^2}{n\sigma_x^2} - \frac{na_1^2\sigma_x^2}{n\sigma_x^2}) \tag{41}$$

$$M_{a_1}^2 = \frac{1}{n-2}(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - a_1^2) \tag{42}$$

Izraz (42) je izraz za procjenu pogreške parametra a_1.

Za procjenu pogreške Ma_0, parametar a_0 potrebno je promatrat kao funkciju n+1 slučajne varijable y_i i a_1 odnosno:

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} \tag{43}$$

odnosno

$$a_0 \equiv f(y_1, y_2, \dots, y_i, a_1) = \frac{1}{n}(y_1, y_2, \dots, y_i) - a_1\bar{x} \tag{44}$$

Prema zakonu rasprostiranja grešaka, slijedi [12]:

$$M_{a_0}^2 = \frac{1}{n^2}\left(m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2 + \dots + m_{y_1}^2\right) + M_{a_1}^2\bar{x}^2 \tag{45}$$

Budući da vrijedi izraz (36):

$$M_{a_0}^2 = \frac{1}{n^2}nm^2 + M_{a_1}^2\bar{x}^2 \tag{46}$$

Ukoliko se m^2 izrazi preko izraza (38) dobije se konačni izraz:

$$M_{a_0}^2 = \frac{1}{n^2}n^2\sigma_x^2 M_{a_1}^2 + M_{a_1}^2\bar{x}^2 \tag{47}$$

odnosno

$$M_{a_0}^2 = M_{a_1}^2(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) = M_{a_1}^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{48}$$

3. Praktični dio

Metoda najmanjih kvadrata jedna je od najvažnijih primjena u aproksimaciji funkcija. Bazira se na pronalaženju krivulje, koja s obzirom na skup uređenih parova, dobro aproksimira podatke. Ideja metode je minimiziranje zbroja kvadrata razlika u ordinatama (komponenta Y), između točaka generiranih odabranom funkcijom i točaka koje pripadaju skupu podataka.

Sama metoda koristi se u brojnim znanostima, a u nastavku je prikazana njena primjena kod mehanike čvrstih tijela, odnosno kod deformacije.

3.1. Hookov zakon

3.1.1. Robert Hooke

Robert Hooke (Slika 5) bio je engleski polihistor. Kao pomoćnik Roberta Boylea, Hooke je izradio vakuumske pumpe korištene u Boyleovim eksperimentima o zakonu o plinu. Godine 1673. Hooke je izgradio prvi gregorijanski teleskop, a zatim je promatrao rotacije planeta Marsa i Jupitera. Hookeova knjiga Micrographia iz 1665., u kojoj je skovao pojam "stanica", potaknula je mikroskopska istraživanja. [17]

Slika 5 – Robert Hooke [18]

Istražujući optiku, posebno lom svjetlosti, izveo je valnu teoriju svjetlosti. Njegova je prva zabilježena hipoteza o toplini koja se širi, sastavu zraka od malih čestica na većim udaljenostima i toplini kao energiji.

U fizici je aproksimirao eksperimentalnu potvrdu da gravitacija poštuje zakon obrnutog kvadrata i prvi je pretpostavio takav odnos u planetarnom gibanju, princip koji je Isaac Newton unaprijedio i formalizirao u Newtonovom zakonu univerzalne gravitacije, što je dovelo do rivalstva između Hookea i Newtona. U geologiji i paleontologiji, Hooke je pokrenuo teoriju o Zemlji kao kugli, osporavao je biblijski pogled na starost Zemlje, pretpostavio izumiranje vrsta i tvrdio da su fosili na vrhovima brda i planina postali uzdignuti geološkim procesima.[19] Nagovijestio je teoriju evolucije.[20]

Ovaj svestrani znanstvenik, kojeg nazivaju i „engleskim Leonardom“ [21] 1660. g. otkrio je zakon elastičnosti koji nosi njegovo ime i koji opisuje linearnu varijaciju napetosti s istezanjem u elastičnoj opruzi. Prvo je ovo otkriće opisao u anagramu "ceiiinosssttuv", čije je rješenje objavio 1678. kao *"Ut tensio, sic vis"* što znači "Koliko istezanje, tolika sila." [14]

Hookeov rad na elastičnosti kulminirao je, u praktične svrhe, njegovim razvojem opruge, što je po prvi put omogućilo (prijenosnom) satu mjerenje vremena s razumnom točnošću.

