

# Određivanje geometrijske stabilnosti složenih statičkih sustava metodom virtualnog rada

---

Margić, Antonela

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University North / Sveučilište Sjever**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:122:818549>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

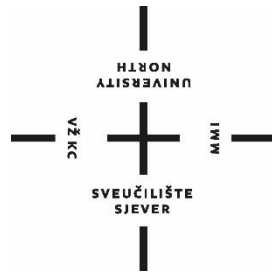
Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-17**



Repository / Repozitorij:

[University North Digital Repository](#)





**Sveučilište  
Sjever**

DIPLOMSKI RAD br. 83/GRD/2023

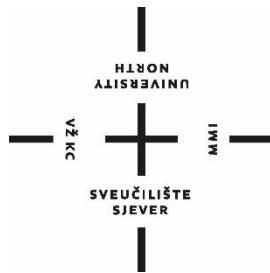
**Određivanje geometrijske stabilnosti složenih  
statičkih sustava metodom virtualnog rada**

**Antonela Margić, 3591/336**

Varaždin, srpanj 2023. godine



**SVEUČILIŠTE SJEVER**  
**SVEUČILIŠNI CENTAR VARAŽDIN**  
**Studij Graditeljstvo**



DIPLOMSKI RAD br. 83/GRD/2023

**Određivanje geometrijske stabilnosti složenih  
statičkih sustava metodom virtualnog rada**

**Student:**

Antonela Margić, 0082053783

**Mentor:**

doc. dr. sc. Aleksej Aniskin

Varaždin, srpanj 2023. godine

# Prijava diplomskog rada

## Definiranje teme diplomskog rada i povjerenstva

ODJEL Odjel za graditeljstvo

STUDIJ diplomski sveučilišni studij Graditeljstvo

PRISTUPNIK Antonela Margić

MATIČNI BROJ 3591/336

DATUM 14.7.2023.

KOLEGIJ Teorija Konstrukcija

NASLOV RADA Određivanje geometrijske stabilnosti složenih statičkih sustava metodom virtualnog rada

NASLOV RADA NA ENGL. JEZIKU Determination of the geometric stability of complex static systems using the virtual work method

MENTOR dr.sc. Aleksej Aniskin

ZVANJE docent

### ČLANOVI POVJERENSTVA

1. doc.dr.sc. Matija Orešković
2. doc.dr.sc. Aleksej Aniskin
3. prof.dr.sc. Božo Soldo
4. doc.dr.sc. Anđelko Cmoja
5. izv.prof.dr.sc. Bojan Đurin

VZ  
KC

MMI

## Zadatak diplomskog rada

BROJ 83/GRD/2023

### OPIS

Pristupnik treba u radu opisati metodu virtualnog rada te način određivanja geometrijske stabilnosti složenih sustava uz primjenu navedene metode. Prikazati nekoliko primjera rješanih sustava analitički i numerički. Usporediti i prokomentirati dobivene rezultate te napisati zaključak.

U radu je potrebno obraditi slijedeće teme:

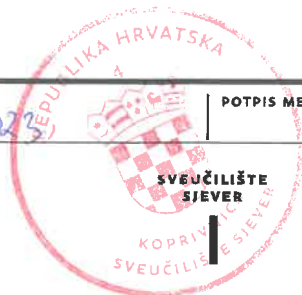
1. Uvod
2. Teoretske osnove metode virtualnog rada
3. Primjeri zadataka s primjenom metoda virtualnog rada
4. Usporedba i provjera pomoću programa Dlubal RFEM 5.13.
5. Zaključak
6. Literatura

ZADATAK URUČEN

07.07.2023

POTPIS MENTORA

OK



## **Predgovor**

*Najprije bih se željela zahvaliti svom mentoru docentu dr.sc. Alekseju Aniskinu, profesore bili ste mi veliki vjetar u leđa još od prvog ispita kojeg sam polagala kod Vas, hvala Vam na tome. Hvala Vam na odvojenom vremenu, riječim podrške i povjerenju. Iznimno Vas cijenim.*

*Nadalje veliku zahvalnost dugujem svojoj obitelji na podršci i riječima ohrabrenja kao i prijateljima koje sam stekla tokom fakultetskih dana, postali ste mi prava obitelj. Zahvalnost dugujem svim svojim prijateljima koji su me bodrili i slušali moja jadanja koja im ni najmanje nisu bila jasna. Veliko hvala i mojim bivšim i sadašnjim kolegama, od vas sam puno naučila i imam još više za naučiti, nadam se da imate strpljenja za mene.*

*Zahvaljujem se svim profesorima Sveučilišta Sjever na podijeljenom znanju i savjetima.*

*Hvala svim mojim ljudima, veliki ste dio mog života!*

*Antonela Margić*

## **Sažetak**

U ovom radu detaljno je objašnjena metoda virtualnog rada i njena primjena na statički određenim sustavima, također objašnjeni su i statički sustavi te određivanje njihove geometrijske stabilnosti. Na kraju rada određeno je da li je ova metoda podobna za primjenu u problematici za koju je namijenjena.

*Ključne riječi;* Složeni statički sustavi, metoda virtualnog rada, geometrijska nepromjenjivost, polovi sustava, virtualni pomaci, trozglobni nosač, rešetkasti nosač, mehanizam, tražena sila,...

## **Abstract**

In this paper, the virtual work method and its application to statically determined systems are explained in detail, static systems and the determination of their geometric stability are also explained. At the end of the paper, it was determined whether this method is suitable for application in the problem for which it is intended.

*Keywords;* Complex static systems, method of virtual work, geometric invariance, poles of the system, virtual displacements, three-jointed girder, lattice girder, mechanism, required force,...



## Popis korištenih kratica

|              |  |
|--------------|--|
| $q$          | Kontinuirano opterećenje                             |
| $H, V, Q, P$ | Koncentrirane sile                                   |
| $S$          | Broj stupnjeva slobode                               |
| $n_D$        | Broj diskova   |
| $l$          | Broj reakcija u ležajevima                           |
| $z_1$        | Broj jednostrukih zglobova                           |
| $z_2$        | Broj dvostrukih zglobova                             |
| $z_0$        | Broj krutih veza                                     |
| $R_{A,H}$    | Horizontalna komponenta reakcije u zglobnom ležaju A |
| $I$          | Disk 1 / Tijelo 1                                    |
| $II$         | Disk 2 / Tijelo 2                                    |
| $\Sigma dW$  | Ukupan rad sila                                      |
| $d\varphi_x$ | Virtualni kut zaokreta                               |
| $dy_x$       | Virtualni pomak                                      |
| $a$          | Sila u štapu   |

# Sadržaj

|  |    |
|--|----|
| 1. Uvod .....  | 1  |
| 1.1. Statički sustavi .....                                    | 1  |
| 1.2. Geometrijska stabilnost.....                              | 3  |
| 1.2.1. Određivanje geometrijske stabilnosti .....              | 10 |
| 2. Teoretske osnove metode virtualnog rada .....               | 12 |
| 2.1. Virtualni rad .....                                       | 12 |
| 2.2. Teorem o virtualnim pomacima .....                        | 16 |
| 2.3. Teorem o virtualnim silama .....                          | 32 |
| 2.4. Metoda jedinične sile .....                               | 33 |
| 2.5. Vereščaginov teorem .....                                 | 35 |
| 2.6. Određivanje plana polova .....                            | 37 |
| 3. Primjeri zadataka s primjenom metoda virtualnog rada .....  | 38 |
| 3.1. Trozglobni nosač – PRIMJER .....                          | 38 |
| 3.1.1. Virtualni rad na trozglobnom nosaču .....               | 40 |
| 3.2. Rešetkasti nosač – PRIMJER.....                           | 47 |
| 3.2.1. Virtualni rad na rešetkastom nosaču .....               | 49 |
| 4. Usporedba i provjera pomoću programa Dlubal RFEM 5.13. .... | 56 |
| 4.1. Dlubal RFEM 5.13.....                                     | 56 |
| 4.2. Trozglobni nosač.....                                     | 57 |
| 4.3. Rešetkasti nosač .....                                    | 61 |
| 5. Zaključak .....   | 64 |
| 6. Literatura .....  | 65 |

# 1. Uvod

## 1.1. Statički sustavi

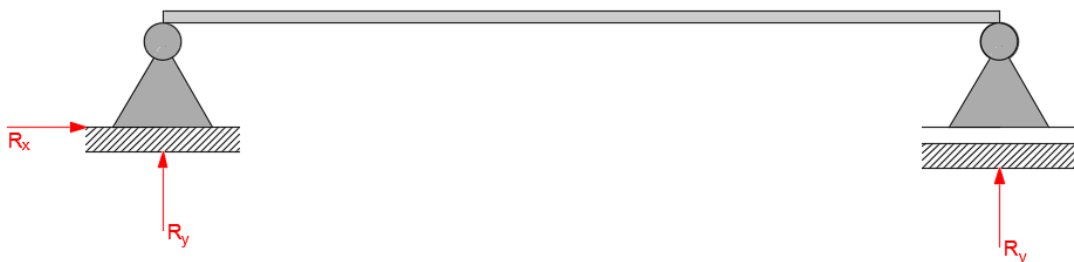
U ovom diplomskom radu određivat će se geometrijska stabilnost složenih statičkih sustava metodom virtualnog rada.

Sustavi odnosno sistemi dijele se na;

Sustave koji su geometrijski nepromjenjivi, a imaju najmanji mogući broj veza koje su ispravno raspoređene, takve sustave nazivamo *statički određenim sustavima*. Geometrijski nepromjenjive sustave koji imaju broj veza veći od najmanje potrebnog nazivamo *statički neodređeni sustavima*, dok geometrijski promjenjive sustave nazivamo *mehanizmima*.

Prema definiciji statički određen sustav je *onaj sustav koji može ostati u stanju ravnoteže za opterećenje po volji i ako postoji jedinstveni skup reakcija i unutarnjih sila koje zadovoljavaju uvjete ravnoteže sustava i njegovih pogodno odabranih dijelova*.

Primjer statički određenog sustava prikazan je na slici 1.1.



Slika 1.1. Primjer statički određenog sustava

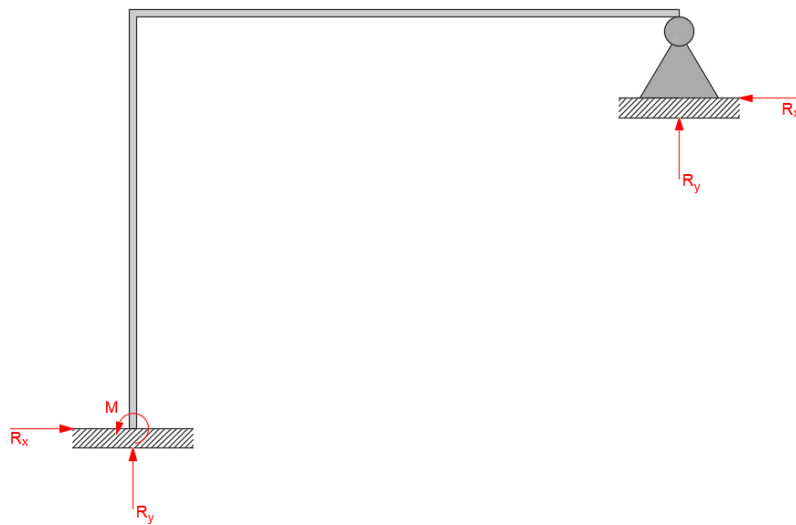
Statička definicija statički neodređenog sustava glasi; *Statički neodređeni sustav je spojeni sustav koji može ostati u stanju ravnoteže pri bilo kakvom opterećenju, ali je broj nepoznatih vrijednosti sila u vezama, vanjskim ili unutarnjim ili vanjskim i unutarnjim, veći od broja neovisnih jednadžbi koje izražavaju uvjete ravnoteže, pa te uvjete zadovoljava beskonačno mnogo vrijednosti sila*.

Statički gledano stupanj statičke neodređenosti jednak je razlici broja nepoznatih vrijednosti sila i broja neovisnih uvjeta ravnoteže koje možemo postaviti za konstrukciju kao cjelinu i za pojedine njezine dijelove.

Dok s kinematičkog stajališta *statički neodređeni sistem je geometrijski nepromjenjiv sistem u kojem je broj veza, vanjskih ili unutarnjih ili i jednih i drugih, veći od najmanjeg broja nužnog za njegovu geometrijsku nepromjenjivost.*

Kinematički je stupanj statičke neodređenosti definiran kao razlika ukupnog broja veza i najmanjeg broja veza potrebnog za geometrijsku nepromijenjenost sistema, odnosno taj stupanj jednak je broju prekobrojnih veza (prekobrajnim vezama smatraju se veze koje su višak pri zadovoljenju uvjeta geometrijske nepromjenjivosti, to nisu nepotrebne veze).

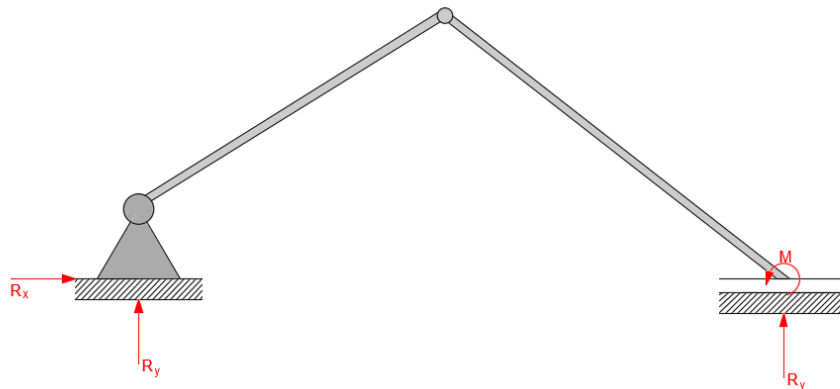
Primjer statički neodređenog sustava prikazan je na slici 1.2.



Slika 1.2. *Primjer statički neodređenog sustava*

Za slučaj mehanizama razlog njihove promjenjivosti može biti nedovoljan broj ili ako veza ima dovoljno ili previše no nisu raspoređene na odgovarajuć način.

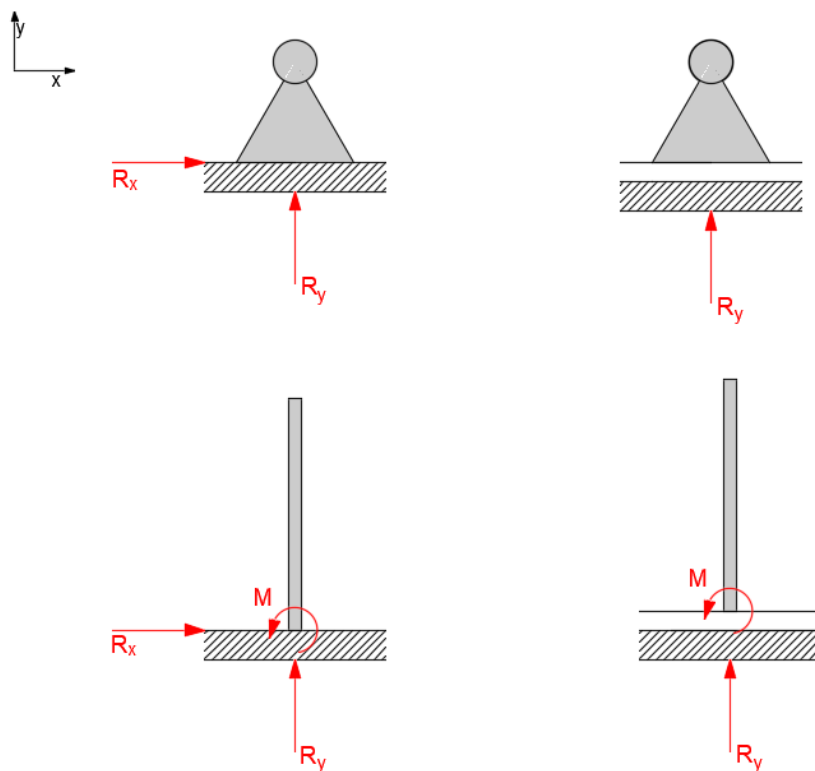
Primjer mehanizma prikazan je na slici 1.3.



Slika 1.3. *Primjer mehanizma*

## 1.2. Geometrijska stabilnost

Na slici 1.4. prikazani su osnovni oblici ležajeva i reakcijske sile koje se u njima javljaju kako bi lakše objasnili devet uvjeta ravnoteže i geometrijsku stabilnost sustava.



Slika 1.4. Reakcijske sile u ležajevima

Postoji 9 uvjeta ravnoteže, po 3 za svaku od ravnina ( $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ ).

Ravnina  $xy$ ;

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0 \quad (1.1.1.)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0 \quad (1.1.2.)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i F_{i,y} + y_i F_{i,x}) + \sum_{j=1}^m M_{j,z} = 0 \quad (1.1.3.)$$

Ravnina  $xz$ ;

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0 \quad (1.1.4.)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0 \quad (1.1.5.)$$

$$\sum_{i=1}^n (-x_i F_{i,z} + z_i F_{i,x}) + \sum_{j=1}^m M_{j,y} = 0 \quad (1.1.6.)$$

Ravnina  $yz$ ;

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0 \quad (1.1.7.)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0 \quad (1.1.8.)$$

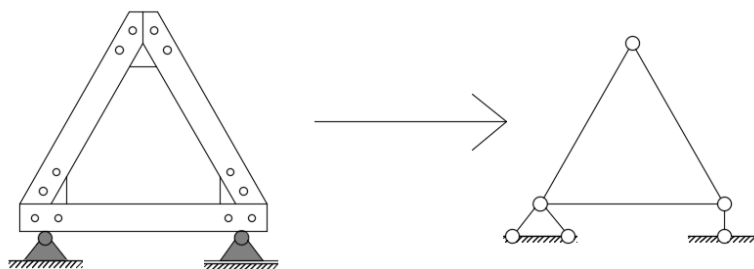
$$\sum_{i=1}^n (-x_i F_{i,z} + z_i F_{i,x}) + \sum_{j=1}^m M_{j,y} = 0 \quad (1.1.9.)$$

Dakle, promatrajući ravninu  $xy$  vidljivo je da vrijedi sljedeće; suma svih sila u smjeru osi  $x$  jednaka je 0, suma svih sila u smjeru osi  $y$  jednak je 0, te je suma momenata oko osi  $z$  jednaka 0. Analogno vrijedi i za ravnine  $xz$  i  $yz$ .

Konstruktivska mehanika bavi se nedeformabilnim sistemima i strukturama, odnosno konstrukcijskim sustavima koji mogu biti poremećeni bez deformiranja elemenata sustava. Nepromijenjivost takvih sustava (njihova geometrijska stabilnost) koji su povezani s tlom osigurana je pomoću ležajeva. Reakcije koje se javljaju u tim ležajevima uz nanoseno opterećenje tvore ravnotežni sustav pomoću vanjskih i unutarnjih sila.

U ovom poglavlju geometrijska stabilnost pobliže će biti objašnjena na primjeru okvira. Okviri se sastoje od serije odvojenih, uobičajno ravnih štapova koji su povezani varenjem, zakovicama, vijcima ili na neki drugi način. Ravna rešetka je najjednostavniji dvodimenzionalni primjer okvira. U većini slučajeva spojevi u okvirima nisu zglobovi već sadrže određeni stupanj krutosti. Točan proračun rešetke ili okvira s krutim vezama je kompliciraniji kako sustav postaje više puta statički neodređen. S druge strane kada se krute veze zamijene zglobovima analiza postaje jednostavnija i pod određenim uvjetima jednačbe ravnoteže ovakvog sustava bit će dostatne za određivanje njegove geometrijske stabilnosti. Dokazano je da ovakvom zamjenom krutih veza sa zglobovima ne dolazi do značajnih pogrešaka tokom proračuna i analize naprežanja. Prema tome obične rešetke možemo smatrati zglobovno povezanima radi lakšeg proračuna.

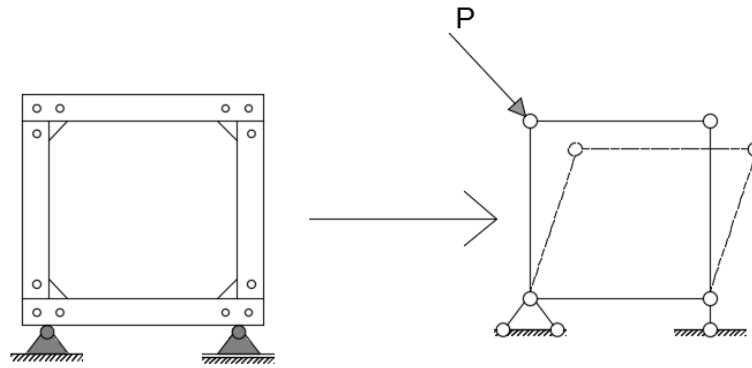
Kada promatramo sustav koji se sastoji od tri kruto povezana štapa kao na slici 1.5., vidljivo je da kada zamijenimo krute veze zglobovima, tada sustav ostaje nedeformabilan.



Slika1.5. Zamijena krutih veza zglobovima - TROKUT

Dakle, sustavu je onemogućeno svako iskrivljenje odnosno pomak bez deformacija barem jednog štapa.

Dok kod sustava koji se sastoji od četiri kruto povezana štapa kao što je prikazano na slici 1.6. istim postupkom dobit ćemo sustav čiji oblik se može mijenjati bez deformacije članova sustava.



Slika 1.6. Zamjena krutih veza zglobovima – ČETVEROKUT

Prema tome vidljivo je da je najjednostavniji nedeformabilni sustav onaj koji se sastoji od zasebnih zglobno povezanih štapova u oblik trokuta.

Postoji nekoliko pravila koja je potrebno slijediti tokom formiranja geometrijski stabilne zglobno povezane rešetke koja se sastoji od više od tri člana odnosno štapa. Za početak promotrit ćemo sustav koji se sastoji od dva štapa koji su smješteni duž ravne linije i povezani su zglobom C, njihovi krajevi definirani su sa dvije fiksne točke A i B (prikazano na slici 1.7.). U slučaju kada se štapovi AC i BC odvoje u točki C, rub C štapa AC postaje slobodna i miče se duž luka m-m, dok rub C štapa BC se miče duž luka n-n. Dva luka m-m i n-n imaju zajedničku tangentu u točki C.