3.1.2. Osnove o Hookovom zakonu

Hooke je objavio svoj zakon elastičnosti 1675 g. kao anagram *ceiiinosssttuu*. To je bila metoda koju su ponekad koristili znanstvenici, poput Hookea, Huygensa, Galilea i drugih, kako bi utvrdili prioritet otkrića bez otkrivanja detalja. Rešenje anagrama objavio je 3 g. kasnije (1678. g.) kao: *Ut tensio, sic vis* (Koliko istezanje, tolika sila)[14]:

$$F = -k\Delta x \tag{49}$$

gdje je:

F — sila koju opruga proizvodi

k — konstanta elastičnosti (koeficijent proporcionalnosti) zavisi od prirode materijala od koga je tijelo načinjeno i od drugih osobina.

Δx — promjena dužine pri rastezanju ili skupljanju opruge u odnosu na njen prirodni položaj.

Prema Hookovom zakonu deformacija tijela proporcionalna je primijenjenoj sili, pod uvjetom da se ne prijeđe granica elastičnosti tijela. Kada se sila ukloni tijelo će se vratiti u svoj prvobitni oblik. Ako se tijelo na elastičnoj opruzi pomakne iz ravnotežnog položaja, tj. ako se opruga rastegne ili stisne, djelovat će povratna sila (elastična sila opruge), koja će nastojati tijelo vratiti u ravnotežni položaj. Iznos te sile je proporcionalan pomaku tijela iz ravnotežnog položaja.[14]

Ako se promatra šipka od nekog elastičnog materijala, duljine L i poprečnog presjeka A, koju se razvlači silom F, onda u njoj nastaje σ, koje se opire vanjskoj sili [15]:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{50}$$

odnosno

$$\Delta L = \frac{F}{E \cdot A} \cdot L = \frac{\sigma}{E} \cdot L \tag{51}$$

gdje je:

σ – naprezanje u šipki (N/mm^2),

E – Youngov modul elastičnosti (N/mm^2),

ε – omjer produljenja šipke i njene duljine (bez dimenzije ili ΔL / L),

L – duljina šipke (mm),

ΔL - produljenje šipke (mm),

F – sila koja produljuje šipku (N),

A – poprečni presjek šipke (mm^2).

Hookeov zakon vrijedi samo u elastičnom području. Elastično područje je do granice razvlačenja odnosno do granice plastičnosti koja je određena onim naprezanjem pri kojem nastaje trajno produljenje od 0,2% prvobitne dužine šipke. Ovo naprezanje nosi oznaku $\sigma_{0,2}$. [15]

3.2. Dijagram naprezanja

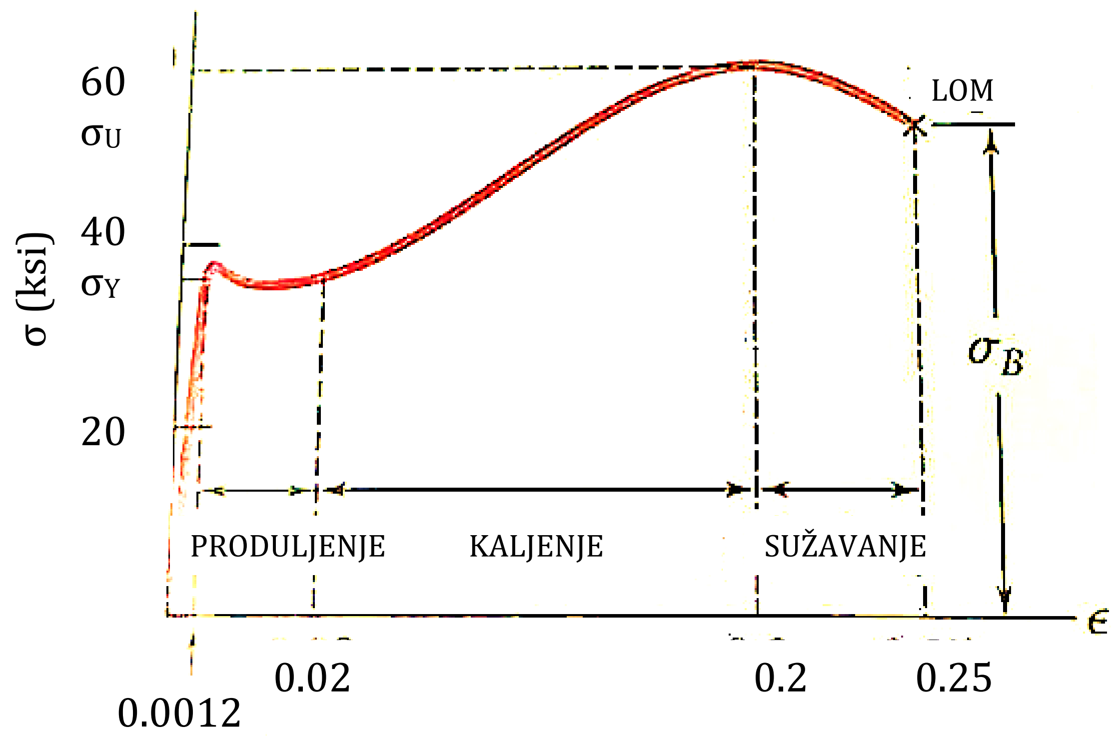
Dijagram naprezanja (Slika 6) prikazuje međusobnu ovisnost vlačnog naprezanja (σ) i relativnog produljenja ili linijske vlačne deformacije (ε). U materijalu koji je opterećen nekom silom F nastaju naprezanja σ koja uzrokuju njegovo rastezanje. Naprezanje σ je omjer sile F i ploštine A presjeka šipke (okomitog na smjer sile) [15]:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{52}$$

Zbog djelovanja sile F (a time nastalog naprezanja σ) štap ili šipka će se od početne duljine L_0 rastegnuti na duljinu L. Tako je produljenje štapa ili šipke:[16]

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L-L_0}{L_0} \tag{53}$$

Relativno produljenje ε (duljinska ili uzdužna deformacija) štapa ili šipke je produljenje s obzirom na početnu duljinu L_0. Početno je naprezanje linearno (deformacija je izravno razmjerna naprezanju). U području linearnog rastezanja (Hookeov zakon) materijal je elastičan i nakon prestanka djelovanja sile, odnosno naprezanja, on se vraća u početno stanje. Youngov modul elastičnosti je omjer naprezanja i relativnog produljenja (u području elastičnosti).[16]



Slika 6 – Dijagram naprezanja [22]

Tehnička granica elastičnosti je naprezanje pri kojem osjetljiva mjerila osjete prvo primjetno trajno produljenje materijala (pri još nepromijenjenom presjeku A_0). Nakon te granice (obično na kraju linearnog rastezanja) materijal se rasteže plastično i nakon prestanka djelovanja sile više se ne vraća na početnu duljinu L_0, već ostaje određeno trajno produljenje, uz suženje presjeka, $A < A_0$).

3.3. Youngov modul elastičnosti

Youngov modul elastičnosti je nazvan prema britanskom znanstveniku Thomasu Youngu (Slika 7), iako je sam pojam razvio matematički Leonhard Euler, a prvi je pokuse izveo talijanski znanstvenik Giordano Riccati 1782., 25 godina prije Thomasa Younga.

Slika 7 – Thomas Young [23]

Youngov modul elastičnosti je mjera krutosti materijala. Predstavlja omjer vlačnog naprezanja i linijske vlačne deformacije, u linearnom ili elastičnom dijelu dijagrama naprezanja. Krutost materijala je važna veličina pri određivanju stabilnosti i sigurnosti neke konstrukcije. Youngov modul elastičnosti vrijedi i za tlačna naprezanja kod većine materijala[23]:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{A_0}}{\frac{\Delta L}{L_0}} = \frac{F L_0}{A_0 \Delta L} \tag{54}$$

gdje je:

E - Youngov modul elastičnosti (N/mm^2);

F - sila koja produljuje šipku ili štap (N);

A_0 - početni poprečni presjek šipke ili štapa u mirovanju (mm^2);

ΔL - produljuje šipke ili štapa (m);

L_0 - početna duljina šipke ili štapa (m);

σ – naprezanje u šipki ili štapu (N/mm^2)