Slika 1.7. Dva štapa smještena duž ravne linije – NESTABILAN SUSTAV

Ako se rub C jednog od ova dva štapa pomakne za neznatno malen pomak koji je okomit na dužinu AB, drugi štap neće pružiti otpor tom pomaku. Dakle, sustav je geometrijski nestabilan iz razloga jer se njegov geometrijski oblik može mijenjati bez uzrokovanja deformacije štapova, odnosno bez promjene duljine štapova. Ovakav sustav smatramo trenutno nestabilnim.

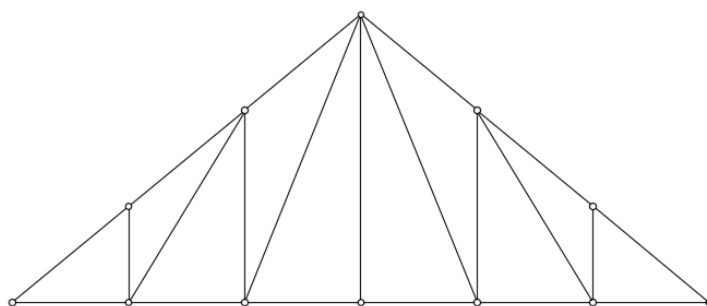


Situacija se u potpunosti mijenja ako dva štapa AC i BC nisu u istoj ravnini kao što je prikazano na slici 1.8. Kada se promatra ovakav slučaj vidljivo je da lukovi m-m i n-n nemaju dodirnih točaka, odnosno nemaju zajedničku tangentu. Dakle, najmanji pomak zgloba C je nemoguć bez odgovarajuće deformacije štapova.



Slika 1.8. Dva štapa koja ne leže na istoj liniji– STABILAN SUSTAV

Svaki dodatni zglob koji formira dio geometrijski stabilnog sustava mora biti pričvršćen na sustav pomoću dva odvojena štapa čije osi ne leže na istoj liniji. Prema tome svaki sustav koji se sastoji od zglobno povezanih trokuta, kod kojih će se svaki idući zglob povezati na dva postojeća sa dva štapa koja nisu u ravnini bit će stabilan, odnosno nepromjenjiv. Prema tome, svaki sustav koji je razvijen od zglobno povezanih trokuta, sukcesivnim dodavanjem zglobova bit će geometrijski stabilan.



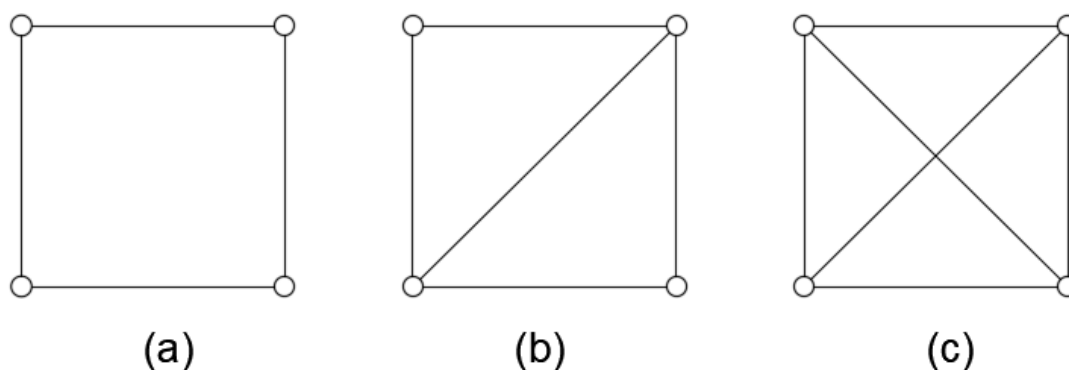
Slika 1.9. Primjer jednostavne rešetke

Svaka kombinacija tri zglobno povezana štapa u trokut može poslužiti kao baza za potvrdu geometrijske stabilnosti jednostavnih rešetki. Ovo svojstvo moguće je provjeriti jednako uspješno obrnutim redosljedom tako da uklanjamo jedan po jedan zglob zajedno sa dva štapa koji mu pripadaju, ako na kraju zadržimo jedan trokutasti okvir sustav je geometrijski stabilan.

Ako je  $S$  broj štapova, a  $K$  je broj zglobova. Trokut se sastoji od tri štapa koji su povezani sa tri zgloba, svi ostali zglobovi koji su povezani s dva štapa se numeriraju kao  $(K-3)$ . Prema tome broj štapova u geometrijski stabilnom sustavu jednostavno se može dobiti iz jednadžbe 1.1.10.

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| $S = 3 + 2(K - 3) = 2K - 3$ | (1.1.10.) |
|-----------------------------|-----------|

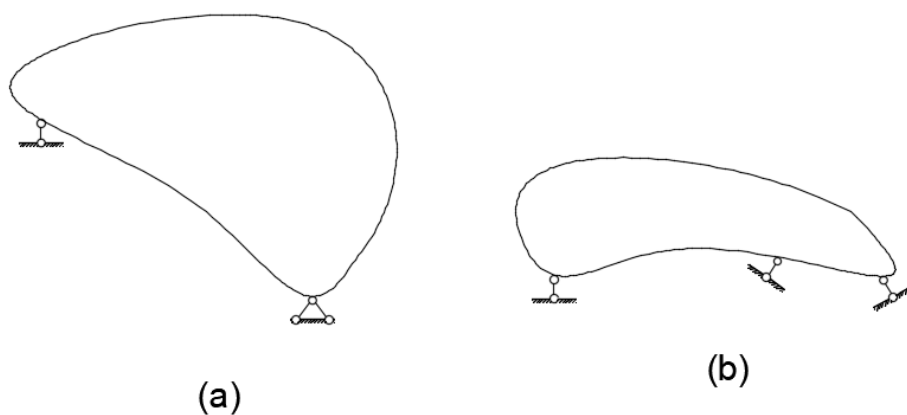
Ako je broj štapova manji od iznosa koji dobijemo formulom 1.1.10. takav sustav je nestabilan.



Slika 1.10. *Primjeri sustava*

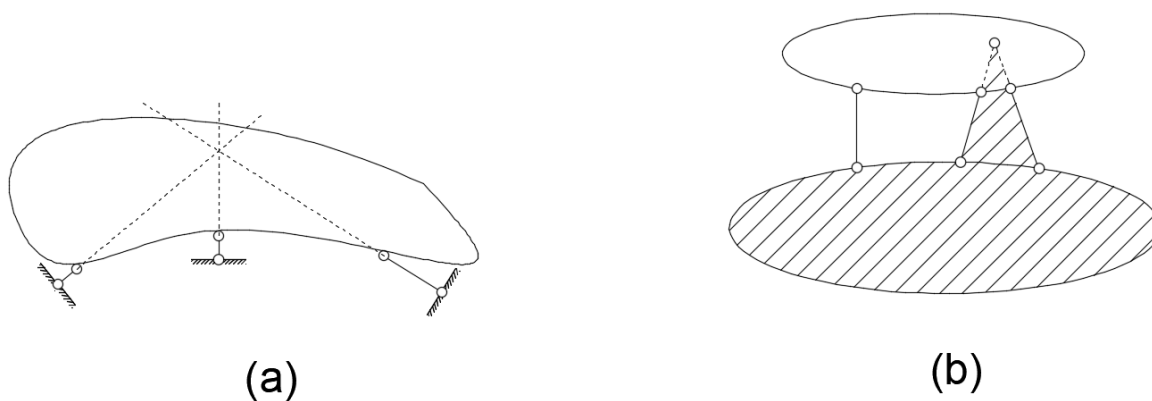
Na slici 1.10.(a) prikazan je primjer nestabilnog sustava jer formulom 1.1.10. dobijemo da je potreban broj štapova za postizanje geometrijski stabilnog sustava pet, dok sustav sa slike (a) ima četiri štapa. Vidljivo je da je sustav sa slike (b) stabilan prema jednadžbi 1.1.10., dok za sustav (c) prema formuli 1.1.10. jedna dijagonala je viška, ali sustav je i dalje stabilan. No uvijet da  $S \geq 2K - 3$  nije dovoljan kako bi se osigurala geometrijska stabilnost zglobno povezanih štapnih sustava.

Promatramo li problem povezivanja geometrijski stabilnih sustava s podlogom pomoću ležajeva kako je prikazano na slici 1.11.



Slika 1.11. *Primjeri geometrijski stabilnih sustava*

U većini slučajeva ravninske strukture (koje možemo promatrati kao kruto tijelo) imaju dva zglobna ležaja, jedan klizni i drugi fiksni kako je prikazano na slici 1.11.a i takva veza između strukture i tla je geometrijski stabilna. Nije nužno da dva od tri potporna štapa imaju zajednički zglob, zapravo ne trebaju imati ni jedan kao što je prikazano na slici 1.11.b. No, ako se smjerovi svih potpornih štapova sijeku u istoj točki kao što je prikazano na slici 1.12.a u toj točki se nalazi centar rotacije oko kojeg se cijeli sustav rotira za infinitezimalne kuteve. Čim se ostvari ovakav pomak potporni štapići više se neće sijeći u istoj točki i svaki idući pomak će biti nemoguć bez popratne deformacije štapova. Ovakav sustav na taj način povezan s tlom je trenutno nestabilan i takav raspored ležajeva je neprihvatljiv.



Slika 1.12. *Primjer geometrijski stabilnog i nestabilnog sustava*

U suprotnom tri nesukladna i neparalelna štapa će uvijek osiguravati geometrijski stabilan sustav. Sve navedeno odnosi se i na spojeve bilo koje dvije geometrijski stabilne strukture međusobno, ali slijedeći iduće pravilo; *Dva kruta tijela će formirati geometrijski stabilnu strukturu ako su međusobno povezani sa tri štapa koji nisu paralelni i nemaju sjecište u istoj točki.*

Ako je zglob smješten u točki sjecišta bilo koja dva od tri štapa kojima su povezana tijela, sustav ostaje stabilan i smatra se da su dva tijela međusobno povezana jednim zglobom i jednim štapom, primjer je prikazan na slici 1.12.b. Pa je lako za zaključiti da se dva tijela mogu povezati krutom vezom koristeći jedan zglob i jedan štap, no nužno je osigurati da smjer štapa ne prolazi kroz centar zgloba.

### 1.2.1. Određivanje geometrijske stabilnosti

U ovom dijelu kratko će biti objašnjen način na koji će se određivati geometrijska stabilnost sustava na kojima će biti primjena metoda virtualnog rada.

Uvjet geometrijske nepromjenjivosti glasi;

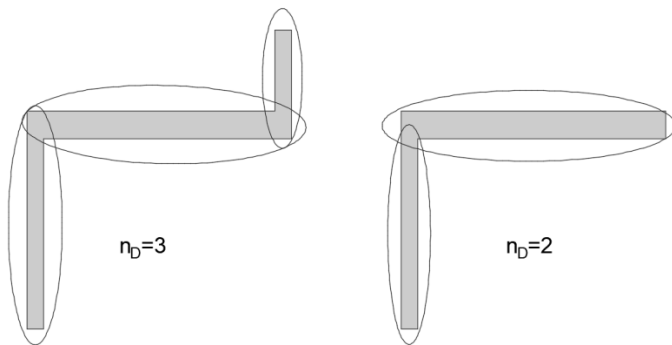
$$S = n_D \cdot 3 - n_{z_1} \cdot 2 - n_{L'} = 0 \quad (1.1.11.)$$

Uvjet geometrijske nepromjenjivosti / broj stupnjeva slobode sustava; objašnjenje

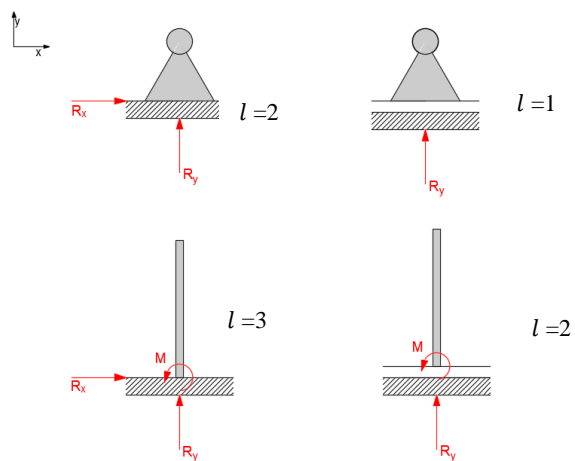
$$S = n_D \cdot 3 - l - 2 \cdot z_1 - 4 \cdot z_2 - 6 \cdot z_3 \dots - 3 \cdot z_0 = 0 \quad (1.1.12.)$$

Pri čemu je;

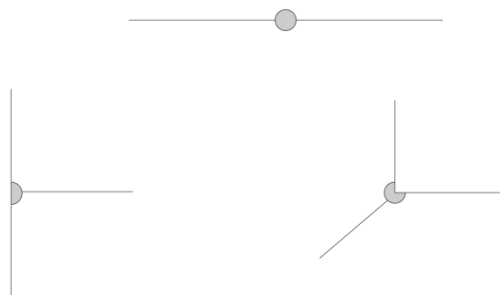
$n_D$  broj diskova



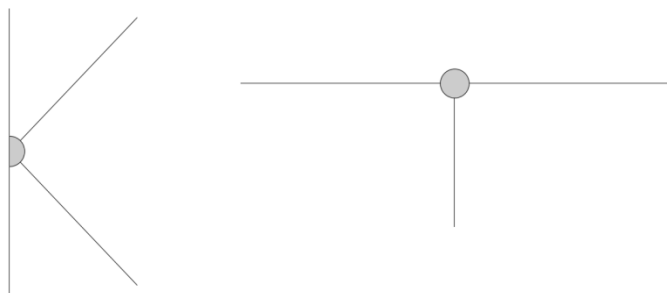
$l$  broj reakcija u ležajevima



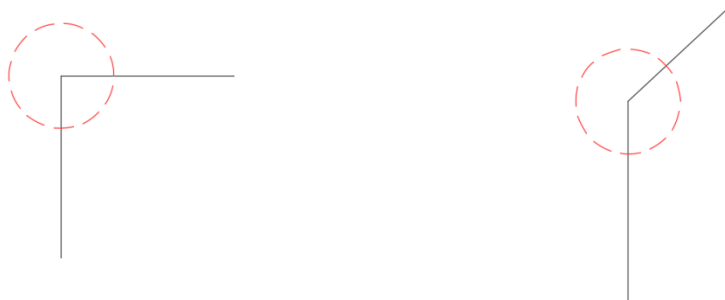
$z_1$  označuje broj jednostrukih zglobova, odnosno to su zglobovi koji povezuju 2 diska



$z_2$  označuje broj dvostrukih zglobova, odnosno to su zglobovi koji povezuju 3 diska



$z_0$  označuje broj krutih veza, odnosno predstavlja svaki spoj dva diska bez zgloba



## 2. Teoretske osnove metode virtualnog rada

### 2.1. Virtualni rad

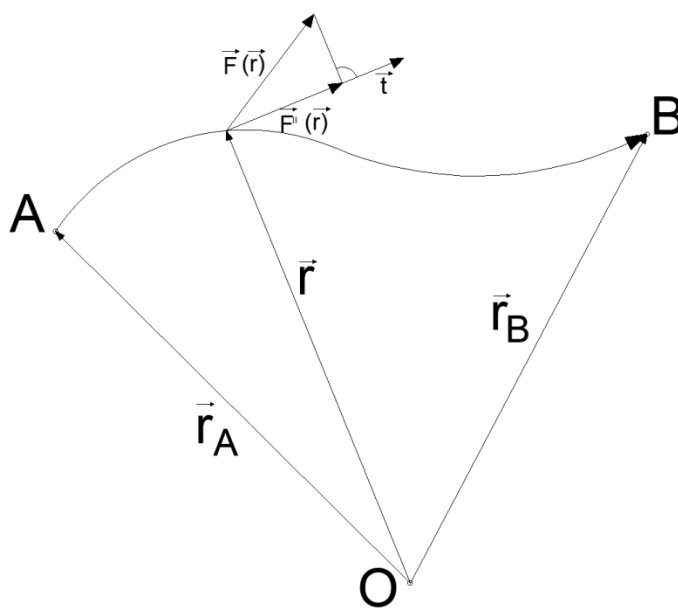
Mehanički rad definiran je kao svladavanje sile na nekom putu, te je razmjernan duljini puta i vrijednosti komponente sile na pravcu puta.

Sila se prikazuje vektorskom funkcijom položaja jer duž puta može mijenjati vrijednost i pravac djelovanja.

$$\vec{F}: R^3 \rightarrow V^3, \vec{F}: (x, y, z) \rightarrow \vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k} \quad (2.1.1.)$$

Moguće je poistovjetiti točku  $(x, y, z)$  s njenim radij-vektorom  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , pa kraće zapisano dobivamo sljedeći oblik;

$$\vec{F}: V^3 \rightarrow V^3, \vec{F}: \vec{r} \rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r})\vec{i} + F_y(\vec{r})\vec{j} + F_z(\vec{r})\vec{k} \quad (2.1.2.)$$



Slika 2.1. Rad sile  $\vec{F}$  na putu  $\widetilde{AB}$

Rad koji vrši sila  $\vec{F}$  na putu od točke A do točke B je skalarna veličina koja je jednaka vrijednosti krivuljnog integrala druge vrste. Vrijednost krivuljnog integrala druge vrste prikazana je izrazom 2.1.3.

$$\mathfrak{B}_{\widetilde{AB}} = \int_{\widetilde{AB}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\widetilde{AB}} F_x(\vec{r}) dx + F_y(\vec{r}) dy + F_z(\vec{r}) dz \quad (2.1.3.)$$

U nekoj točki puta  $\widetilde{AB}$  koja je definirana vektorom  $\vec{r}$  na pravcu puta djeluje samo komponenta sile koja je okomita na smjer djelovanja vektora, označit ćemo je s  $\vec{F}^{II}(\vec{r})$ . Odnosno, ako je primjerice put pravocrtan, a sila je stalna po pravcu i vrijednosti, te se još poklapa i s pravcem puta, rad koji vrši ta sila na tom pravocrtnom putu jednak je umnošku duljine prijeđenog puta i intenziteta sile. No, prilikom izračuna rada potrebno je pripaziti na predznak, dakle rad će se smatrati pozitivnim ako sila nešto pomiče, a u slučaju da se sila nečemu odupire rad će se smatrati negativnim. Komponenta sile  $\vec{F}^{II}(\vec{r})$  jednaka je horizontalnoj projekciji vektora sile  $\vec{F}(\vec{r})$  na pravac puta, te je vrijednost takve projekcije jednaka skalarnom produktu jediničnog vektora  $\vec{t}$  tangente na krivulju  $\widetilde{AB}$  u točki  $\vec{r}$  i vektora promatrane sile (slika 2.1.).

Infinitezimalni rad sile  $\vec{F}(\vec{r})$  pri beskrajno malom pomaku  $d\vec{r}$  po tangenti na krivulju puta zadan je formulom.

$$\begin{aligned} \overline{d\mathfrak{W}}(\vec{r}, d\vec{r}) &= [\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{t}] \|d\vec{r}\| = \left[ \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} \right] \|d\vec{r}\| = [\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}] \frac{\|d\vec{r}\|}{\|d\vec{r}\|} \\ &= \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (2.1.4.)$$

Na putu  $\widetilde{AB}$  rad dobijemo na način da integriramo prethodno prikazane infinitezimalne radove uzduž cijelog puta  $\widetilde{AB}$ . Rad na putu  $\widetilde{AB}$  prikazan je izrazom 2.1.5.

$$\mathfrak{W}_{\widetilde{AB}} = \int_{\widetilde{AB}} \overline{d\mathfrak{W}}(\vec{r}, d\vec{r}) = \int_{\widetilde{AB}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2.1.5.)$$

Put na kojem djeluje sila moguće je opisati parametarski zadanom lukom krivulje, te je njegov vektorski prikaz sljedeći.

$$\vec{r}: s \rightarrow \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}, \quad s \in [s_A, s_B] \quad (2.1.5.)$$

Pomoću vektora  $\vec{r}(s_A) = \vec{r}_A$  i  $\vec{r}(s_B) = \vec{r}_B$  definira se početna i krajnja točka puta, to jest definiraju se točke A i B. Kada točka koja je definirana vektorom  $\vec{r}(s)$  prolazi lukom  $\widetilde{AB}$  te raste od vrijednosti  $s_A$  do  $s_B$  onda ona određuje pozitivnu orijentaciju luka. Prikaz vektora je dan sljedećim izrazom (2.1.6.), te je njegova orijentacija jednaka orijentaciji luka, dakako ona određuje i tangentu na krivulju u točki  $\vec{r}(s)$ .

$$\vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j} + z'(s)\vec{k} \quad (2.1.6.)$$

Pa se tako infinitezimalni rad sile  $\vec{F}(\vec{r})$  na putu  $d\vec{r}$  prikazuje sljedećim izrazom;

$$\overline{d\mathfrak{W}}(s, ds) = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot d\vec{r}(s) = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot [\vec{r}'(s)ds] = [\vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s)]ds \quad (2.1.7.)$$

Prema tome rad sile  $\vec{F}$  na putu od točke A do točke B moguće je izračunati pomoću sljedećeg integrala;

$$\mathfrak{W}_{\overline{AB}} = \int_{s_A}^{s_B} [F_x(\vec{r}(s))x'(s) + F_y(\vec{r}(s))y'(s) + F_z(\vec{r}(s))z'(s)]ds \quad (2.1.8.)$$

U slučaju kada rad neke promatrane sile ne ovisi o putu na kojem ta sila vrši rad, već ovisi samo o položaju početne i krajnje točke, odnosno o položaju točaka A i B na slici 2.1., takvu silu nazivamo potencijalnom ili konzervativnom silom. Primjer konzervativne sile je primjerice gravitacijska sila, dok je sila trenja primjer nekonzervativne sile. Prema navedenom dokazujemo da je neka sila konzervativna ako je njen rad na nekoj zatvorenoj krivulji C jednak nuli, odnosno ako vrijedi sljedeće;

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.1.9.)$$

Kada na konstrukciju djeluju različita djelovanja, kao što su vanjske sile ili primjerice promjene temperature konstrukcija mijenja oblik. U takvim slučajevima vanjske sile rade na pomacima točaka u kojima djeluju, a unutarnje sile rade na beskonačno malim prirastima pridruženih polja pomaka. Govoreći o radu općenito koristit ćemo oznaku  $\mathfrak{W}$ , za rad vanjskih sila služimo se oznakom  $\mathfrak{B}$ , a za rad unutarnjih sila  $\mathfrak{U}$ .