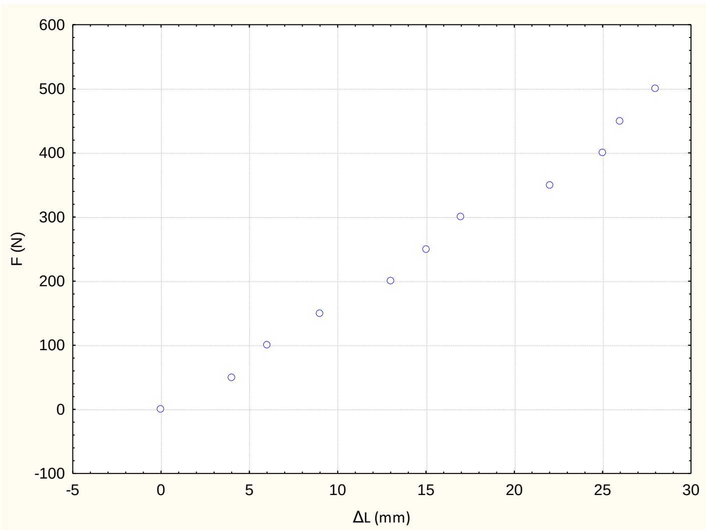
ε – omjer produljenja šipke ili štapa i njene duljine (bez dimenzije ili ΔL / L_0)

3.4. Mjerenje naprezanja

Mjerenje naprezanja izvršeno je u tvrtki koja se bavi izradom opruga u komercijalne svrhe. Vrijednosti su prikazane u tablici 1. i na slici 8.

Tablica 1 – Vrijednosti mjerenja

SILA (N)	PRODULJENJE OPRUGE (mm)
0	0
50	4
100	6
150	9
200	13
250	15
300	17
350	22
400	25
450	26



Slika 8 - Rezultati mjerenja

3.5. Primjena metode najmanjih kvadrata

Korištenjem metode najmanjih kvadrata ručno će se pronaći pravac (linearna funkcija) koja najbolje odgovara dobivenim podacima.

Dobivene vrijednosti x napišu se kao matrica (A):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \\ 1 & 13 \\ 1 & 15 \\ 1 & 17 \\ 1 & 22 \\ 1 & 25 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$$

Odredi se transponirana matrica (A^t):

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 9 & 13 & 15 & 17 & 22 & 25 & 26 \end{pmatrix}$$

Matrica y sadrži y vrijednosti:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \\ 250 \\ 300 \\ 350 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix}$$

Matrice A^t i A se pomnože:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 10 & 137 \\ 137 & 2601 \end{pmatrix}$$

Umnožak se digne na -1 potenciju:

$$(A^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2601}{7241} & \frac{-137}{7241} \\ \frac{-137}{7241} & \frac{10}{7241} \end{pmatrix}$$

Izračuna se umnožak $(A^t A)^{-1} A^t y$ koji daje koeficijente pravca a_0 i a_1:

$$v = (A^tA)^{-1}A^ty =$$

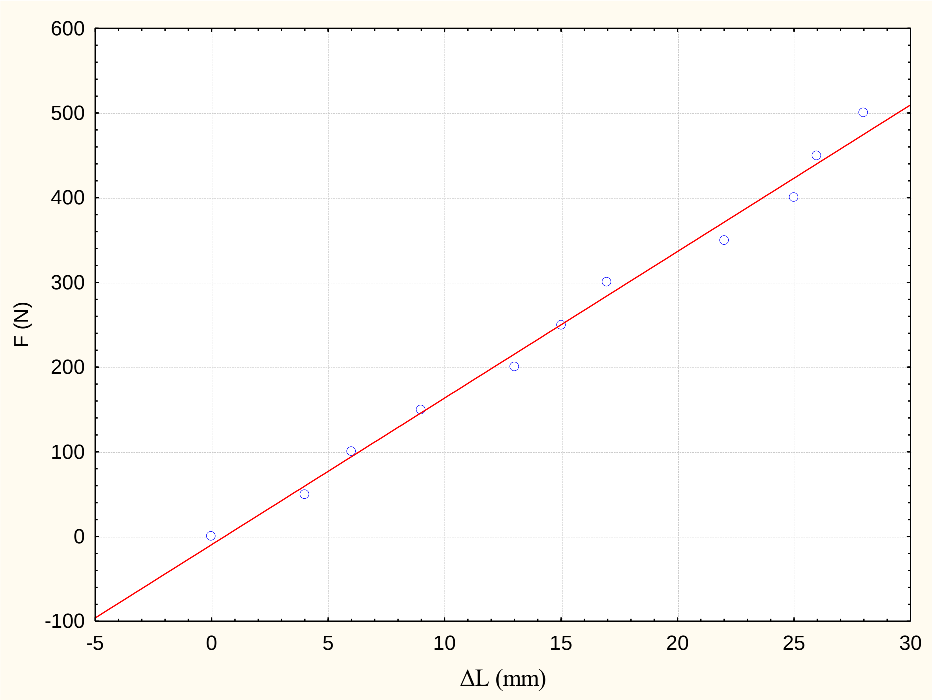
$$= \begin{pmatrix} \frac{2601}{7241} & \frac{-137}{7241} \\ \frac{-137}{7241} & \frac{10}{7241} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 9 & 13 & 15 & 17 & 22 & 25 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \\ 250 \\ 300 \\ 350 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2601}{7241} & \frac{-137}{7241} \\ \frac{-137}{7241} & \frac{10}{7241} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2250 \\ 43000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-38750}{7241} \\ \frac{121750}{7241} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,35 \\ 16,81 \end{pmatrix}$$

Pravac koji najbolje odgovara točkama je:

$$y = -5,35 + 16,81x$$

Provjera je napravljena u softvereskom paketu Statistica, a rezultat je prikazan na slici 9.



Slika 9 – Aproksimacija funkcije

Linearna funkcija dobivena Statisticom glasi:

$$y = -6{,}61 + 17{,}30x$$

4. Zaključak

Za ispitivanje zavisnosti zavisne varijable o nezavisnoj, koristi se regresijska analiza. Njome se u dijagram rasipanja, kroz oblak točaka, ucrtava pravac regresije, koji će najbolje opisati odnos promatranih varijabli. Iako je moguće ucrtati beskonačno puno pravaca, samo jedan od njih će imati najbolji odnos promatranih varijabli. To je aproksimacijski pravac. Kod aproksimacijskog pravca minimizirane su udaljenosti svih koordinatnih točaka dijagrama rasipanja.

Za određivanje koeficijenta a_0 i a_1 aproksimacijskog pravca korištena je metoda najmanjih kvadrata. Linija najmanjih kvadrata minimizira kvadratnu udaljenost između pravca i točaka. Budući da je to linija koja najbolje odgovara podacima, u literaturi se može naći i naziv linija najboljeg pristajanja. Od svih mogućih linija koje se mogu nacrtati, linija najmanjih kvadrata najbliža je skupu podataka u cjelini.

Navedena metoda primijenjena je kod mjerenja naprezanja, odnosno promjene duljine opruge u zavisnosti od opterećenja. Vrijednosti promjene duljine i sile ponašaju se prema linearnoj funkciji, kao što je i određeno Dijagramom naprezanja.

Dijagram naprezanja bazira se na Hookovom zakonu, zvanom i Zakonom elastičnosti koji glasi da je deformacija tijela proporcionalna primijenjenoj sili, ali samo do kad se ne prijeđe granica elastičnosti tijela. Prestankom djelovanja sile tijelo će se vratiti u svoj prvobitni oblik.

Ako se tijelo na elastičnoj opruzi pomakne iz ravnotežnog položaja, na primjer rastezanjem ili stezanjem opruge djelovat će povratna sila (elastična sila opruge), koja će tijelo vući u ravnotežni položaj. Iznos te sile je proporcionalan pomaku tijela iz ravnotežnog položaja.

Na temelju mjerenja unutar granica elastičnosti dobivene su vrijednosti. Ucrtavanjem oblaka točaka u dijagram rasipanja grafički je vidljivo da će aproksimacijski pravac biti linearan. Određene su vrijednosti koeficijenata aproksimacijskog pravca korištenjem metode najmanjih kvadrata, a rezultati su uspoređeni s rezultatima dobivenim aplikacijom Statistica.

Dobivenom usporedbom može se zaključiti da rezultati dobiveni ručno korištenjem matrica prema metodi najmanjih kvadrata ne odstupaju od vrijednosti dobivene aplikacijom.

5. Literatura

[1] Metoda najmanjih kvadrata. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. Pristupljeno 17. 10. 2022. http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=70244

[2] Pauše Ž. Uvod u matematičku statistiku. Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[3] Horvat J., Mijoč, J. Osnove statistike, Ljevak, Zagreb, 2012.

[4] Björck, A. Numerical methods for least squares problems, SIAM, Philadelphia, 1996.