Virtualni rad objasniti ćemo na matematičkom modelu koji je idealizirana slika dijela stvarnosti, odnosno dio stvarnosti je ishodište modela, dok sam model nije stvarnost.

Pomak na kojem neka stvarna sila vrši rad ne mora nužno biti stvaran, već ga je dovoljno samo zamisliti. Takav pomak naziva se virtualnim pomakom (virtualnan, odnosno prividan pomak), a rad stvarne sile na virtualnom pomaku naziva se virtualni rad. U slučaju kada zamišljena odnosno virtualna sila djeluje na stvarnom pomaku (stvaran pomak izazvan je stvarnim silama koje su neovisne o virtualnoj sili, primjerice temperaturne promjene), tada rad te virtualne sile na takvom stvarnom pomaku također nazivamo virtualnim radom.

Prilikom biranja virtualnih pomaka potrebno je pripaziti da zamišljeni pomaci ne naruše geometrijske odnose u konstrukciji, te se pretpostavlja da se vrijednosti stvarnih sila, tokom tih zamišljenih pomaka, ne mijenjaju i pravci na kojima te sile djeluju ostaju paralelni s pravcima na kojima su djelovale prije pomicanja.



Prikažemo li virtualni pomak hvatišta sile  $\vec{F}$  vektorom  $\delta\vec{u}$ , tada će virtualni rad te sile na tom pomaku biti jednak;

$$\delta\mathfrak{B} = \vec{F} \cdot \delta\vec{u} = F_x \delta u_x + F_y \delta u_y + F_z \delta u_z \quad (2.1.10.)$$

Zamišljeni pomaci točkaka konstrukcije u određenom smislu odgovaraju stvarnim pomacima, konstrukcija prilikom takvih pomaka ostaje cjelovita. Dakle, pomiču se hvatišta sile i susjedne točke, a promjenjeni oblik osi dijelova konstrukcije prikazuje se glatkim krivuljama, te se polje virtualnih pomaka opisuje diferencijalnim vektorskim ili skalarnim funkcijama vektorske ili skalarne vrijable prikaz je slijedeći;

$$\delta\vec{u}: \vec{r} \rightarrow \delta\vec{u}(\vec{r}), \quad \delta\vec{u}: s \rightarrow \delta\vec{u}(s), \quad \delta w: x \rightarrow \delta w(x), \quad (2.1.11.)$$

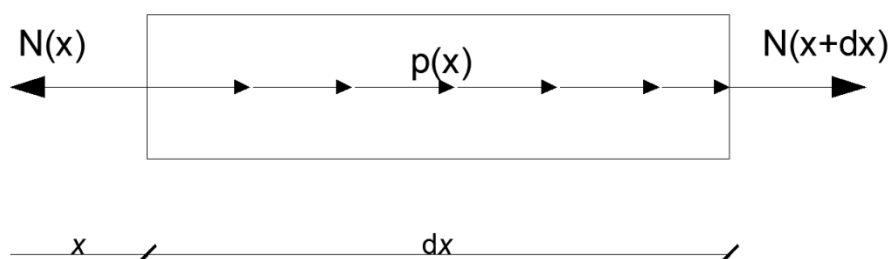
Moguće stanje pomaka je zapravo polje pomaka koje zadovoljava uvjete neprekinutosti i geometrijske rubne uvijete. Odnosno, za primjerice Bernoulli-Eulerovu gredu progibna linija tada ne smije imati lomove i skokove, te mora prolaziti kroz ležajne točke. Kratak podsjetnik, Bernoulli-Eulerova greda je model koji pokazuje ponašanje greda prilikom djelovanja aksijalnih sila i savijanja, dvije glavne pretpostavke ovog modela su da poprečni presjeci štapa ostaju ravni i okomiti na os štapa kao i prije deformacije (Bernoullieva hipoteza ravnih presjeka), te vrijedi da su deformirani kutevi na krajevima grede jednaki kutevima koje tangente na zakrivljenu os grede zatvaraju s osi  $x$ . Također vrijedi da poprečne sile rade na klizanju ravnina poprečnih presjeka.

Analogno tome, moguće stanje ravnoteže sustava je skup reakcija i unutarnjih sila koje su u ravnoteži sa zadanim vanjskim i unutarnjim silama.

## 2.2. Teorem o virtualnim pomacima

Prilikom objašnjenja teorema o virtualnim pomacima ograničit ćemo se na analizu ravne grede koja se nalazi u ravnini  $xz$ . Os  $x$  se poklapa s osi grede, jedan kraj grede nalazi se u ishodištu koordinatnog sustava, dok se drugi kraj nalazi na osi apscise u točki  $l$ , dakle dužina promatrane grede bi će  $l$ . Ležajevi se nalaze u krajnjim točkama grede.

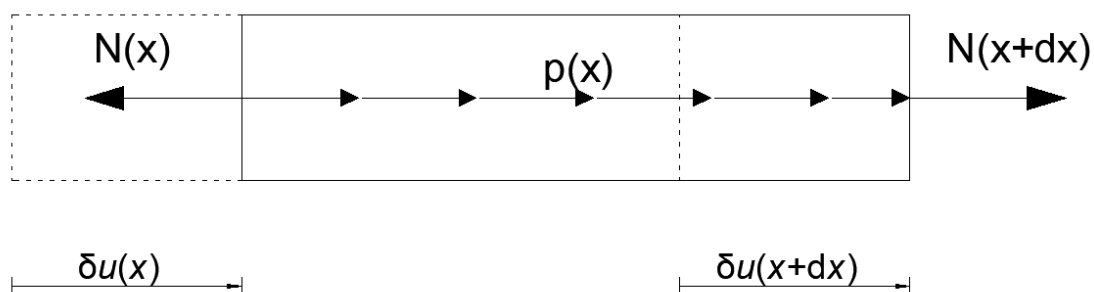
Uzdužna i poprečna djelovanja na gredu analiziraju se razdvojeno pošto su ona u okvirima linearne teorije međusobno neovisna.



Slika 2.2. Infinitesimalni odsječak između poprečnih presjeka kroz točke  $x$  i  $x+dx$

Na slici 2.2. prikazan je odsječak grede između točaka  $x$  i  $x+dx$ , na tom dijelu grede po pravcu osi grede djeluje distribuirana sila  $\vec{p}$ , uzdužna sila u presjeku  $x$  djeluje u suprotnom smjeru pa je negativnog predznaka  $-\vec{N}(x)$ , dok u presjeku  $x+dx$  djeluje uzdužna sila  $\vec{N}(x+dx)$ . Polje uzdužnih virtualnih pomaka grede prikazano je funkcijom (2.2.1.) te su orijentirane duljine pomaka krajeva promatranog dijela grede  $\delta u(x)$  i  $\delta u(x+dx)$  prikazane na slici 2.3.

|   |          |
|---|----------|
| $\delta \vec{u}: x \rightarrow \delta \vec{u}(x) = \delta u(x) \vec{i}$ | (2.2.1.) |
|---|----------|



Slika 2.3. Orijentirane duljine pomaka promatranog dijela grede

Vrijednost distribuirane sile  $\vec{p}$  ne mijenja se duž promatranog dijela grede i jednaka je vrijednosti  $p(x)$  u točki  $x$ , odnosno jednaka je vrijednosti rezultante pripadnog dijela sile  $p(x)dx$  koja djeluje u točki  $x$ , te vrši infinitezimalni virtualni rad čija vrijednost je prikazana sljedećom formulom.

|                       |          |
|-----------------------|----------|
| $[p(x)dx]\delta u(x)$ | (2.2.2.) |
|-----------------------|----------|

Pa se radovi uzdužnih sila na virtualnim pomacma krajeva odsječka prikazuju sljedećim izrazima:

|   |          |
|---|----------|
| $-N(x)\delta u(x) \quad \text{i} \quad N(x + dx)\delta u(x + dx)$ | (2.2.3.) |
|---|----------|

Prvi izraz ima negativan predznak jer je vidljivo iz slike 2.3. da se sila na koja djeluje na lijevom kraju suprotstavlja pozitivnom pomaku.

Prikažemo li infinitezimalne pomake  $\Delta N$  i  $\Delta \delta u$  od funkcija  $N$  i  $\delta u$  diferencijalnim  $dN$  i  $d\delta u$  dobivamo:

|   |          |
|---|----------|
| $N(x + dx) = N(x) + \Delta N(x, dx) \cong N(x) + dN(x, dx) = N(x) + N'(x)dx$  | (2.2.4.) |
| $\delta u(x + dx) = \delta u(x) + \Delta \delta u(x, dx) \cong \delta u(x) + d\delta u(x, dx) = \delta u(x) + \delta u'(x)dx$ |          |

Prikaz rada na desnom kraju odsječka grede prikazanog na slici 2.3. je sljedeći:

|  |          |
|--|----------|
| $N(x + dx)\delta u(x + dx) \cong [N(x) + N'(x)dx][\delta u(x) + \delta u'(x)dx]$ | (2.2.5.) |
|--|----------|

Nakon sređivanja desne strane prethodog izraza i uzimajući u obzir da je  $N'(x)\delta u'(x)(dx)^2$  neizmjereno mala veličina vrijedi sljedeće:

|   |          |
|---|----------|
| $N(x + dx)\delta u(x + dx) \cong N(x)\delta u(x) + N(x)[\delta u'(x)dx] + [N'(x)dx]\delta u(x)$ | (2.2.6.) |
|---|----------|

Dakle, pri infinitezimalnom rastu varijable  $x$  za  $dx$  od desnog kraja predhodnog do desnog kraja promatranog dijela grede virtualni rad koji vrši uzdužna sila se povećava za zbroj infinitezimalnog rada sile. Zbroj radova uzdužnih sila na virtualnim pomacima krajeva odsječaka promatrane grede prikazan je izrazom 2.2.7.

|  |          |
|--|----------|
| $-N(x)\delta u(x) + N(x + dx)\delta u(x + dx) \cong N(x)[\delta u'(x)dx] + [N'(x)dx]\delta u(x)$ | (2.2.7.) |
|--|----------|

Na promatranom dijelu grede uz uzdužne sile djeluje i sila  $\vec{p}$ , pa se prema tome izrazu 2.2.7. pribroji izraz 2.2.2., te dobivamo slijedeće.

$$\begin{aligned} -N(x)\delta u(x) + N(x+dx)\delta u(x+dx) + [p(x)dx]\delta u(x) \\ \cong N(x)\delta u'(x)dx + [N'(x) + p(x)]dx\delta u(x) \end{aligned} \quad (2.2.8.)$$

U slučaju kada je prije virtualnog pomaka promatrani dio grede bio u ravnoteži, sile koje su djelovale na njega zadovoljavale su diferencijalnu jednadžbu ravnoteže.

$$N'(x) + p(x) = 0 \quad (2.2.9.)$$

Pošto se prema ranije postavljenim pretpostavkama sile i njihovi geometrijski odnosi pomicanjem nisu mjenjali, odnosno ostaju u ravnoteži izraz 2.2.8. poprima oblik.

$$-N(x)\delta u(x) + N(x+dx)\delta u(x+dx) + p(x)\delta u(x)dx \cong N(x)\delta u'(x)dx \quad (2.2.10.)$$

U izrazu 2.2.10. na desnoj strani znaka  $\cong$  definiran je infinitezimalni rad uzdužne sile na infinitezimalnom prirastu polja uzdužnih virtualnih pomaka.

$$d\delta\mathcal{U}_N(x, dx) = N(x)d\delta u(x, dx) = N(x)[\delta u'(x)dx] = N(x)[\delta\varepsilon(x)dx] \quad (2.2.11.)$$

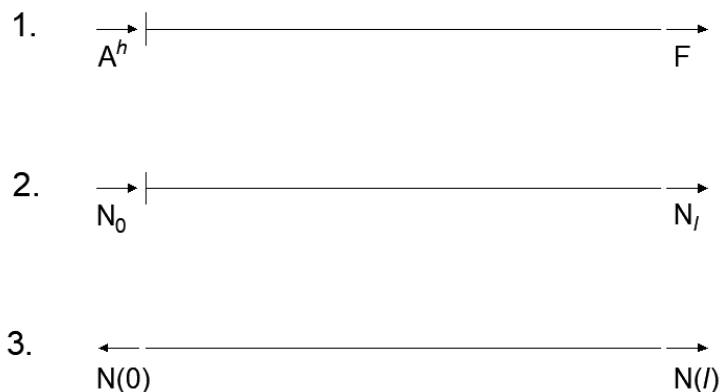
Rad  $d\delta\mathcal{U}_N(x, dx)$  predstavlja rad koji preostaje kada se zbroje radovi svih sila koje djeluju na infinitezimalni odsječak. Pošto je promatrana greda sastavljena od beskonačno mnogo infinitezimalnih dijelova a za svaki od njih moguće je napisati izraz jednak izrazu 2.2.10. , te zbrajanjem tih izraza za sve infinitezimalne dijelove dobije se slijedeći izraz.

$$-N(0)\delta u(0) + N(l)\delta u(l) + \int_0^l p(x)\delta u(x)dx = \int_0^l N(x)\delta u'(x)dx \quad (2.2.12.)$$

Na lijevoj strani izraza nalaze se samo izrazi za radove sila u ravninama krajnjih presjeka iz razloga jer se sve ostale sile koje djeluju na pojedinim infinitezimalnim dijelovima grede poništavaju jer je zapravo riječ o istom poprečnom presjeku na kojem sile istog intenziteta djeluju u suprotnim smjerovima. Sile koje djeluju na krajnjim presjecima su vanjske sile, poput reakcija ili sila koje su zadane kao opterećenje (prikaz na slici 2.4. slučaj 1.). Za vanjske sile uvodimo slijedeće oznake  $\vec{N}_0$  i  $\vec{N}_l$  kako bi vrijedile iduće jednakosti.

$$N(0) = -N_0 \quad N(l) = N_l \quad (2.2.13.)$$

U slučaju lijevo prikazane jednakosti postoji negativan predznak zbog različitih orijentacija vanjskih i unutarnjih sila (prikaz na slici 2.4., slučajevi 2. i 3.).



Slika 2.4. Prikaz vanjskih sila koje djeluju na promatrani dio grede

U ovom slučaju jednačba (2.2.12.) sada prikazuje jednakost virtualnih radova vanjskih i unutarnjih sila, te poprma slijedeći oblik:

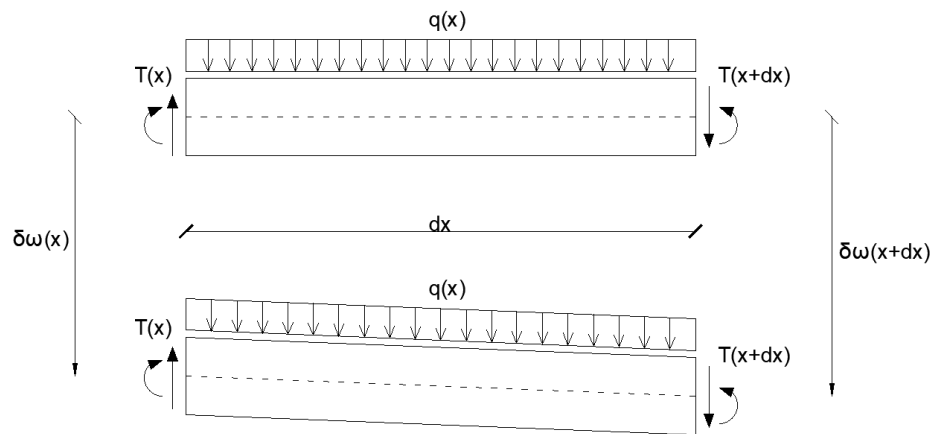
$$N_0 \delta u(0) + N_l \delta u(l) + \int_0^l p(x) \delta u(x) dx = \int_0^l N(x) \delta u'(x) dx \quad (2.2.14.)$$

Lijeva strana jednačbe prikazuje rad vanjskih sila, dok desna strana jednačbe prikazuje virtualni rad uzdužnih sila.

$$\delta \mathcal{U}_N = \int_0^l N(x) \delta u'(x) dx = \int_0^l N(x) \delta \mathcal{E}(x) dx \quad (2.2.15.)$$

Prilikom djelovanja distribuirane sile okomito na os promatrne grede logično je da se u poprečnim presjecima javljaju poprečne sile i momenti savijanja. Polje virtualnih pomaka koji su okomiti na os promatrane grede opisano je funkcijom 2.2.16. Duljine pomaka na krajevima promatrane grede te njihove orijentacije prikazane su na slici 2.5.

$$\delta \vec{\omega}: x \rightarrow \delta \vec{\omega}(x) = \delta \omega(x) \vec{k} \quad (2.2.16.)$$



Slika 2.5. Prikaz orijentiranih duljina virtualnih pomaka okomitih na os grede

Duljine pomaka promatranog presjeka označavat ćemo s  $\delta\omega(x)$  i  $\delta\omega(x + dx)$ , te je prikazano na slici 2.5. da duž promatranog presjeka djeluje okomito na njegovu os kontinuirano opterećenje  $\vec{q}$  koje je konstantnog iznosa  $q(x)$ . Također, u presjecima djeluju rezne sile suprotnih smjerova  $-\vec{T}(x)$  i  $\vec{T}(x + dx)$  kao što je prikazano na slici 2.5. Uvedemo li rezne sile u formulu za virtualni rad dobivamo sljedeći izraz.

|   |           |
|---|-----------|
| $-T(x)\delta\omega(x) + T(x + dx)\delta\omega(x + dx) + [q(x)dx]\delta\omega(x)$ $\approx T(x)\delta\omega'(x)dx + [T'(x) + q(x)]dx\delta\omega(x)$ | (2.2.17.) |
|---|-----------|

Uz uvjet da sile zadovoljavaju sljedeći izraz;

|                    |           |
|--------------------|-----------|
| $T'(x) + q(x) = 0$ | (2.2.18.) |
|--------------------|-----------|

Jednadžba 2.2.17. poprima sljedeći oblik;

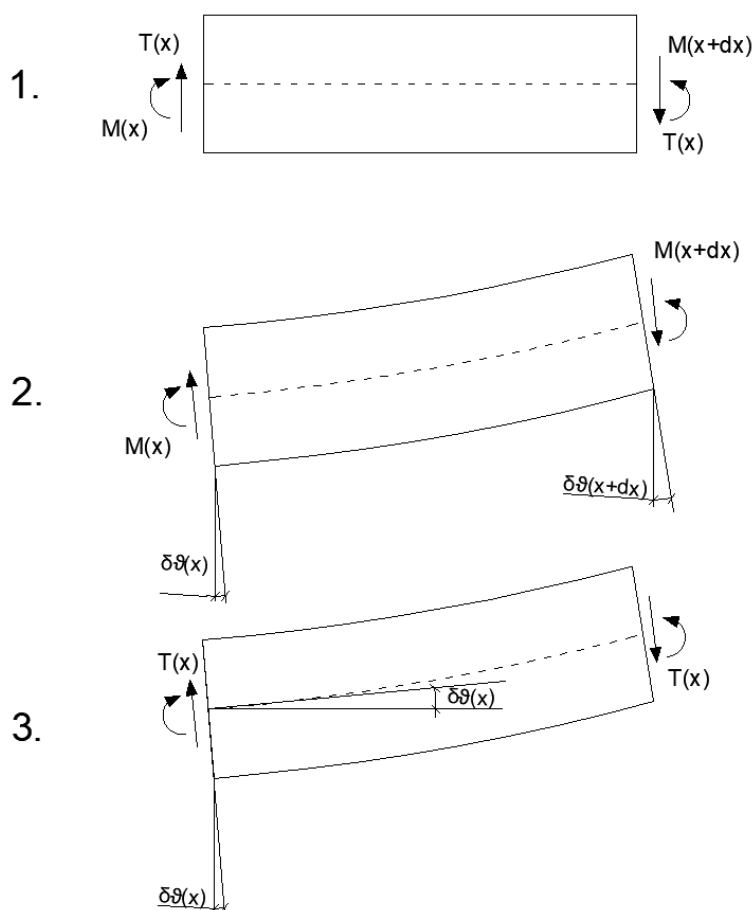
|   |           |
|---|-----------|
| $-T(x)\delta\omega(x) + T(x + dx)\delta\omega(x + dx) + q(x)\delta\omega(x)dx \approx T(x)\delta\omega'(x)dx$ | (2.2.19.) |
|---|-----------|

Te ćemo uvesti da je polje kutova virtualnih zaokreta ravnina poprečnih presjeka zadano slijedećom funkcijom;

|   |           |
|---|-----------|
| $\delta\vartheta: x \rightarrow \delta\vartheta(x)$ | (2.2.20.) |
|---|-----------|

Utjecaj distribuirane sile i prirasta poprečne sile ne utječe na momentnu ravnotežu, to jest njihov utjecaj je zanemariv. Kada se na promatrani dio grede nanose momenti  $-\vec{M}(x)$  i  $\vec{M}(x + dx)$ , te u presjecima djeluju još i poprečne sile koje su suprotnih predznaka  $\pm\vec{T}(x)$  kao što je prikazano na slici 2.6., spomenuti momenti uzrokuju zaokrete poprečnih presjeka, a kutove tih zaokreta označujemo sa  $\delta\vartheta(x)$  i  $\delta\vartheta(x + dx)$ , dok poprečne sile tvore spreg sila koji ima negativan smjer vrtnje i intenzitet iznosa  $|T(x)|dx$ . Rad poprečnih sila jednak je;

|   |           |
|---|-----------|
| $-[T(x)dx]\delta\vartheta(x) = -T(x)\delta\vartheta(x)dx$ | (2.2.21.) |
|---|-----------|



Slika 2.6. Zaokreti ravnina poprečnih presjeka

Sada infinitezimalni virtualni rad momenata na promatranom dijelu grede prikazujemo sljedećim izrazom;

$$\begin{aligned} -M(x)\delta\vartheta(x) + M(x+dx)\delta\vartheta(x+dx) - T(x)\delta\vartheta(x)dx \\ \cong M(x)\delta\vartheta'(x)dx + [M'(x) - T(x)]dx\delta\vartheta(x) \end{aligned} \quad (2.2.22.)$$