[5] Laplace, Pierre Simon de. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. Pristupljeno 20. 11. 2022. http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=35431

[6] Gauss, Carl Friedrich. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. Pristupljeno 20. 11. 2022. http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=21409

[7] Wikipedia – Cerera https://bs.wikipedia.org/wiki/Cerera_(patuljasta_planeta)#cite_note-1 pristupljeno: 20. 11. 2022.

[8] Hoskin, Michael (26. 6. 1992). "Bodes' Law and the Discovery of Ceres". Observatorio Astronomico di Palermo "Giuseppe S. Vaiana". http://www.astropa.inaf.it/ Pristupljeno 20.11.2022.

[9] Forbes, Eric G. Gauss and the Discovery of Ceres. Journal for the History of Astronomy. 2: 195–199. 1971 https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1971JHA.....2..195F Pristupljeno 20.11.2022.

[10] Ross S. Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Elsevier, 2009

[11] Gotal Dmitrović, L., Dušak, V., Milković, M. Modeliranje informacijskih sustava za zaštitu površinskih voda, Sveučilište Sjever, pp. 45-48, 2017.

[12] Andrich, D., Pedler, P. A law of ordinal random error: The Rasch measurement model and random error distributions of ordinal assessments, Measurement, 131, pp. 771-781, 2019.

[13] Dill, E. H. Continuum Mechanics: Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity. Germany: CRC Press, pp. 11-23, 2006.

[14] Elert, G. Springs. The Physics Hypertextbook. https://physics.info/springs/, Pristupljeno 21.11.2022.

[15] Decker, K. H. Elementi strojeva, Tehnička knjiga Zagreb.2006.

[16] Kraut, B. Strojarski priručnik, Tehnička knjiga Zagreb 2009.

[17] Gest, H. The discovery of microorganisms by Robert Hooke and Antoni van Leeuwenhoek, Fellows of The Royal Society. 58 (2), pp. 187–201. 2004.

[18] https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Hooke#/media/File:Portrait_of_a_Mathematician_1680c.jpg Pristupljeno: 23.11.2022.

[19] Gribbin, J., Gribbin, M. Out of the shadow of a giant: Hooke, Halley and the birth of British science, London, 2017.

[20] Drake, E. T. Hooke's Ideas of the Terraqueous Globe and a Theory of Evolution". In Michael Cooper; Michael Hunter (eds.). Robert Hooke: Tercentennial Studies. Burlington, Vermont: Ashgate. pp. 135–149. 2006.

[21] Chapman, A. England's Leonardo: Robert Hooke (1635–1703) and the art of experiment in Restoration England. Proceedings of the Royal Institution of Great Britain. 67: 239–275. 1996.

[22] Beer, F. B., Johnston Jr., E. R., Dewolf, J. T., Mazurek, D. F., Mechanics of Materials, 6th edit., McGraw-Hill, ISBN:978-0-07-13439-8, pp. 78, 2012. https://hr.wikipedia.org/wiki/Dijagram_naprezanja#/media/Datoteka:%C4%8Cvrsto%C4%87a1.jpg, Pristupljeno: 21.11.2022.

[23] Thomas Young, https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_%28scientist%29#/media/File:Thomas_Young_by_Briggs_cropped.jpg, Pristupljeno: 22.11.2022.

Popis slika

Popis tablica

Prilozi

Prilog 1. Plagscan završnog – izvješće

Prilog 2. Izjava o autorstvu i suglasnost za javnu objavu

0 matches from 0 sources, of which 0 are online sources.

PlagLevel: **0.0%**

Settings

Sensitivity: *Low*
Bibliography: *Consider text*
Citation detection: *Reduce PlagLevel*
Whitelist: --