Uz uvjet da momenti i poprečne sile zadovoljavaju sljedeći izraz;

$$M'(x) - T(x) = 0 \quad (2.2.23.)$$

Izraz 2.2.22. poprima oblik;

$$-M(x)\delta\vartheta(x) + M(x+dx)\delta\vartheta(x+dx) - T(x)\delta\vartheta(x)dx \cong M(x)\delta\vartheta'(x)dx \quad (2.2.24.)$$

Uređivanjem izraza 2.2.24. i pribrajanjem mu izraza 2.2.19. dobivamo oblik čija desna strana je jednaka infinitezimalnom radu momenata savijanja na infinitezimalnom prirastu polja virtualnih zaokreta ravnina poprečnih presjeka.

$$\begin{aligned} -M(x)\delta\vartheta(x) + M(x+dx)\delta\vartheta(x+dx) - T(x)\delta\omega(x) + T(x+dx)\delta\omega(x+dx) \\ + q(x)\delta\omega(x)dx \cong M(x)\delta\vartheta'(x)dx + T(x)[\delta\vartheta(x) + \delta\omega'(x)]dx \end{aligned} \quad (2.2.25.)$$

$$d\delta\mathcal{U}_M(x, dx) = M(x)d\delta\vartheta(x, dx) = M(x)[\delta\vartheta'(x)dx] \quad (2.2.26.)$$

Prema teoriji savijanja Bernoulli-Eulera ravnine poprečnih presjeka imaju kutove zaokreta jednake kutovima koji s osi  $x$  zatvaraju tangente postavljene na os grede, odnosno  $\delta\vartheta = \delta\varphi$ . Nadalje;  $\delta\varphi = -\delta\omega'$ , odnosno  $\delta\vartheta' = -\delta\omega'' = \delta\kappa$ , pa dobivamo;

$$d\delta\mathcal{U}_M(x, dx) = M(x)d\delta\varphi(x, dx) = M(x)[\delta\kappa(x)dx] \quad (2.2.27.)$$

Ako vrijedi da je  $\delta\vartheta = \delta\varphi = -\delta\omega'$  dobivamo

$$T(x)[\delta\vartheta(x) + \delta\omega'(x)]dx = 0 \quad (2.2.28.)$$

Izraz 2.2.28. dokazuje da su poprečne sile, koje bi trebale uzrokovati klizanja ravnina poprečnih presjeka jednake nuli, odnosno ne postoje (druga pretpostavka Bernoulli-Eulerove teorije). Prema Timošenku kut zaokreta koji zatvaraju normale na promatranu ravninu jednak



je zbroju kuta zaokreta tangente na os promatrane grede i kutu otklanjanja do kojeg dolazi zbog klizanja promatrane ravnine. Dakle, vrijedi;

$$\delta\vartheta = \delta\varphi + \delta\gamma = -\delta\omega' + \delta\gamma \quad \text{i} \quad \delta\vartheta + \delta\omega' = \delta\gamma \quad (2.2.29.)$$

Pa je sada infinitezimalni rad poprečne sile na infinitezimalnom prirastu polja virtualnih klizanja ravnina jednak slijedećem izrazu.

$$d\delta\mathcal{U}_T(x, dx) = T(x)[\delta\gamma(x)dx] \quad (2.2.30.)$$

Za virtualni rad na promatranom odsječku virtualne Bernoulli-Eulerove grede vrijedi slijedeće;

$$-M(x)\delta\varphi(x) + M(x+dx)\delta\varphi(x+dx) - T(x)\delta\omega(x) + T(x+dx)\delta\omega(x+dx) + q(x)\delta\omega(x)dx \cong M(x)\delta\kappa(x)dx \quad (2.2.31.)$$

Dok virtualni rad na Timošenkovoj gredi ima slijedeći izraz

$$-M(x)\delta\vartheta(x) + M(x+dx)\delta\vartheta(x+dx) - T(x)\delta\omega(x) + T(x+dx)\delta\omega(x+dx) + q(x)\delta\omega(x)dx \cong M(x)\delta\vartheta'(x)dx + T(x)\gamma(x)dx \quad (2.2.32)$$

Kada se promatrana greda podijeli na beskonačn mnogo infinitezimalnih dijelova svaki od njih moguće je opisati izrazima 2.2.31. i 2.2.32. Zbrajanjem dva susjedna elementa ponište se izrazi za rad na uzdužnim virtualnim pomacima, izrazi za rad momenata i izrazi za rad poprečnih sila u ravnini zajedničkog poprečnog presjeka. Iz navedenog dobivamo slijedeće za Bernoulli-Eulerovu gredu;

$$M_0\delta\varphi(0) + M_l\delta\varphi(l) + T_0\delta\omega(0) + T_l\delta\omega(l) + \int_0^l q(x)\delta\omega(x)dx = \int_0^l M(x)\delta\kappa(x)dx \quad (2.2.33.)$$

Za Timošenkovu gredu;

$$M_0\delta\vartheta(0) + M_l\delta\vartheta(l) + T_0\delta\omega(0) + T_l\delta\omega(l) + \int_0^l q(x)\delta\omega(x)dx = \int_0^l [M(x)\delta\vartheta'(x) + T(x)\delta\gamma(x)]dx \quad (2.2.34.)$$

Vrijednosti vanjskih sila na kraju prvog i početku zadnjeg odsječka označavaju se sa  $T_0, T_l, M_0$  i  $M_l$ .

Za Bernoulli-Eulerovu gredu virtualni rad momenata savijanja je prikazan kao;

$$\delta \mathcal{U}_M = \int_0^l M(x) \delta \vartheta'(x) dx \quad (2.2.35.)$$

$$\delta \mathcal{U}_M = \int_0^l M(x) \delta \kappa(x) dx \quad (2.2.36.)$$

Virtualni rad poprečnih sila prema Timošenkovoj teoriji je onda;

$$\delta \mathcal{U}_T = \int_0^l T(x) \delta \gamma(x) dx \quad (2.2.37.)$$

Kada na neku gredu djeluju sile uzduž osi te grede i sile okomito na os grede za Bernoulli-Eulerovu gredu vrijedi;

$$\begin{aligned} N_0 \delta u(0) + N_l \delta u(l) + T_0 \delta \omega(0) + T_l \delta \omega(l) + M_0 \delta \varphi(0) + M_l \delta \varphi(l) \\ + \int_0^l [p(x) \delta u(x) + q(x) \delta \omega(x)] dx \\ = \int_0^l [N(x) \delta \varepsilon(x) + M(x) \delta \kappa(x)] dx \end{aligned} \quad (2.2.38.)$$

Dok isti izraz na Timošenkovoj gredi ima oblik;

$$\begin{aligned} N_0 \delta u(0) + N_l \delta u(l) + T_0 \delta \omega(0) + T_l \delta \omega(l) + M_0 \delta \vartheta(0) + M_l \delta \vartheta(l) \\ + \int_0^l [p(x) \delta u(x) + q(x) \delta \omega(x)] dx \\ = \int_0^l [N(x) \delta \varepsilon(x) + T(x) \delta \gamma(x) + M(x) \delta \vartheta'(x)] dx \end{aligned} \quad (2.2.39.)$$

Pomoću jednadži 2.2.38. i 2.2.39. došli smo do dokaza za prvi dio teorema o virtualnim pomacima. Teorem o virtualnim pomacima govori da za slučaj kada na konstrukciju djeluju vanjska opterećenja, te se konstrukcija u takvim uvjetima nalazi u stanju ravnoteže tada je rad stvarnih vanjskih sila na odabranim poljima virtualnih pomaka jednak radu stvarnih unutarnjih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja.

Prema Timošenku biraju se polja virtualnih translacijskih pomaka koje označavamo s  $\delta u$  i  $\delta \omega$  i polje virtualnih zaokreta poprečnih presjeka koje se opisuje poljem kutova zaokreta  $\delta \vartheta$ . Dok su prema Bernoulli-Euleru kutovi zaokreta poprečnih ravnina jednaki kutovima nagiba tangenti na liniju progiba, što je i vidljivo iz slike 2.6., dakle vrijedi da je  $\delta \vartheta = \delta \varphi$  i ti

kutevi određeni su iz polja vrijednosti poprečnih pomaka pomoću izraza  $\delta\varphi = -\delta\omega'$ , pa se odabiru polja virtualnih tranlacijskih pomaka  $\delta u$  i  $\delta\omega$ . Sada vrijedi sljedeći izraz;

|   |           |
|---|-----------|
| $\delta\mathfrak{B} = \delta\mathfrak{U}$ | (2.2.40.) |
|---|-----------|

Sljedeće diferencijalne jednačbe moraju biti zadovoljene za vanjske i unutarnje sile, ako se promatra beskonačno mali element grede koji se nalazi u ravnoteži.

|  |           |
|--|-----------|
| $N'(x) + p(x) = 0 \quad / \cdot \delta u(x) dx$ $T'(x) + q(x) = 0 \quad / \cdot \delta\omega(x) dx$ $M'(x) - T(x) = 0 \quad / \cdot \delta\vartheta(x) dx$ | (2.2.41.) |
|--|-----------|

|  |           |
|--|-----------|
| $N'(x)\delta u(x) dx + p(x)\delta u(x) dx = 0$ $T'(x)\delta\omega(x) dx + q(x)\delta\omega(x) dx = 0$ $M'(x)\delta\vartheta(x) dx - T(x)\delta\vartheta(x) dx = 0$ | (2.2.42.) |
|--|-----------|

Izrazi 2.2.42. se integriraju po duljini grede te se zatim zbrajaju i dobiva se sljedeći izraz.

|  |           |
|--|-----------|
| $\int_0^l N'(x)\delta u(x) dx + \int_0^l T'(x)\delta\omega(x) dx + \int_0^l M'(x)\delta\vartheta(x) dx - \int_0^l T(x)\delta\vartheta(x) dx +$ $\int_0^l [p(x)\delta u(x) + q(x)\delta\omega(x)] dx = 0$ | (2.2.43.) |
|--|-----------|

Uz parcijalnu integraciju i primjenu osnovnog teorema integralnog računa dobivamo;

|   |           |
|---|-----------|
| $\int_0^l N'(x)\delta u(x) dx = N(l)\delta u(l) - N(0)\delta u(0) - \int_0^l N(x)\delta u'(x) dx$ $\int_0^l T'(x)\delta\omega(x) dx = T(l)\delta\omega(l) - T(0)\delta\omega(0) - \int_0^l T(x)\delta\omega'(x) dx$ $\int_0^l M'(x)\delta\vartheta(x) dx = M(l)\delta\vartheta(l) - M(0)\delta\vartheta(0) - \int_0^l M(x)\delta\vartheta'(x) dx$ | (2.2.44.) |
|---|-----------|

Ako se vratimo na izraz 2.2.7. vidimo da je izraz  $N(x + dx)\delta u(x + dx)$  zapravo prirast funkcije  $N\delta u$  prilikom rasta varijable  $x$  za iznos  $dx$ . Takav prirast može se prikazati pomoću diferencijala;

|  |           |
|--|-----------|
| $-N(x)\delta u(x) + N(x + dx)\delta u(x + dx) \approx [N(x)\delta u(x)]' dx$ | (2.2.45.) |
|--|-----------|

Iz izraza 2.2.44. i 2.2.45. dobivamo;

$$-N(0)\delta u(x) + N(l)\delta u(l) \approx \int_0^l [N(x)\delta u(x)]' dx \quad (2.2.46.)$$

Usporedbom izraza 2.2.7. i 2.2.45. dolazimo do izraza 2.2.47. i 2.2.48., te iz posljednjeg dolazimo do izraza za parcijalnu integraciju.

$$[N(x)\delta u(x)]' dx \approx N(x)[\delta u'(x)dx] + [N'(x)dx]\delta u(x) \quad (2.2.47.)$$

$$\int_0^l [N(x)\delta u(x)]' dx = \int_0^l N(x)\delta u'(x) dx + \int_0^l N'(x)\delta u(x) dx \quad (2.2.48.)$$

Ako iz izraza 2.2.44. uvrstimo desne strane u izraz 2.2.43. te uvedemo izraze  $N(l) = N_l$ ,  $N(0) = -N_0$  i tome slično i sredimo jednadžbu, dobivamo sljedeće;

$$\begin{aligned} & N_0\delta u(0) + N_l\delta u(l) + T_0\delta\omega(0) + T_l\delta\omega(l) + M_0\delta\vartheta(0) + M_l\delta\vartheta(l) \\ & + \int_0^l [p(x)\delta u(x) + q(x)\delta\omega(x)] dx \\ & = \int_0^l \{N(x)\delta u'(x) + T(x)[\delta\vartheta(x) + \delta\omega'(x)] + M(x)\delta\vartheta'(x)\} dx \end{aligned} \quad (2.2.49.)$$

Kada se u izraz 2.2.49. uvrsti  $\delta u' = \delta\varepsilon$  i  $\delta\vartheta + \delta\omega' = \delta\gamma$  dolazimo do izraza 2.2.39., a uvrštavanjem izraza  $\delta u' = \delta\varepsilon$ ,  $\delta\vartheta = -\delta\omega' = \delta\varphi$  i  $\delta\vartheta' = \delta\kappa$  dobivamo izraz 2.2.38.

Promatrajući Bernoulli-Eulerovu gredu i njeno savijanje moguće je dokazati prvi dio teorema o virtualnim pomacima na sljedeći način.

$$M''(x) + q(x) = 0 \quad (2.2.50.)$$

Izraz 2.2.50. pomnožimo sa  $\delta\omega(x)dx$  i integriramo dobiveni izraz po cijeloj duljini grede

$$\int_0^l M''(x)\delta\omega(x)dx + \int_0^l q(x)\delta\omega(x)dx = 0 \quad (2.2.51.)$$

Parcijalno deriviramo izraz  $\int_0^l M''(x)\delta\omega(x)dx$  te dobivamo;

$$\int_0^l M''(x)\delta\omega(x)dx = M'(x)\delta\omega(x) \Big|_0^l - \int_0^l M'(x)\delta\omega'(x)dx \quad (2.2.52.)$$

Zatim izraz  $\int_0^l M'(x)\delta\omega'(x)dx$  još jednom parcijalno integriramo

$$\int_0^l M'(x)\delta\omega'(x)dx = M(x)\delta\omega'(x) \Big|_0^l - \int_0^l M(x)\delta\omega''(x)dx \quad (2.2.53.)$$

Ako vrijedi da je  $M'(x) = T(x)$ ,  $\delta\omega'(x) = -\delta\varphi(x)$  i  $\delta\omega''(x) = -\delta\kappa(x)$  dobivamo;

$$\int_0^l M''(x)\delta\omega(x)dx = T(l)\delta\omega(l) - T(0)\delta\omega(0) + M(l)\delta\varphi(l) - M(0)\delta\varphi(0) - \int_0^l M(x)\delta\kappa(x)dx \quad (2.2.54.)$$

Finalno;

$$\begin{aligned} T(l)\delta\omega(l) - T(0)\delta\omega(0) + M(l)\delta\varphi(l) - M(0)\delta\varphi(0) + \int_0^l q(x)\delta\omega(x)dx \\ = \int_0^l M(x)\delta\kappa(x)dx \end{aligned} \quad (2.2.55.)$$

Dakle, da bi se dokazao prvi dio teorema o virtualnim pomacima uvjet je da se sustav nalazi u stanju ravnoteže, a kao njegov dokaz dobivamo jednakost virtualnih radova. Odnosno, izraz 2.2.40. je zadovoljen ako reakcije i rezne sile uravnotežuju opterećenje koje je naneseno na zadani sustav uz nasumično odabrana polja virtualnih pomaka.

Drugi dio teorema o virtualnim pomacima je zapravo obrat prvog dijela. Drugi dio glasi; vanjske sile koje djeluju na neki sistem su u ravnoteži s reznim silama ako je rad stvarnih vanjskih sila na svim poljima virtualnih pomaka jednak radu stvarnih reznih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja.

Da bi dokazali drugi dio teorema o virtualnim pomcima potrebno je iz jednadžbe rada koja se nalazi u integralnom obliku dobiti diferencijalne jednadžbe ravnoteže.

Kada pomoću izraza 2.2.7. infinitezimalne odsječke neke promatrane grede zbrojimo dobivamo slijedeće.

$$-N(0)\delta u(0) + N(l)\delta u(l) = \int_0^l N(x)\delta u'(x)dx + \int_0^l N'(x)\delta u(x)dx \quad (2.2.56.)$$

Sređivanjem dobivamo;

$$\int_0^l N(x)\delta u'(x)dx = -N(0)\delta u(0) + N(l)\delta u(l) - \int_0^l N'(x)\delta u(x)dx \quad (2.2.57.)$$

Na lijevoj strani izraza 2.2.57. pomoću integrala  $\int_0^l N(x)\delta u'(x)dx$  dobivamo virtualni rad koji uzrokuju uzdužne sile. Vraćajući se na izraz 2.2.14. i zamjenom  $\int_0^l N(x)\delta u'(x)dx$  s izrazom 2.2.57. dobivamo.

$$\begin{aligned} N_0\delta u(0) + N_l\delta u(l) + \int_0^l p(x)\delta u(x)dx \\ = -N(0)\delta u(0) + N(l)\delta u(l) - \int_0^l N'(x)\delta u(x)dx \end{aligned} \quad (2.2.58.)$$

Sređivanjem izraza 2.2.58. dobivamo;

$$[N(0) + N_0]\delta u(0) + [-N(l) + N_l]\delta u(l) + \int_0^l [N'(x) + p(x)]\delta u(x)dx = 0 \quad (2.2.59.)$$

Pribojcnici iz izraza 2.2.59. imaju mogućnost mijenjanja svojih vrijednosti pa slijedi;

$$\begin{aligned} [N(0) + N_0]\delta u(0) &= 0 & \forall \delta u(0) \\ [-N(l) + N_l]\delta u(l) &= 0 & \forall \delta u(l) \\ \int_0^l [N'(s) + p(x)]\delta u(x)dx &= 0 & \forall \delta u \end{aligned} \quad (2.2.60.)$$

Pošto su  $N(0), N(l), N_0, N_l, \delta u(0)$  i  $\delta u(l)$  skalarne veličine prva dva uvjeta imaju oblik

$$ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.2.61.)$$

Izraz 2.2.61. je ostvariv u slučaju kada je  $a = 0$  odnosno

$$N(0) + N_0 = 0 \quad \text{i} \quad -N(l) + N_l = 0 \quad (2.2.62.)$$

Nadalje iz izraza

$$\int_0^l [N'(x) + p(x)] \delta u(x)dx = 0 \quad \forall \delta u \quad (2.2.63.)$$

Slijedi;

$$N'(x) + p(x) = 0 \quad \text{za} \quad x \in (0, l) \quad (2.2.64.)$$

U izrazu 2.2.63. umjesto funkcije  $[N'(x) + p(x)]\delta u(x)$  moguće je pisati općeniti izraz  $f(x)\delta(x)$ , te pretpostaviti slijedeći izraz vrijedi za sve funkcije  $\delta$ .

$$\int_0^l f(x)\delta(x)dx = 0 \quad (2.2.65.)$$

Ako vrijedi za sve funkcije  $\delta$  onda vrijedi i za općenitu funkciju  $\delta(x) = f(x)$

$$\int_0^l f^2(x)dx = 0 \quad (2.2.66.)$$

Kako je poznato da za izraz  $f^2(x) \geq 0$  i uz poznatu činjenicu da je vrijednost integral jednaka površini ispod grafa promatrane funkcije vrijedi da je vrijednost izraza 2.2.66. jednaka nuli samo u slučaju kada je  $f = 0$ . U slučaju kada je  $f = N' + p$  i  $\delta = \delta u$  vrijedi da iz izraza 2.2.63. dobivamo izraz 2.2.64. Odnosno, daljnim promatranjem dolazi se do tvrdnje da sustav sila koje djeluju na svim poljima virtualnih pomaka zadovoljava jednakost virtualnih radova vanjskih i reznih sila koja je dana izrazom 2.2.14., također zadovoljava izraz 2.2.64., te zadovoljava sljedeće rubne uvjete.

$$N(0) = -N_0 \quad \text{i} \quad N(l) = -N_l \quad (2.2.67.)$$

Kada dokazujemo drugi dio teorema o virtualnim pomacima na Timošenkovoj gredi vraćamo se na izraz 2.2.34. U navedenom izrazu na desnoj strani nalazi se integral zbroja koji ćemo sad prikazati pomoću izraza  $\delta\gamma = \delta\vartheta + \delta\omega'$ .

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{T(x)[\delta\vartheta(x) + \delta\omega'(x)] + M(x)\delta\vartheta'(x)\}dx \\ &= \int_0^l T(x)\delta\vartheta(x)dx \\ &+ \int_0^l T(x)\delta\omega'(x)dx + \int_0^l M(x)\delta\vartheta'(x)dx \end{aligned} \quad (2.2.68.)$$

U slučaju Bernoulli-Eulerove grede koristimo se izrazom  $\delta\vartheta + \delta\omega' = 0$  pa vrijedi slijedeće;

|  |           |
|--|-----------|
| $\int_0^l T(x)[\delta\vartheta(x) + \delta\omega'(x)]dx = 0$ | (2.2.69.) |
|--|-----------|

Kada izraz, odnosno integral iz izraza 2.2.69. pribrojimo desnom dijelu izraza 2.2.33. uz jednakost  $\delta\kappa = \delta\vartheta'$ , tada je izraz 2.2.33. moguće prikazati na sličan način.

Integrale koji sadrže derivacije polja virtualnih radova prikazujemo kao;

|   |           |
|---|-----------|
| $\int_0^l T(x)\delta\omega'(x)dx = T(l)\omega(l) - T(0)\delta\omega(0) - \int_0^l T'(x)\delta\omega(x)dx$             | (2.2.70.) |
| $\int_0^l M(x)\delta\vartheta'(x)dx = M(l)\vartheta(l) - M(0)\delta\vartheta(0) - \int_0^l M'(x)\delta\vartheta(x)dx$ |           |

Izraze 2.2.70. uvrstimo na desnu stranu izraza 2.2.33. ili 2.2.34. i nakon sređivanja dobivamo;

|   |           |
|---|-----------|
| $[T(0) + T_0]\delta\omega(0) + [-T(l) + T_l]\delta\omega(l) + [M(0) + M_0]\delta\vartheta(0)$ | (2.2.71.) |
| $+ [-M(l) + M_l]\delta\vartheta(l) + \int_0^l [T'(x) + q(x)]\delta\omega(x) dx$               |           |
| $+ \int_0^l [M'(x) - T(x)]\delta\vartheta(x)dx = 0$   |           |

Da bi zbroj iz izraza 2.2.71. bio jednak nuli mora vrijediti slijedeće;

|  |           |
|--|-----------|
| $[T(0) + T_0]\delta\omega(0) = 0 \quad \forall \delta\omega(0),$                   | (2.2.72.) |
| $[-T(l) + T_l]\delta\omega(l) = 0 \quad \forall \delta\omega(l),$                  |           |
| $[M(0) + M_0]\delta\vartheta(0) = 0 \quad \forall \delta\vartheta(0),$             |           |
| $[-M(l) + M_l]\delta\vartheta(l) = 0 \quad \forall \delta\vartheta(l),$            |           |
| $\int_0^l [T'(x) + q(x)] \delta\omega(x) dx = 0 \quad \forall \delta\omega,$       |           |
| $\int_0^l [M'(x) - T(x)] \delta\vartheta(x) dx = 0 \quad \forall \delta\vartheta,$ |           |

U izrazu 2.2.72. da bi vrijedile zadnje dvije jednačbe mora biti zadovoljen izraz 2.2.73., odnosno moraju postojati diferencijalne jednačbe ravnoteže.

|                      |           |
|----------------------|-----------|
| $[T'(x) + q(x)] = 0$ | (2.2.73.) |
| $[M'(x) - T(x)] = 0$ |           |



Dok prve 4 jednađbe određuju prirodne rubne uvijete, odnosno;

|  |           |
|--|-----------|
| $\begin{aligned} T(0) &= -T_0 & T(l) &= T_l \\ M(0) &= -M_0 & M(l) &= M_l \end{aligned}$ | (2.2.74.) |
|--|-----------|

Da bi se dokazao obrat prvog dijela teorema savijanja Bernoulli-Eulerove grede vraćamo se na izraz 2.2.55. integral  $\int_0^l M(x)\delta\kappa(x)dx$  prikazujemo kao;

|  |           |
|--|-----------|
| $\begin{aligned} \int_0^l M(x)\delta\kappa(x)dx &= -\int_0^l M(x)\delta\omega''(x)dx \\ &= M(l)\varphi(l) - M(0)\varphi(0) + T(l)\delta\omega(l) - T(0)\delta\omega(0) \\ &\quad - \int_0^l M''(x)\delta\omega(x)dx \end{aligned}$ | (2.2.75.) |
|--|-----------|

Iz navedenog slijedi uvjet

|   |           |
|---|-----------|
| $\int_0^l [M''(x) + q(x)]\delta\omega(x) dx = 0 \quad \forall \delta\omega$ | (2.2.76.) |
|---|-----------|

Sada je moguće prikazati diferencijalnu jednađbu ravnoteže.

|                     |           |
|---------------------|-----------|
| $M''(x) + q(x) = 0$ | (2.2.77.) |
|---------------------|-----------|

### 2.3. Teorem o virtualnim silama

Teorem o virtualnim silama glasi; kada polja pomaka i deformacija zadovoljavaju sve kinematičke uvjete, tada je rad vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomaka jednak radu unutrašnjih virtualnih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja i obrnuto. Pošto je zadovoljenje uvjeta ravnoteže analogno radovima stvarnih sila na virtualnim pomacima, onda je i zadovoljenje kinematičkih uvjeta analogno radovima virtualnih sila na stvarnim pomacima. Postoje dvije skupine kinematičkih uvjeta, prva skupina su diferencijalni odnosi pomaka i deformacija, dok je druga skupina rubni uvjeti koje određuju ležajevi.

Prva skupina kinematičkih uvjeta

|  |          |
|--|----------|
| $\varepsilon(x) = u'(x) \quad \text{ili} \quad \varepsilon(x) - u'(x) = 0$ $\kappa(x) = -\omega''(x) \quad \text{ili} \quad \kappa(x) - \omega''(x) = 0$ | (2.3.1.) |
|--|----------|

Druga skupina kinematičkih uvjeta

|   |          |
|---|----------|
| $u(x) = \bar{u}_0, \quad u(l) = \bar{u}_l$ $\omega(x) = \bar{\omega}_0, \quad \omega'(x) = -\bar{\varphi}_0, \quad \omega(l) = \bar{\omega}_l, \quad \omega'(l) = -\bar{\varphi}_l$ | (2.3.2.) |
|---|----------|

Za slučaj 2.3.2. u uzdužnom smjeru se zahtjeva da je zadan minimalno jedan uvjet, a u poprečnom smjeru minimalno dva uvjeta.

Prikaz izraza jednakosti radova virtualnih sila za Bernoulli-Eulerovu gredu

|   |          |
|---|----------|
| $\delta N_0 u(0) + \delta N_l u(l) + \delta T_0 \omega(0) + \delta T_l \omega(l) + \delta M_0 \varphi(0) + \delta M_l \varphi(l) +$ $\sum_i \delta P_i u(x_i) + \sum_j \delta Q_j \omega(x_j) + \sum_k \delta M_k \varphi(x_k) + \int_0^l [\delta p(x)u(x) + \delta q(x)\omega(x)] dx =$ $\int_0^l [\delta N(x)\varepsilon(x) + \delta M(x)\kappa(x)] dx$ | (2.3.3.) |
|---|----------|

Određeni pomaci i zaokreti krajeva grede događaju se po pravcima ležajnih veza ili se zaokreti događaju oko osi ležaja, onda su oni ili spriječeni ili su zadani kao prisilni pomaci i zaokreti, tada govorimo o geometrijskim rubnim uvjetima. U takvim slučajevima virtualne sile i momenti koji se događju oko ležajeva su zapravo virtualne reakcije. Kada promatramo slobodne pomake krajeva i njihove pravce, te osi oko slobodnih zaokreta njihovi rubni uvjeti su virtualne sile ili momenti čije vrijednosti mogu biti 0.

U izrazu 2.3.3. pomoću članova koji se nalaze pod znakom  $\Sigma$  uključili smo u izraz rad koncentriranih sila i momenata koji su zdani unutar cijelog raspona grede, ti članovi uključuju sile i momente koji djeluju na krajevima, odnosno rubne uvjete. U promatranom izrazu prvi redak čine članovi koji sadrže virtualne pomake. Rad virtualnih sila i momenata, te reakcija koje se dešavaju na prisilnim pomacima i zaokretima ležajeva izražava se slijedećim oblikom  $\sum_\gamma \delta R_\gamma \bar{v}_\gamma$ .

## 2.4. Metoda jedinične sile

Kada je zadana neka sila na kosom presjeku i kada vrijedi da je  $\delta M_k = 0$ ,  $\delta p = 0$  i  $\delta q = 0$ , te je zadana sila jedinična. Iz jednadžbe jednakosti radova virtualnih sila dobivamo;

$$1 \cdot d = \int_0^l [n(x)\varepsilon(x) + m(x)\kappa(x)] dx - \sum_{\gamma} r_{\gamma} \bar{u}_{\gamma} \quad (2.4.1.)$$

U izrazu 2.4.1. pomoću funkcija  $n = \delta N$  i  $m = \delta M$  su opisane vrijednosti virtualnih unutarnjih sila koje urvnotežuju zadanu jediničnu silu, a vrijednost  $r_{\gamma}$  uravnotežuje virtualne reakcije. Dok  $d^{\parallel}$  opisuje orijentiranu duljinu projekcije pomaka hvatišta virtualne sile na pravacu njezina djelovanja.

U slučaju kada je  $\delta M_k = 1$ , a sva ostala virtualna djelovanja jednaka su nuli, vrijedi sljedeće;

$$1 \cdot \varphi = \int_0^l [n(x)\varepsilon(x) + m(x)\kappa(x)] dx - \sum_{\gamma} r_{\gamma} \bar{u}_{\gamma} \quad (2.4.2.)$$

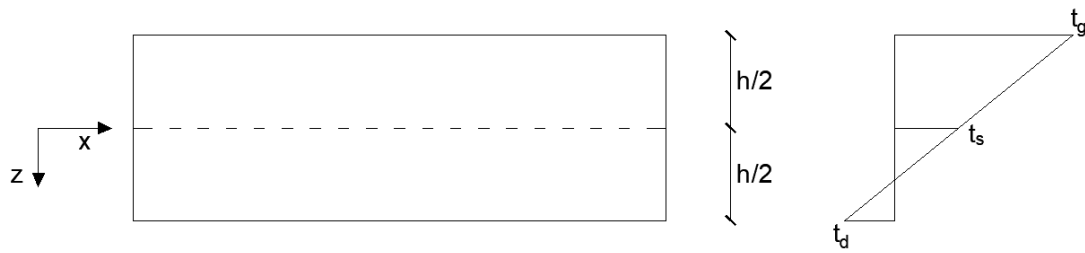
U izrazu 2.4.2. član  $\varphi$  jednak je kutu zaokreta osi grede u hvatištu odabranog virtualnog momenta.

Slijedeći korak je da u izrazima 2.4.1. i 2.4.2. s desne strane jednakosti deformacije  $\varepsilon(x)$  i  $\kappa(x)$  izrazimo kao vrijednosti unutarnjih sila koje su izazvane stvarnim opterećenjem.

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA(x)} \quad \kappa(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (2.4.3.)$$

Obratimo li pozornost na temperaturu i njezin utjecaj na deformacije pojedinih elementa, vrijedi sljedeće;

$$\varepsilon_t(x) = \alpha_t t_s \quad \kappa_t(x) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \quad (2.4.4.)$$



Slika 2.7. Utjecaj topline

Iz slike 2.7. vrijedi;

$$t_s = \frac{t_d + t_g}{2} \quad \Delta t = t_d - t_g \quad (2.4.5.)$$

Te je sada moguće izraziti vrijednost orijentirane duljine pojecije pomaka neke odabrane točke na odabrani pravac ili izračunati kut zaokreta osi grede u toj odabranoj točki.

$$\left. \begin{matrix} d^{\parallel} \\ \varphi \end{matrix} \right\} = \int_0^l n(x) \left[ \frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx + \int_0^l m(x) \left[ \frac{M(x)}{EI(x)} + \alpha \frac{\Delta t}{h} \right] dx - \sum_{\gamma} r_{\gamma} \bar{v}_{\gamma} \quad (2.4.6.)$$

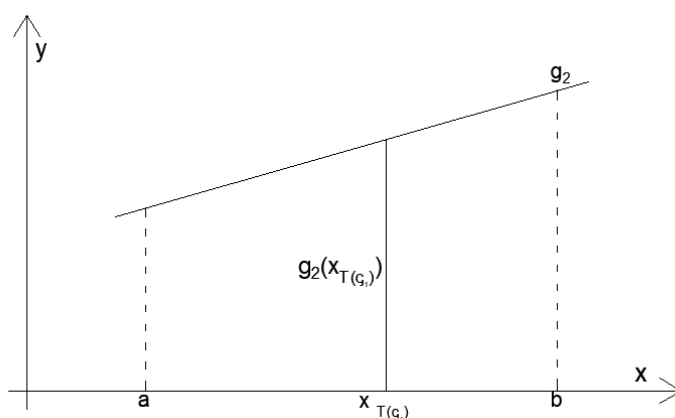
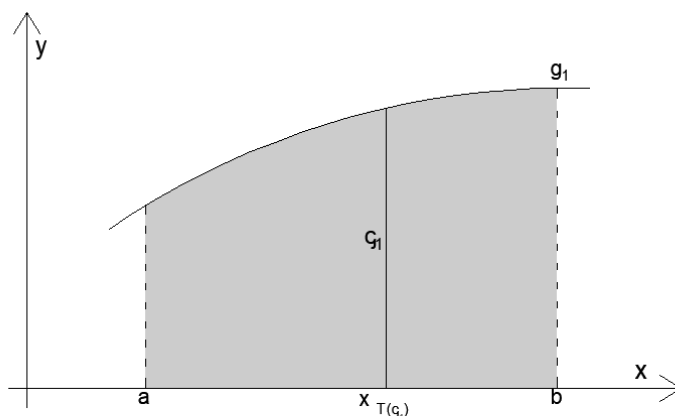
## 2.5. Vereščaginov teorem

Promatrajući izraz 2.4.6. vidimo da se dva člana s desne strane jednakosti nalaze pod integralom. Promatrani članovi sastoje se od dvije funkcije koje su međusobno pomnožene, jedna od te dvije funkcije mora biti linearna.

$$I_{1,2} = \int_a^b g_1(x)g_2(x)dx \quad (2.5.1.)$$

Potrebno je pokazati da vrijedi slijedeće:

$$I_{1,2} = G_1 \cdot g_2(x_{T(G_1)}) \quad (2.5.2.)$$



Slika 2.8. Prikaz linearne funkcije

Iz slike 2.8. vidljivo je da je sa oznakom  $G_1$  opisana površina ispod nelinearne funkcije označene kao  $g_1$ , u točki  $x_{T(G_1)}$  nalazi se apscisa težišta površine  $G_1$ . Gledajući drugi graf primjećujemo da je linearna funkcija opisana kao  $g_2$ , a vrijednost te funkcije u točki  $x_{T(G_1)}$  je  $g_2(x_{T(G_1)})$ . Kao što je već spomenuto  $g_2$  je linearna funkcija koja se može zapisati i u ovakvom obliku;  $g_2 = kx + m$ , pa sada vrijedi;

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{1,2} &= \int_a^b g_2(x)g_1(x)dx = \int_a^b (kx + m)g_1(x)dx \\
 &= k \int_a^b xg_1(x)dx + m \int_a^b g_1(x)dx
 \end{aligned}
 \tag{2.5.3}$$

Prema izrazu 2.5.3. vrijedi da je vrijednost integrala  $\int_a^b g_1(x)dx$  koji se nalazi na samom kraju izraza unutar člana  $m \int_a^b g_1(x)dx$  jednaka površini ispod nelineane funkcije koju smo opisali sa  $\mathcal{G}_1$ . Dok je vrijednost integrala  $\int_a^b xg_1(x)dx$  koji se nalazi unutar člana  $k \int_a^b xg_1(x)dx$  jednaka statičkom momentu te površine s obzirom na os y, pa sada vrijedi;

$$\int_a^b xg_1(x)dx = x_{T(\mathcal{G}_1)}\mathcal{G}_1
 \tag{2.5.4}$$

Pomoću izraza 2.5.4. izraz 2.5.3. možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{J}_{1,2} = kx_{T(\mathcal{G}_1)}\mathcal{G}_1 + m\mathcal{G}_1 = (kx_{T(\mathcal{G}_1)} + m) \cdot \mathcal{G}_1 = g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)}) \cdot \mathcal{G}_1
 \tag{2.5.5}$$

## 2.6. Određivanje plana polova

Prilikom određivanja polova nekog sustava potrebno je poznavati osnovni teorem kinematike, Kennedyev teorem i spojeve između tijela, sve to će biti ukratko objašnjeno u nastavku.

Osnovni teorem kinematike govori da projekcija vektora brzine neke dvije točke koje se nalaze na istom nedeformabilnom tijelu na spojnicu tih točaka moraju biti jednake.

Kennedyev teorem bitan je teorem prilikom određivanja polova promatranih tijela, a glasi; tri relativna pola za tri tijela koja se gibaju u istoj ravnini nalaze se na istom pravcu. Isto vrijedi, ako zamislimo da je treće tijelo nepomično, dok su preostala dva pomična, tada mehanizam čine samo dva pomična tijela. Pa vrijedi da relativni pol ili međupol dva tijela koja se gibaju u istoj ravnini mora ležati na spojnici apsolutnih polova.

Važno je poznavati spojeve između tijela, ti spojevi već su ranije spomenuti u poglavlju 1.1. no, sada ćemo ih obraditi malo detaljnije kako bi jasnije opisali određivanje polova.

Promatrajući klizni zglob jasno je da je u promatranoj točki moguća translacija duž pravca klizanja i rotacija oko zgloba. Poznat je također i smjer brzine, a prema tome slijeda da je relativni pol dva tijela koja su spojena kliznim zglobovom smješten na pravcu koji prolazi kroz zglob i koji je okomit na pravac klizanja.

Zglobni štap povezuje gibanje neke dvije točke od kojih se jedna točka giba okomito na spojnicu. Pol dva tijela koja su spojena na ovaj način mora se nalaziti na pravcu zglobnog štapa.

Kada su tijela spojena pomoću dva neparalelna zglobna štapa, promatramo kao da su spojena običnim zglobovom, te je pol određen spojnicom pravaca štapova.

Kada se pak promatra upeto-klizni spoj (određuje relativnu translaciju) poznato je da njegov pol leži na okomici pravca klizanja koju je moguće postaviti bilo gdje, a sam pol nalazi se u beskonačnosti.

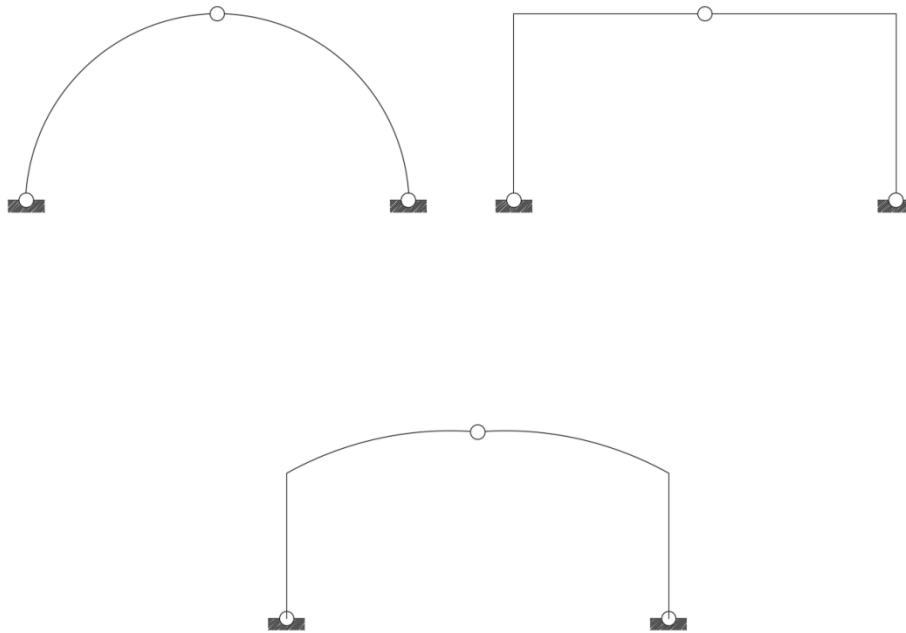
Dva paralelna zglobna štapa promatramo kao klizni spoj, jer prilikom određivanja polova imaju jednaku funkciju kao klizni spoj, pa je relativan pol takvog spoja u beskonačnosti.

### 3. Primjeri zadatka s primjenom metoda virtualnog rada

U ovom poglavlju prikazat će se primjena metode virtualnog rada na primjeru trozglobnog nosača i rešetkastog nosača. Svaki od navedenih zadataka bit će riješen i pomoću programa Dlubal RFEM 5.13, što je detaljnije prikazano u poglavlju 4.

#### 3.1. Trozglobni nosač – PRIMJER

Trozglobni nosači sastavljeni su od tri zgloba kao što i sam naziv govori i od dva tijela koja su povezana spomenutim zglobovima međusobno (srednji zglob) i za podlogu. Govorimo o trozglobnim lukovima kada osi spojenih tijela čine krivulju, a o trozglobnim okvirima kada su te osi poligonalne. Trozglobni nosači u stvarnosti se najčešće upotrebljavaju na konstrukcijama tvorničkih hala, skladišta, mostova...



Slika 3.1. Trozglobni okviri

U slučaju trozglobnih okvira uvijek mora biti zadovoljen uvjet geometrijske nepromjenjivosti (način određivanja objašnjen u poglavlju 1.2.1.).