Analyzed document

=====================1/39======================
Završni rad br. XX/MM/2015
Upotreba metode najmanjih kvadrata kod promjene oblika
čvrstog tijela uslijed djelovanja vanjske sile prema
Hookovom zakonu
Hrvoje Kišiček, 0035151345
=====================2/39======================
=====================3/39======================
Odjel za strojarstvo
Preddiplomski stručni studij Proizvodno strojarstvo
Završni rad br. XX/MM/2015
Upotreba metode najmanjih kvadrata kod promjene oblika
čvrstog tijela uslijed djelovanja vanjske sile prema
Hookovom zakonu
Student
Hrvoje Kišiček, 0035151345
Mentor
izv. prof. dr. sc. Lovorka Gotal Dmitrović
=====================4/39======================
=====================5/39======================
Predgovor
Dugo vremena mi je trebalo da se odlučim završiti ovaj Završni rad. Međutim, ima ljudi koji
ne odustaju od mene, pa su me uvjerili da je vrijeme da završim započeto.
Hvala mentorici, izv.prof.dr.sc. Lovorki Gotal Dmitrović na savjetima i razumijevanju, ali
naročito na strpljenju.
Hvala mojoj Sonji za podršci, nadam se da neće imati toliko posla oko djece kad će studirati.
Vjerujem da sam na svojem primjeru pokazao da nikad nije kasno završiti započeto.
=====================6/39======================
Sažetak
U radu su prikazane osnove Metode najmanjih kvadrata, počevši od regresijske analize.
Metodu najmanjih kvadrata postavio je 1795. g. Carl Friedrich Gauss. U praktičnom dijelu
izvršena su mjerenja promjene dužine opruge u zavisnosti od opterećenja. Oprugu, kao i zakon
elastičnosti postavio je Robert Hooke, pa se i zakon zove po njemu – Hookove zakon. Dobivene
vrijednosti ucrtane su u graf, koji predstavlja početak dijagrama naprezanja. Linearna funkcija
koja najbolje odgovara dobivenim točkama izračunata je ručno Metodom najmanjih kvadrata.
Dobiveni koeficijenti pravca provjereni su korištenjem aplikacije Statistica.
Ključne riječi: zakon elastičnosti, dijagram naprezanja, linija najmanjih kvadrata,
regresijska analiza
Abstract
The paper presents the basics of the Method of Least Squares, starting with regression
analysis. The method of least squares was established in 1795 by Mr. Carl Friedrich Gauss. In
the practical part, measurements were made of the change in spring length depending on the
load. The spring, as well as the law of elasticity, was established by Robert Hooke, so the law is
named after him - Hooke's law. The obtained values are plotted in a graph, which represents the
beginning of the stress diagram. The linear function that best fits the obtained points was
calculated manually by the Method of Least Squares. The obtained direction coefficients were
checked using the Statistica application.
Keywords: law of elasticity, stress diagram, line of least squares, regression analysis

Sveučilište
Sjever

SVEUČILIŠTE
SJEVER

IZJAVA O AUTORSTVU
I
SUGLASNOST ZA JAVNU OBJAVU

Završni/diplomski rad isključivo je autorsko djelo studenta koji je isti izradio te student odgovara za istinitost, izvornost i ispravnost teksta rada. U radu se ne smiju koristiti dijelovi tuđih radova (knjiga, članaka, doktorskih disertacija, magistarskih radova, izvora s interneta, i drugih izvora) bez navođenja izvora i autora navedenih radova. Svi dijelovi tuđih radova moraju biti pravilno navedeni i citirani. Dijelovi tuđih radova koji nisu pravilno citirani, smatraju se plagijatom, odnosno nezakonitim prisvajanjem tuđeg znanstvenog ili stručnoga rada. Sukladno navedenom studenti su dužni potpisati izjavu o autorstvu rada.

Ja, HRVOJE KIŠIČEK *(ime i prezime)* pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor/ica završnog/diplomskog (*obrisati nepotrebno*) rada pod naslovom UPOTREBA METODE NAJMANJIH KVADRATA KOD PROMJENE OBLIKA ČVRSTOG TIJELA ... *(upisati naslov)* te da u navedenom radu nisu na nedozvoljeni način (bez pravilnog citiranja) korišteni dijelovi tuđih radova.

Student/ica:
(upisati ime i prezime)

____
(vlastoručni potpis)

Sukladno Zakonu o znanstvenoj djelatnost i visokom obrazovanju završne/diplomske radove sveučilišta su dužna trajno objaviti na javnoj internetskoj bazi sveučilišne knjižnice u sastavu sveučilišta te kopirati u javnu internetsku bazu završnih/diplomskih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice. Završni radovi istovrsnih umjetničkih studija koji se realiziraju kroz umjetnička ostvarenja objavljuju se na odgovarajući način.

Ja, HRVOJE KIŠIČEK *(ime i prezime)* neopozivo izjavljujem da sam suglasan/na s javnom objavom završnog/diplomskog *(obrisati nepotrebno)* rada pod naslovom UPOTREBA METODE NAJMANJIH KVADRATA KOD … *(upisati naslov)* čiji sam autor/ica.

Student/ica:
(upisati ime i prezime)

____
(vlastoručni potpis)