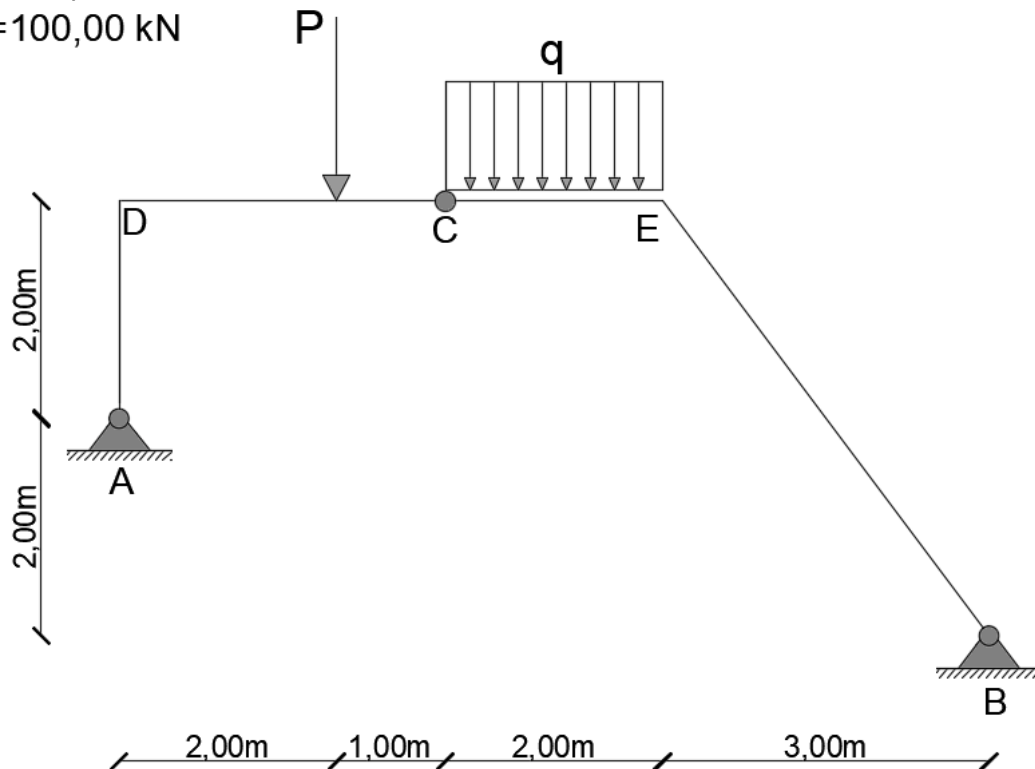
Zadatak koji će se obrađivati u poglavlju 3.1. Trozglobni nosač zadan je na slijedeći način;

**ZADATAK;**

Potrebno je odrediti horizontalnu komponentu reakcije u zglobnom ležaju označenom slovom A.

$$q = 100,00 \text{ kN/m'}$$

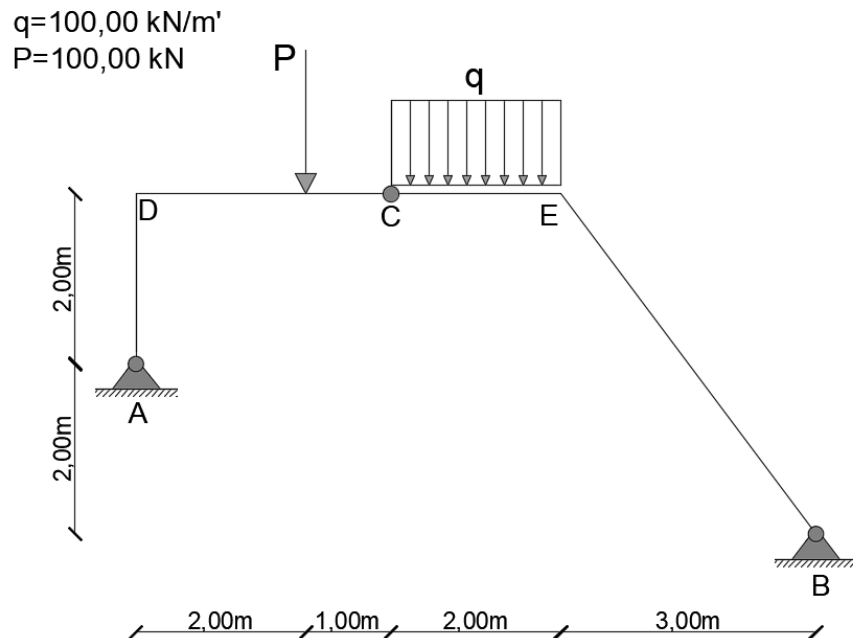
$$P = 100,00 \text{ kN}$$



### 3.1.1. Virtualni rad na trozglobnom nosaču

#### ZADATAK;

Potrebno je odrediti horizontalnu komponentu reakcije u zglobnom ležaju označenom slovom A.



Prvi korak prilikom rješavanja ovakvih zadataka je utvrđivanje statičke određenosti sustava;

Broj stupnjeva slobode gibanja;

$$S = n_D \cdot 3 - l - 2 \cdot z_1 - 4 \cdot z_2 - 6 \cdot z_3 \dots - 3 \cdot z_0 = 0$$

$$S = 4 \cdot 3 - 4 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$S = 0$$

*Sustav je statički određen*

Sustav je statički određen što bi značilo da je sile u spojevima moguće odrediti iz uvijeta ravnoteže.

Zatim određujemo iznose vanjskih djelovanja;

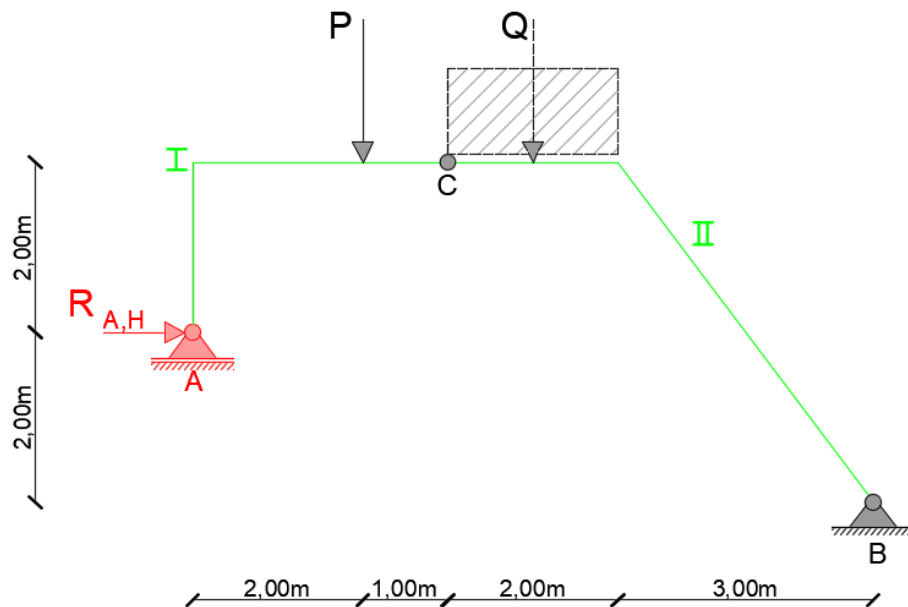
Iznosi vanjskih sila;

$$Q = q \cdot 2m = 100 \frac{kN}{m} \cdot 2m = 200kN$$

$$P = 100 kN$$

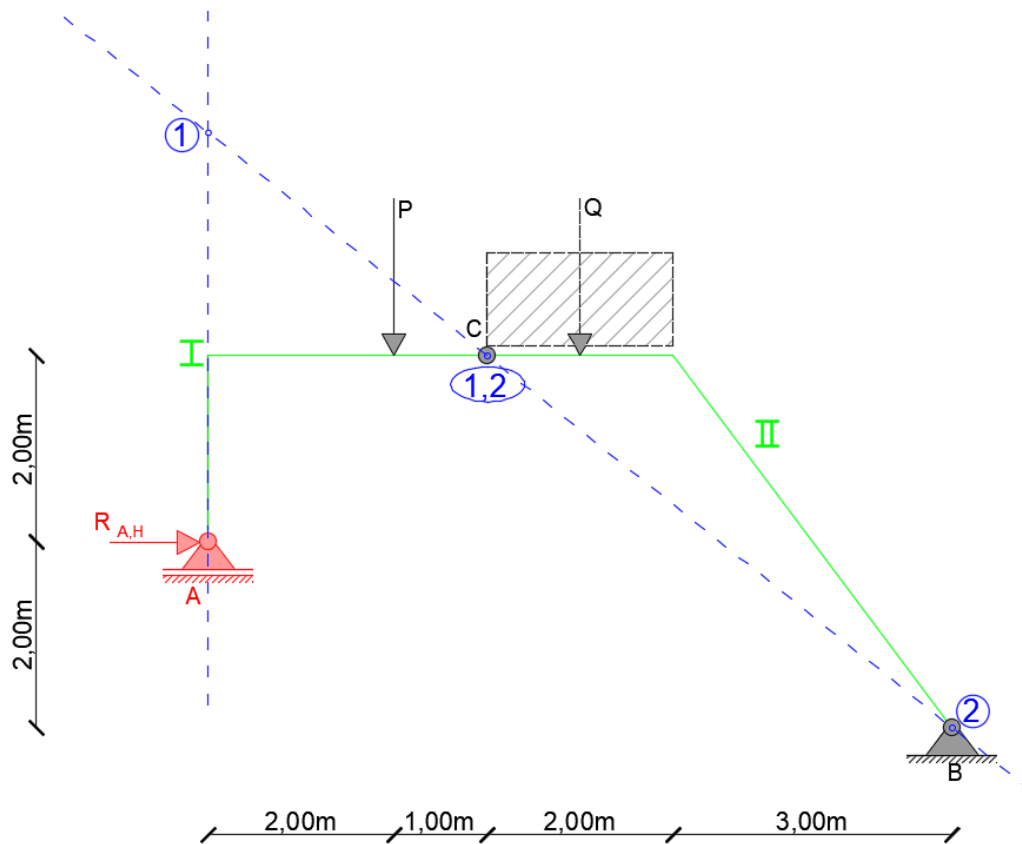
Virtualni pomaci omogućavaju rad tražene sile, ali moraju spriječiti rad svih ostalih sila u spojevima i ležajevima.

Sustav je potrebno pretvoriti u mehanizam tako da mu oduzmemo jedan stupanj slobode i to na mjestu i u smjeru tražene sile.

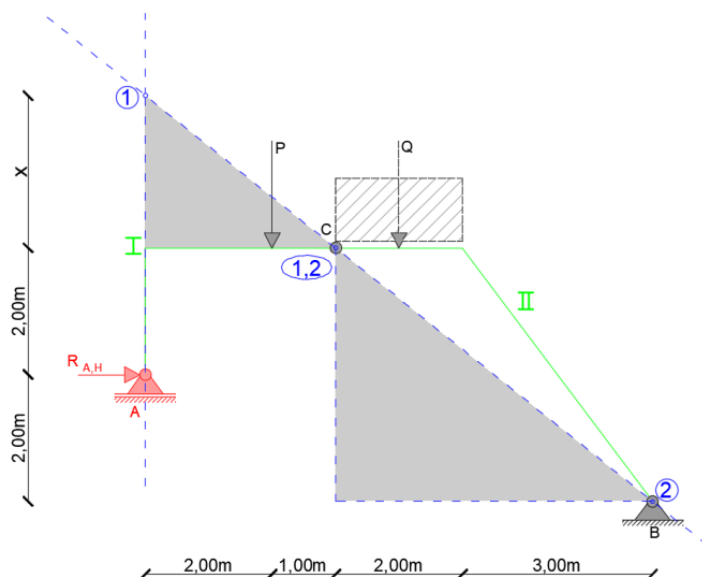


U točki A nepomični zglobni ležaj pretvaramo u pomičan, odnosno omogućujemo horizontalan pomak zgloba. Na ovaj način statički sustav smo pretvorili u mehanizam s jednim stupnjem slobode, a na mjestu i u smjeru u kojem smo oduzeli jedan stupanj slobode postavljamo silu  $R_{A,H}$ , horizontalnu komponentu reakcije u zglobnom ležaju A.

Nadalje, ovakvom sustavu koji se sastoji od 2 diska, odnosno tijela I i tijela II potrebno je odrediti polove. Polovi ovog sustava i njihovi pravci označeni su plavom bojom. Objašnjenje oko određivanja polova sustava dano je u poglavlju 2.6.



Vertikalnu udaljenost na kojoj se nalazi pol 1 označit ćemo sa veličinom  $x$ , tu veličinu moguće je odrediti iz sličnosti dvaju označenih trokuta;



$$\frac{4m}{5m} = \frac{x}{3m}$$

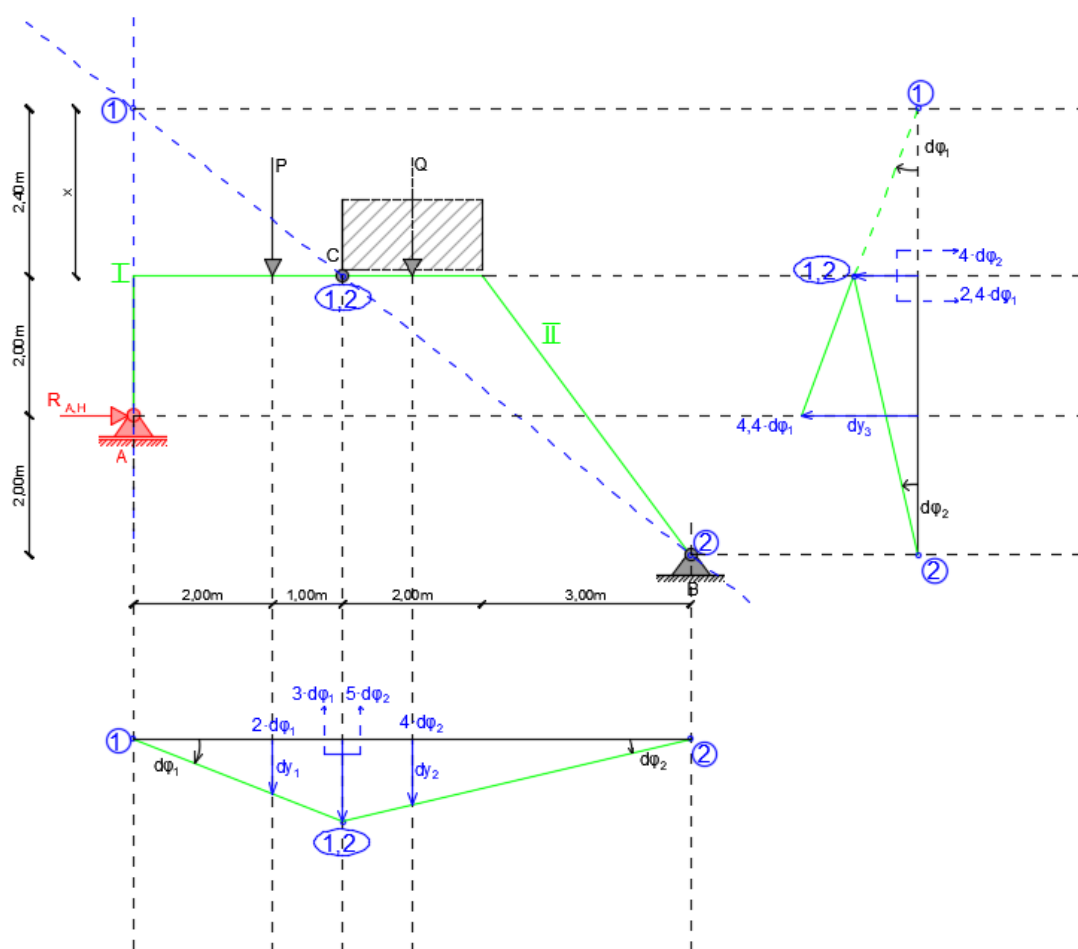
$$5x = 12/5$$

$$x = 2,4m$$

Osnovna pretpostavka prilikom primjene virtualnog rada kako bi odredili traženu statičku veličinu glasi da promatrani sustav mora biti u stanju ravnoteže. Pošto je sustav u ravnoteži i prema teorem o virtualnom radu, slijedi da ukupni rad sila koje djeluju na virtualnim pomacima mora biti nula, odnosno vrijedi ;  $\Sigma dW = 0$

Radimo skicu odabranog polja pomaka za određivanje tražene reakcije.

Pomaci sustava se projiciraju na dvije osi, vertikalnu i horizontalnu. Mjerilo prilikom projiciranja je jednako na obje osi i vrijedi da su nagibi pravaca jednaki, odnosno kutovi u projekcijama su jednaki, označit ćemo ih kao  $d\varphi_x$ .



Pošto je plan pomaka sveden na plan infinitezimalnih pomaka vrijedi zakon superpozicije i jednadžbu rada je moguće normirati s bilo kojim iznosom pomaka.

Važno je napomenuti da je plan pomaka određen s jednom poznatom geometrijskom veličinom.

Početak konstrukcije projekcije plana pomaka započet ćemo s rotacijom tijela I koje je prouzrokovano djelovanjem sile P, sila P radi pomak  $dy_1$ . Dok je do rotacije tijela II došlo zbog djelovanja sile Q, koja radi pomak  $dy_2$ . Projekcije polova tijela se uvijek nalaze na osi projekcije, a projekcija međupola dva tijela nije nužno na osi, ali uvijek se nalazi na horizontalnoj ili vertikalnoj projekciji oba tijela (podsjetnik; međupol je točka koja ima jednako kretanje kao točka tijela I i tijela II). Vidljivo je iz skice plana pomaka da se tijelo I rotira za iznos kuta  $d\varphi_1$ , dok je tijelo II zarotirano za iznos kuta  $d\varphi_2$ . Iz svega poznatog moguće je napraviti i skicu projekcije tijela na vertikalnu os, zelena crtkana linija označava virtualnu projekciju dijela tijela I, pune linije označavaju stvarne projekcije tijela. Vertikalno projiciranje ključno je kako bi mogli odrediti nepoznatu silu. Prema definiciji rada poznato je da je rad djelovanje sile na nekom putu duž kojeg ta sila djeluje. Dakle, slijedeći korak je definirati rad svih sila koje djeluju na sustav, odnosno potrebno je odrediti put na kojem te sile djeluju.

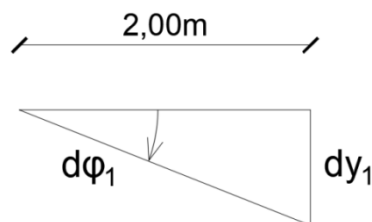
Jednadžba virtualnog rada za prikazani sustav glasi:

$$\Sigma dW = 0$$

$$P \cdot dy_1 + Q \cdot dy_2 - R_{A,H} \cdot dy_3 = 0$$

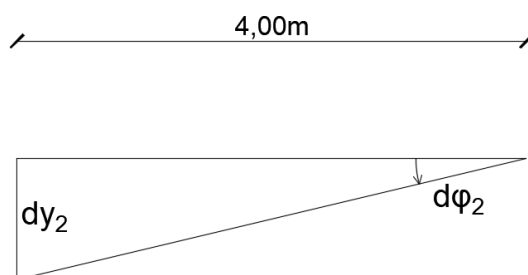
Sada imamo jednadžbu s 4 nepoznanice, ali 3 nepoznanice koje je moguće izraziti preko trigonometrije su  $dy_1$ ,  $dy_2$ , i  $dy_3$ .

Funkcija koja povezuje  $dy_1$  i  $d\varphi_1$  je tangens;



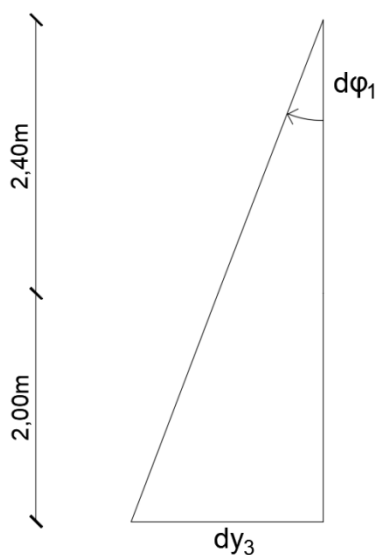
$$\tan d\varphi_1 = \frac{dy_1}{2}$$

Funkcija koja povezuje  $dy_2$  i  $d\varphi_2$  je tangens;



$$\tan d\varphi_2 = \frac{dy_2}{4}$$

Funkcija koja povezuje  $dy_3$  i  $d\varphi_1$  je tangens;



$$\tan d\varphi_1 = \frac{dy_3}{4,4}$$

Kod infinitezimalnih kuteva (takve kuteve promatramo prilikom služenja metodom virtualnog rada) tangens kuta jednak je tom kutu, pa slijedi;

$$\begin{aligned} \tan d\varphi_1 &= \frac{dy_1}{2} && \rightarrow && dy_1 = 2 d\varphi_1 \\ \tan d\varphi_2 &= \frac{dy_2}{4} && \rightarrow && dy_2 = 4 d\varphi_2 \\ \tan d\varphi_1 &= \frac{dy_3}{4,4} && \rightarrow && dy_3 = 4,4 d\varphi_1 \end{aligned}$$

Sada jednačba virtualnog rada glasi;

$$\begin{aligned}\Sigma dW &= 0 \\ P \cdot 2d\varphi_1 + Q \cdot 4d\varphi_2 - R_{A,H} \cdot 4,4d\varphi_1 &= 0\end{aligned}$$

Dakle, potrebno je još dovesti u odnos dvije nepoznanice, a to su  $d\varphi_1$  i  $d\varphi_2$ . Poznato je da je pomak međupola zajednički za tijelo I i tijelo II, pa vrijedi;

$$\begin{aligned}3d\varphi_1 &= 5d\varphi_2 \\ d\varphi_2 &= 0,6d\varphi_1\end{aligned}$$

Tako da ukupna jednačba virtualnog rada izgleda;

$$\begin{aligned}\Sigma dW &= 0 \\ P \cdot dy_1 + Q \cdot dy_2 - R_{A,H} \cdot dy_3 &= 0 \\ P \cdot 2d\varphi_1 + Q \cdot 4d\varphi_2 - R_{A,H} \cdot 4,4d\varphi_1 &= 0 \\ P \cdot 2d\varphi_1 + Q \cdot 4 \cdot 0,6d\varphi_1 - R_{A,H} \cdot 4,4d\varphi_1 &= 0 / \cdot \frac{1}{d\varphi_1} \\ 2 \cdot P + 4 \cdot 0,6 \cdot Q - 4,4 \cdot R_{A,H} &= 0 \\ 4,4 \cdot R_{A,H} &= 2 \cdot 100 + 4 \cdot 0,6 \cdot 200 \\ 4,4 \cdot R_{A,H} &= 680 /: 4,4 \\ R_{A,H} &= 154,54 \text{ kN}\end{aligned}$$

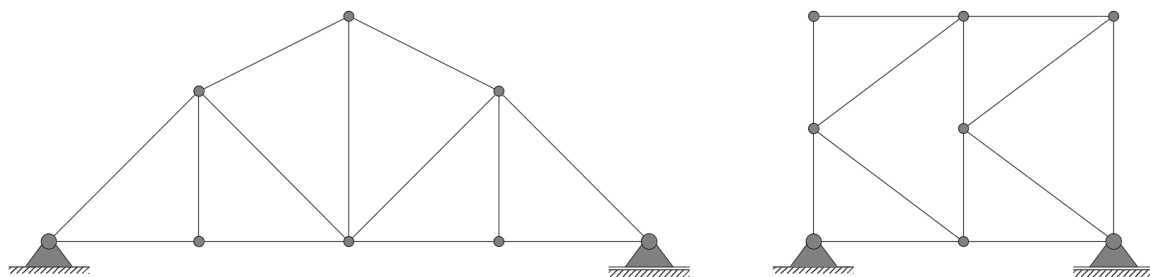


### 3.2. Rešetkasti nosač – PRIMJER

Rešetkastim nosačim nazivamo nosače koji se sastoje od zglobnih čvorova koji su povezani zglobnim štapovima. Zglobni štapovi prenose sile koje djeluju paralelno s njihovim osima, dakle u njihovim se presjecima javljaju samo uzdužne sile (vlačne i tlačne), dok sve ostale rezne sile i momenti iščezavaju. Vanjske sile djeluju na krajevima zglobnih štapova i prema prije navedenom također su paralelne sa osi štapa. Nosači koji su načinjeni od trokuta zglobnih štapova nazivaju se *jednostavni statički određeni ravninski rešetkasti nosači*.

Za slučaj kada ne zanemarujemo vlastitu težinu štapova i ako su štapovi opterećeni vanjskim opterećenjem u poprečnom presjeku štapa javljaju se poprečne sile i momenti, tada nosač smatramo rešetkastim.

Složeni rešetkasti nosači sastoje se od rešetki i štapova.



Slika 3.2. Rešetkasti sustavi

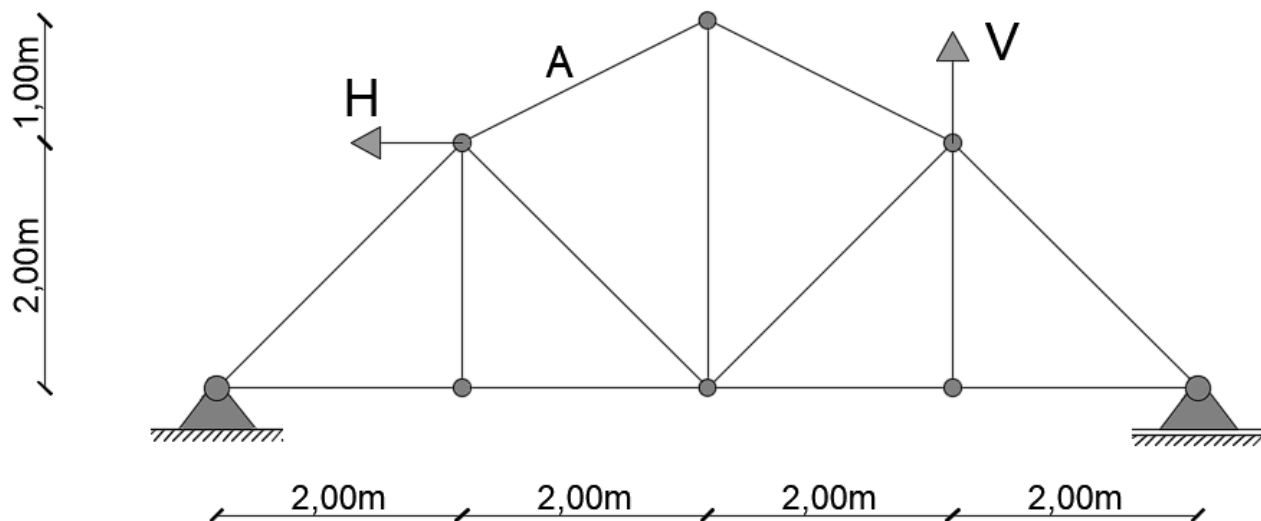
Zadatak koji će se obrađivati u poglavlju 3.2. Rešetkasti nosač zadan je na slijedeći način;

**ZADATAK;**

Potrebno je odrediti silu u štapu A.

$$H=4,50 \text{ kN}$$

$$V=6,00 \text{ kN}$$



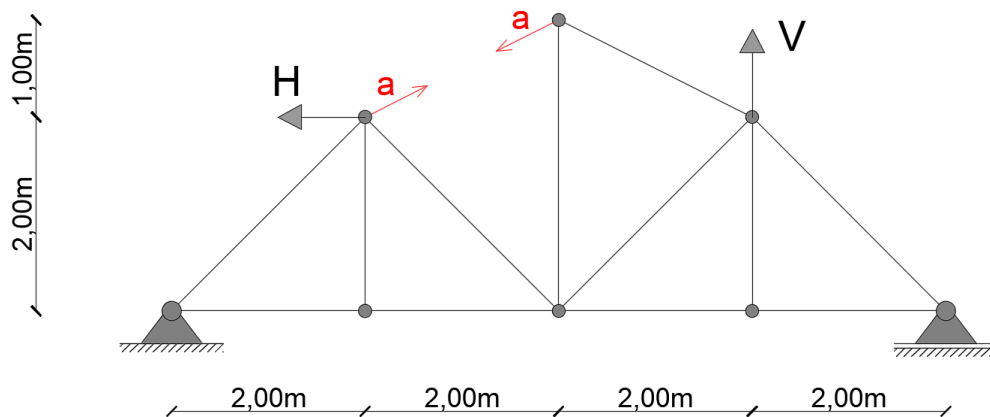
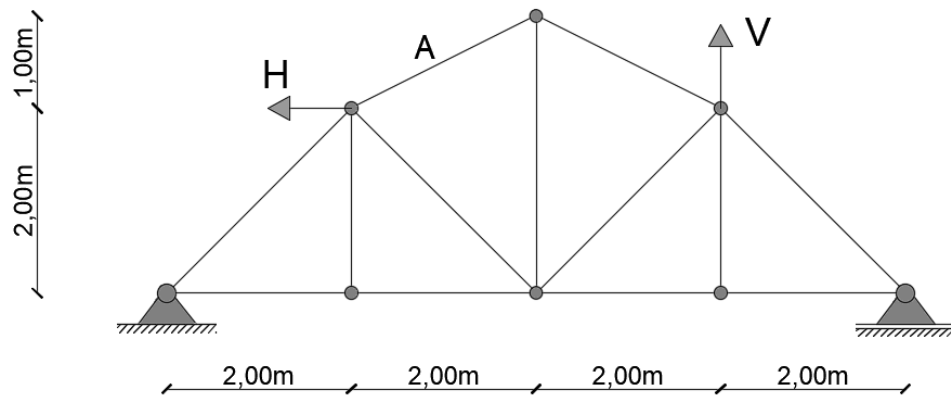
### 3.2.1. Virtualni rad na rešetkastom nosaču

#### ZADATAK;

Potrebno je odrediti silu u štapu A.

$$H=4,50 \text{ kN}$$

$$V=6,00 \text{ kN}$$



Sve što je ranije navedeno prilikom rješavanja virtualnog rada na trozglobnom nosaču vrijedi i za rešetkasti nosač

Prvi korak je utvrđivanje statičke određenosti sustava

Broj stupnjeva slobode gibanja;

$$S = n_D \cdot 3 - l - 2 \cdot z_1 - 4 \cdot z_2 - 6 \cdot z_3 \dots - 3 \cdot z_0 = 0$$

$$S = 13 \cdot 3 - 3 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 - 8 \cdot 1 = 0$$

$$S = 0$$

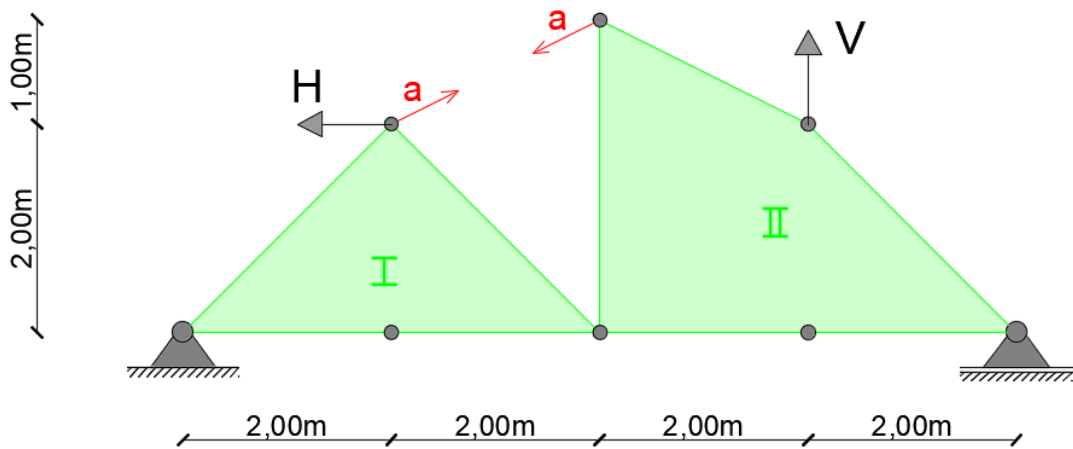
*Sustav je statički određen*

Iznosi vanjskih sila;

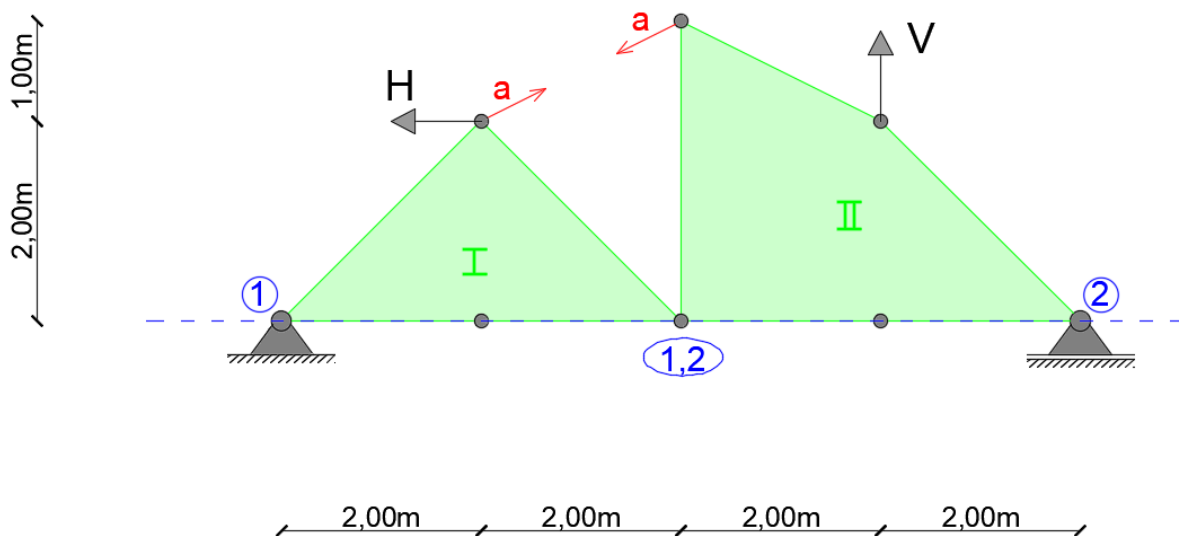
$$H = 4,5\text{ kN}$$

$$V = 6,00\text{ kN}$$

Sustav je potrebno pretvoriti u mehanizam, na način da mu oduzmemo jedan stupanj slobode i to na mjestu i u smjeru tražene sile. U ovom slučaju ukidamo štap A i na njegovo mjesto postavljamo silu  $a$ .



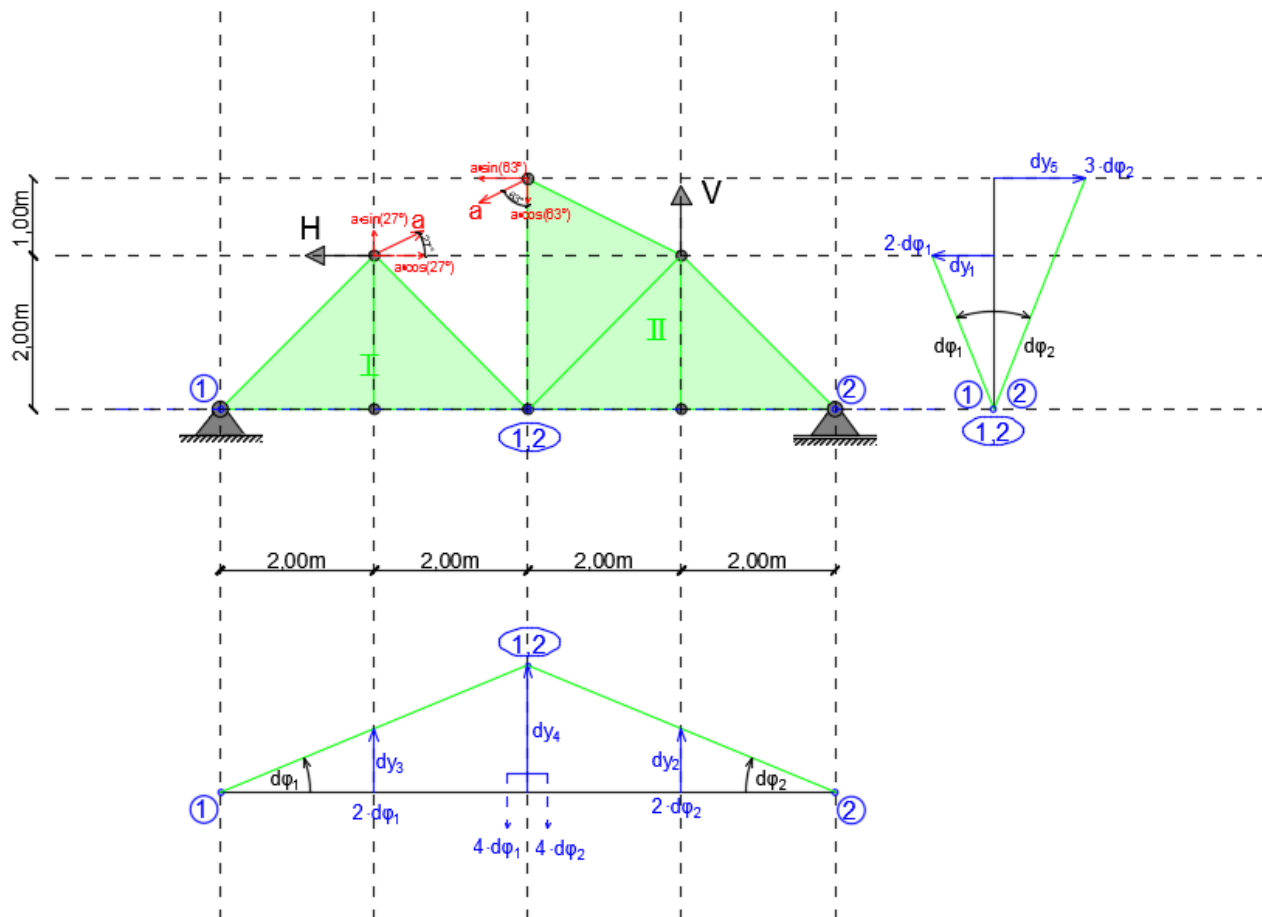
Nakon toga potrebno je odrediti polove sustava i pošto je tražena sila kosa sila, potrebno ju je rastaviti na njenu horizontalnu i vertikalnu komponentu.



Promatrani sustav mora biti u stanju ravnoteže i prema teoremu o virtualnom radu, vrijedi da je  $\Sigma dW = 0$

Radimo skicu odabranog polja pomaka za određivanje tražene sile.

Pomaci sustava se projiciraju na dvije osi, vertikalnu i horizontalnu, a mjerilo prilikom projiciranja je jednako na obje osi i vrijedi da su nagibi pravaca jednaki.



$$\sin 27^\circ = 0,454$$

$$\cos 27^\circ = 0,891$$

$$\sin 63^\circ = 0,891$$

$$\cos 63^\circ = 0,454$$

Početak konstrukcije projekcije plana pomaka započet ćemo s rotacijom tijela II koje je prouzrokovano djelovanjem sile V, sila V radi pomak  $dy_2$ , taj dio crta se na horizontalnoj projekciji pošto je sila V vertikalna sila. Pošto smo odredili položaj tijela II i poznata nam je pozicija međupola ova dva tijela moguće je odrediti položaj tijela I na horizontalnoj projekciji. Poznati su pretpostavljeni iznosi kuteva  $d\phi_1$  i  $d\phi_2$ , pa je moguće nacrtati i vertikalnu projekciju i položaje tijela. Tako je konstrukcija virtualnih pomaka za zadani

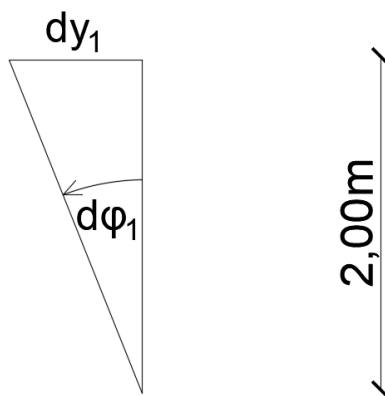
sustav završena, samo je potrebno točno naznačiti pomake koje prouzrokuju sva vanjska djelovanja. Nadalje, potrebno je definirati rad svih sila koje djeluju na sustav, odnosno potrebno je odrediti put na kojem te sile djeluju.

Jednadžba virtualnog rada za prikazani sustav glasi:

$$\begin{aligned} \Sigma dW &= 0 \\ H \cdot dy_1 + V \cdot dy_2 + \sin(27^\circ) \cdot a \cdot dy_3 \\ - \cos(63^\circ) \cdot a \cdot dy_4 - \cos(27^\circ) \cdot a \cdot dy_1 - \sin(63^\circ) \cdot a \cdot dy_5 &= 0 \end{aligned}$$

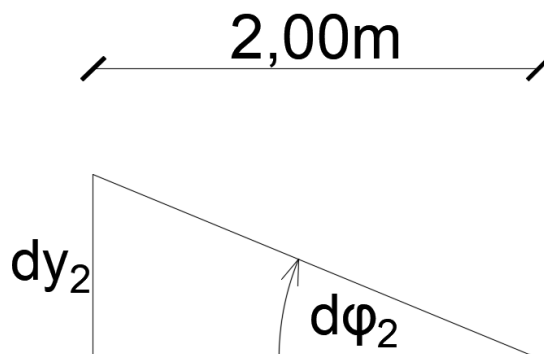
Dobivamo jednadžbu s 6 nepoznanica, ali 5 nepoznanica je moguće povezati pomoću trigonometrije, a to su  $dy_1$ ,  $dy_2$ ,  $dy_3$ ,  $dy_4$  i  $dy_5$ .

Funkcija koja povezuje  $dy_1$  i  $d\phi_1$  je tangens;



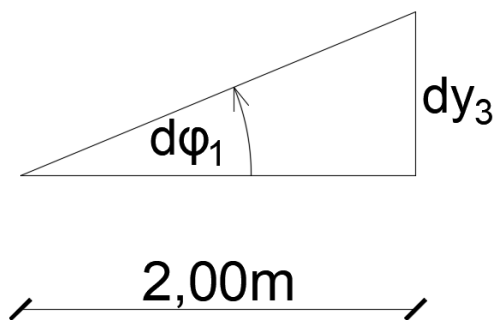
$$\tan d\phi_1 = \frac{dy_1}{2}$$

Funkcija koja povezuje  $dy_2$  i  $d\phi_2$  je tangens;



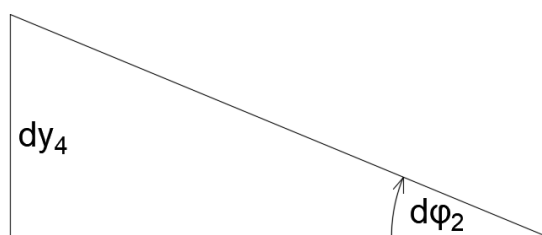
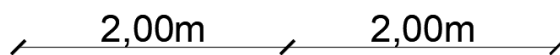
$$\tan d\phi_2 = \frac{dy_2}{2}$$

Funkcija koja povezuje  $dy_3$  i  $d\varphi_1$  je tangens;



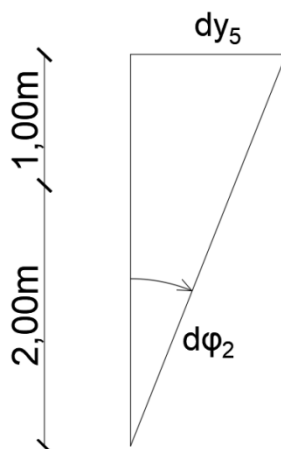
$$\tan d\varphi_1 = \frac{dy_3}{2}$$

Funkcija koja povezuje  $dy_4$  i  $d\varphi_2$  je tangens;



$$\tan d\varphi_2 = \frac{dy_4}{4}$$

Funkcija koja povezuje  $dy_5$  i  $d\varphi_2$  je tangens;



$$\tan d\varphi_2 = \frac{dy_5}{3}$$

Podsjetnik;kod infinitezimalnih kuteva tangens kuta jednak je tom kutu, pa slijedi;

$$\tan d\varphi_1 = \frac{dy_1}{2} \quad \rightarrow \quad dy_1 = 2 d\varphi_1$$

$$\tan d\varphi_2 = \frac{dy_2}{2} \quad \rightarrow \quad dy_2 = 2 d\varphi_2$$

$$\tan d\varphi_1 = \frac{dy_3}{2} \quad \rightarrow \quad dy_3 = 2 d\varphi_1$$

$$\tan d\varphi_2 = \frac{dy_4}{4} \quad \rightarrow \quad dy_4 = 4 d\varphi_2$$

$$\tan d\varphi_2 = \frac{dy_5}{3} \quad \rightarrow \quad dy_5 = 3d\varphi_2$$

Sada jednačba virtualnog rada glasi;

$$\Sigma dW = 0$$

$$H \cdot 2 d\varphi_1 + V \cdot 2 d\varphi_2 + \sin(27^\circ) \cdot a \cdot 2 d\varphi_1 \\ - \cos(63^\circ) \cdot a \cdot 4 d\varphi_2 - \cos(27^\circ) \cdot a \cdot 2 d\varphi_1 - \sin(63^\circ) \cdot a \cdot 3d\varphi_2 = 0$$

Nepoznanice  $d\varphi_1$  i  $d\varphi_2$  povezujemo pomoću činjenice da je pomak međupola zajednički za tijelo I i tijelo II.

$$4d\varphi_1 = 4d\varphi_2$$

$$d\varphi_1 = d\varphi_2$$



Konačna jednačba virtualnog rada za prikazani sustav je oblika;

$$\Sigma dW = 0$$

$$H \cdot dy_1 + V \cdot dy_2 + \sin(27^\circ) \cdot a \cdot dy_3 - \cos(63^\circ) \cdot a \cdot dy_4 - \cos(27^\circ) \cdot a \cdot dy_1 - \sin(63^\circ) \cdot a \cdot dy_5 = 0$$

$$H \cdot 2 d\varphi_1 + V \cdot 2 d\varphi_2 + \sin(27^\circ) \cdot a \cdot 2 d\varphi_1 - \cos(63^\circ) \cdot a \cdot 4 d\varphi_2 - \cos(27^\circ) \cdot a \cdot 2 d\varphi_1 - \sin(63^\circ) \cdot a \cdot 3 d\varphi_2 = 0$$

$$H \cdot 2 d\varphi_1 + V \cdot 2 d\varphi_2 + 0,454a \cdot 2d\varphi_1 - 0,454 a \cdot 4d\varphi_2 - 0,891 a \cdot 2d\varphi_1 - 0,891a \cdot 3d\varphi_2 = 0$$

$$H \cdot 2 d\varphi_1 + V \cdot 2 d\varphi_1 + 0,454a \cdot 2d\varphi_1 - 0,454 a \cdot 4d\varphi_1 - 0,891 a \cdot 2d\varphi_1 - 0,891a \cdot 3d\varphi_1 = 0$$

$$H \cdot 2 d\varphi_1 + V \cdot 2 d\varphi_1 + 0,454a \cdot 2d\varphi_1 - 0,454 a \cdot 4d\varphi_1 - 0,891 a \cdot 2d\varphi_1 - 0,891a \cdot 3d\varphi_1 = 0 / \cdot \frac{1}{d\varphi_1}$$

$$H \cdot 2 + V \cdot 2 + 0,454a \cdot 2 - 0,454 a \cdot 4 - 0,891 a \cdot 2 - 0,891a \cdot 3 = 0$$

$$4,5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 0,454a \cdot 2 - 0,454 a \cdot 4 - 0,891 a \cdot 2 - 0,891a \cdot 3 = 0$$

$$0,454a \cdot 2 - 0,454a \cdot 4 - 0,891a \cdot 2 - 0,891a \cdot 3 = -21$$

$$-5,363a = -21 /: (-5,363)$$

$$a = 3,916 \text{ kN}$$

## 4. Usporedba i provjera pomoću programa Dlubal RFEM 5.13.

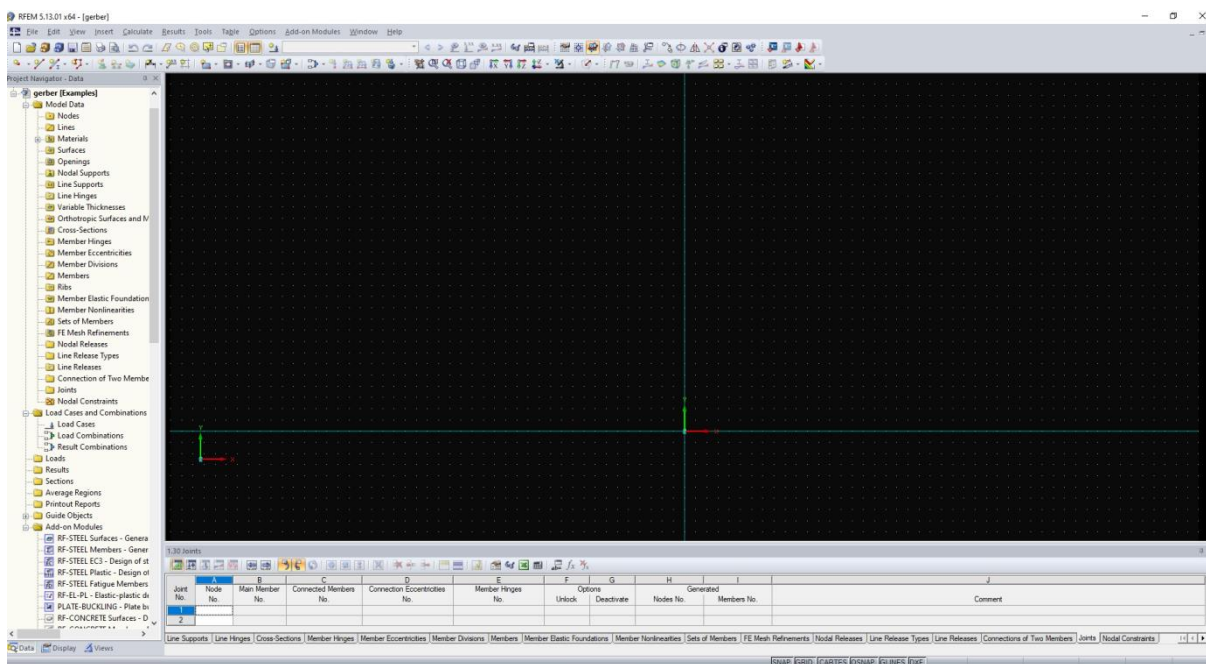
### 4.1. Dlubal RFEM 5.13.

Dlubal RFEM 5.13 za analizu konačnih elemenata je software za modeliranje i strukturnu analizu.

Program služi za efikasno i relativno jednostavno modeliranje, kao i strukturalnu analizu i dizajn 2D i 3D modela. Takvi modeli sastoje se od osnovnih oblika kao što su ploče,preklopljene ploče, zidovi, grede , stupovi, ljske i drugi.

Program nudi mogućnost definiranja strukture, materijala i opterećenja za ravne površine kao i za prostorne sustave.

Proračunava deformacije, unutrašnje sile, naprezanja, reakcijske sile, naprezanja koja se javljaju prilikom kontakta konstrukcije s tlom i još mnogo toga.



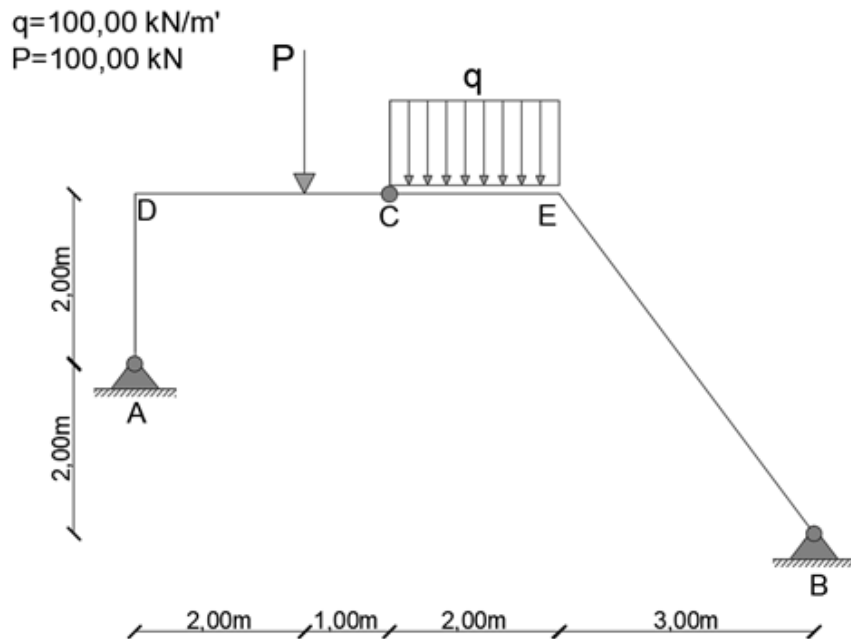
Slika 4.1. Sučelje programa Dlubal RFEM 5.13.

## 4.2. Trozglobni nosač

Usporedba iznosa horizontalne komponente reakcijske sile u ležaju A rješene metodom virtualnog rada sa rješenjem dobivenim u programu Dlubal RFEM 5.13.

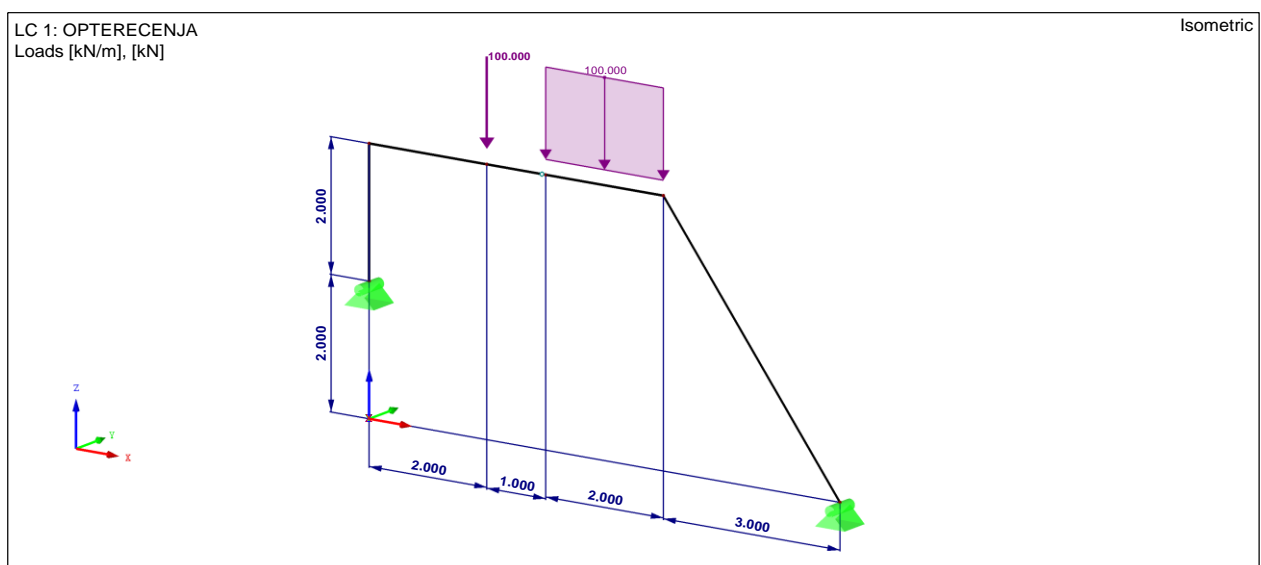
### **ZADATAK;**

Potrebno je odrediti horizontalnu komponentu reakcije u zglobnom ležaju označenom slovom A.

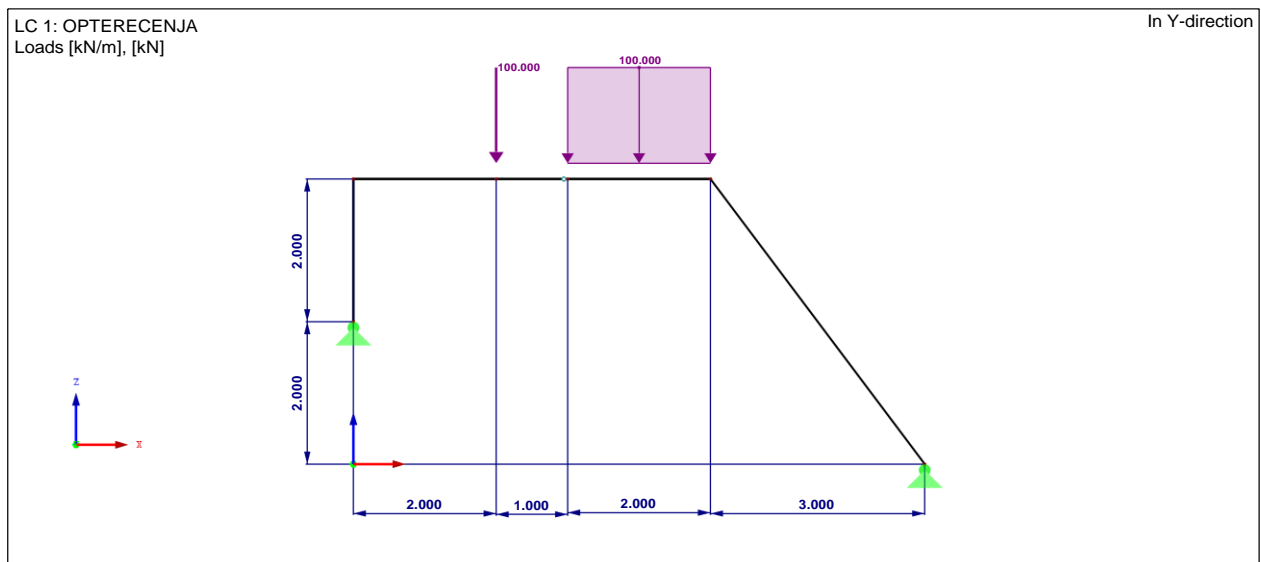


Podsjetnik : metodom virtualnog rada horizontalna komponenta reakcije u zglobnom ležaju A iznosi ;

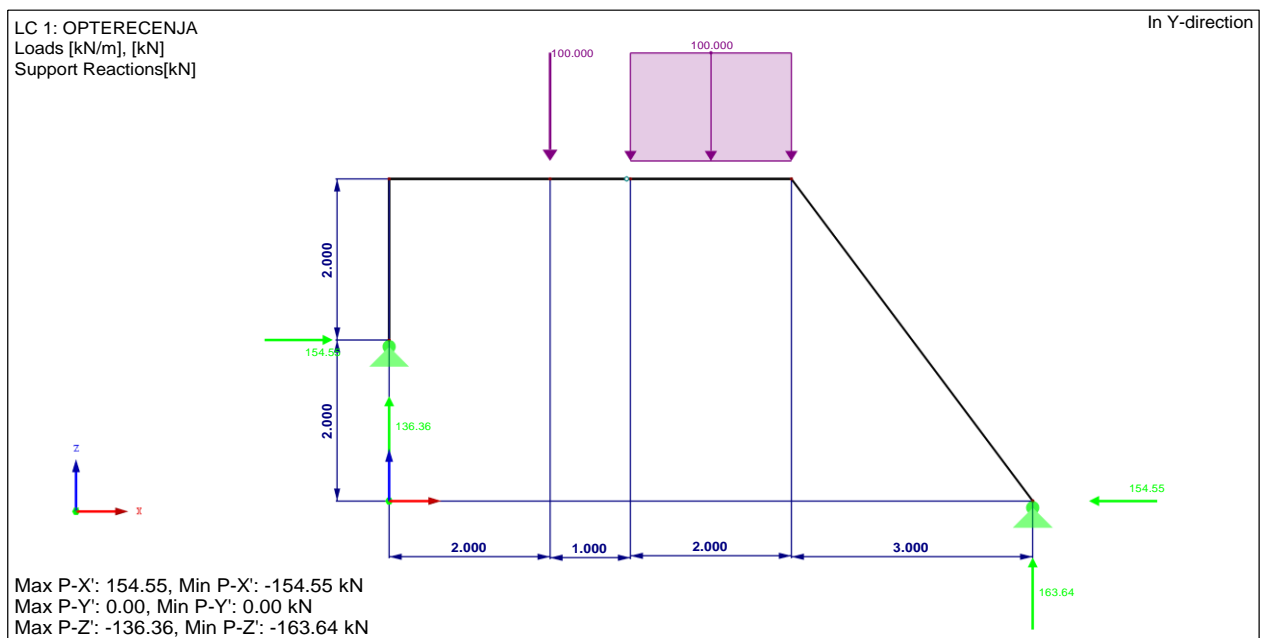
$$R_{A,H} = 154,54 \text{ kN}$$



Slika 4.2. Opterećenja na trozglobni nosač - izometrija

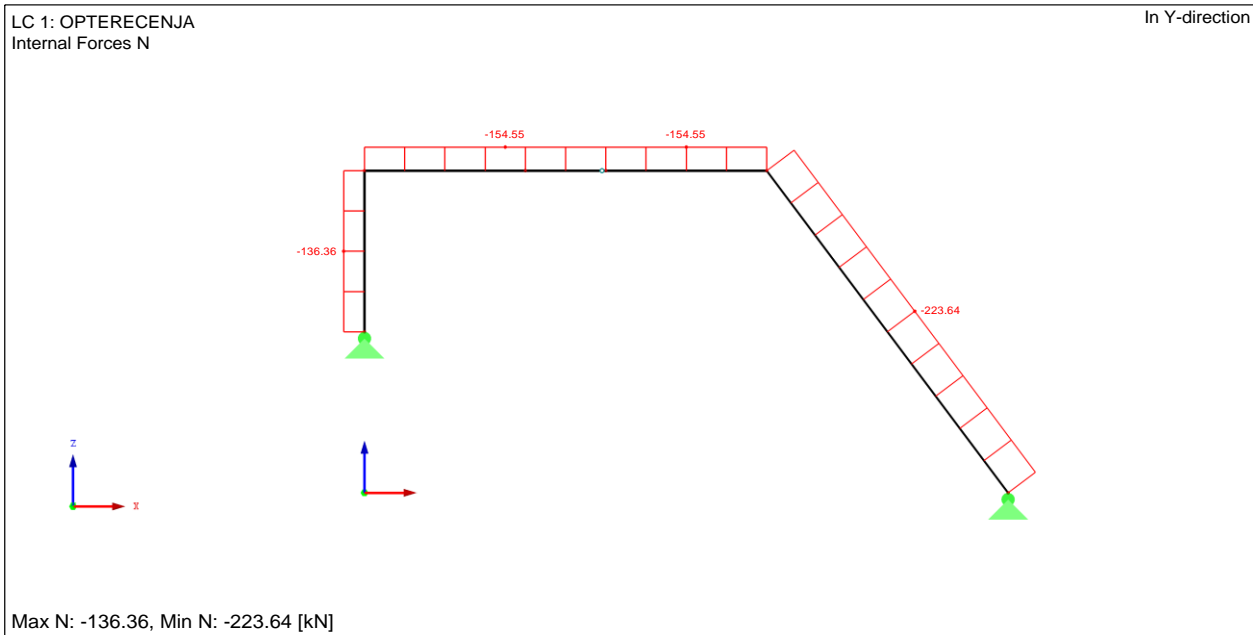


Slika 4.3. Opterećenja na trozglobni nosač – djelovanja u y smjeru

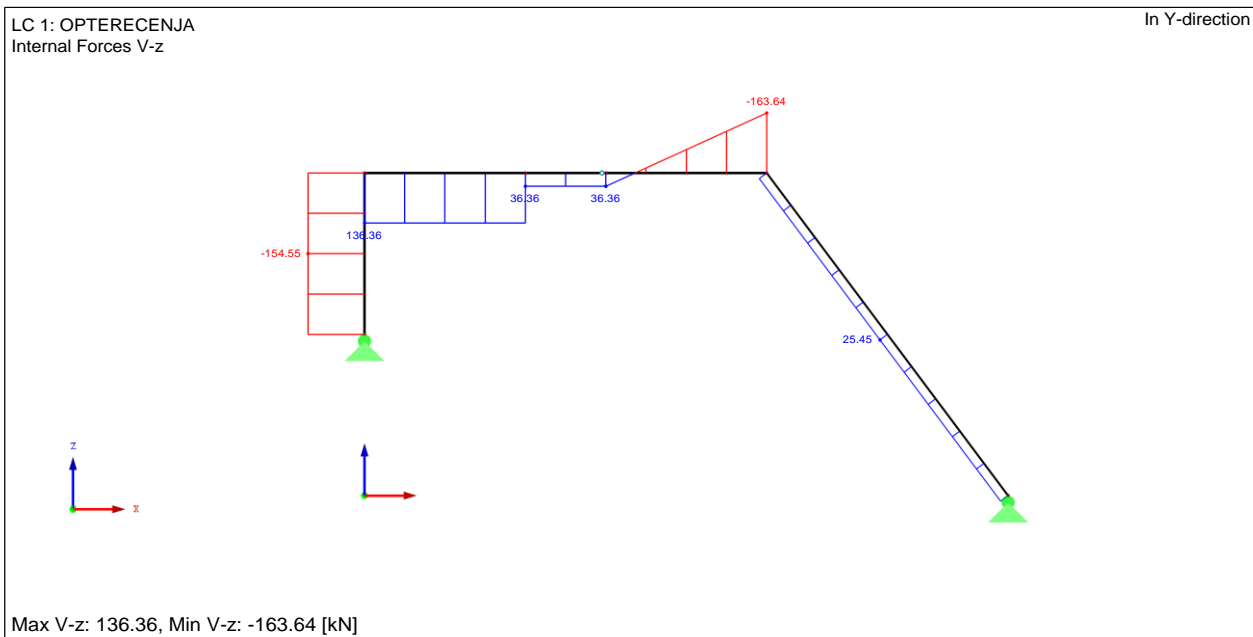


Slika 4.4. Opterećenja na trozglobni nosač – iznos reakcijskih sila

Na slici 4.4. prikazane su reakcijske sile pomoću svojih komponenta koje djeluju u x i y smjeru. Prema softveru Dlubal RFEM 5.13. iznos horizontalne komponente reakcijske sile u ležaju A je 154,55 kN, dok je iznos iste komponente dobiven metodom virtualnog rada 154,54 kN, dakle razlika u ova dva rezultata iznosi 0,01kN.



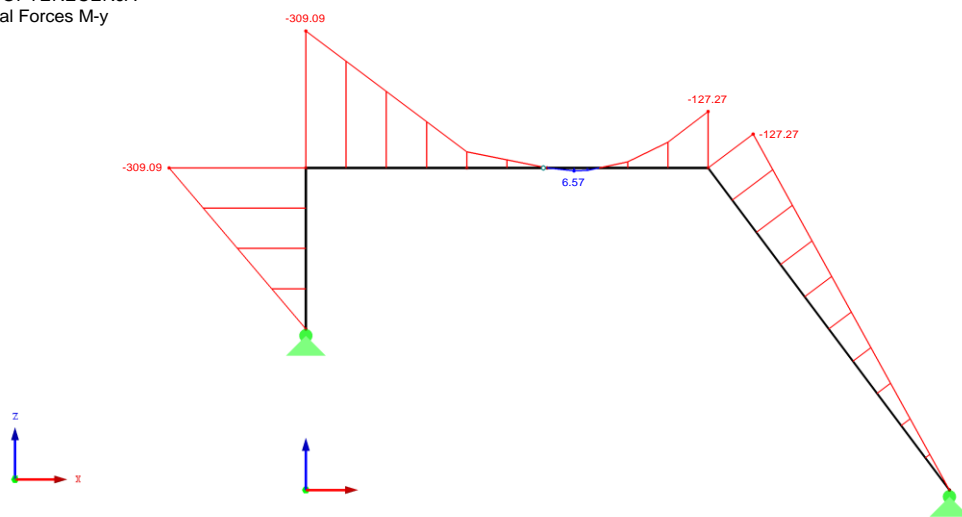
Slika 4.5. Opterećenja na trozglobni nosač – iznos uzdužnih sila



Slika 4.6. Opterećenja na trozglobni nosač – iznos poprečnih sila

LC 1: OPTERECENJA  
Internal Forces M-y

In Y-direction



Max M-y: 6.57, Min M-y: -309.09 [kNm]

Slika 4.7. Opterećenja na trozglobni nosač – iznos momenata

### 4.3. Rešetkasti nosač

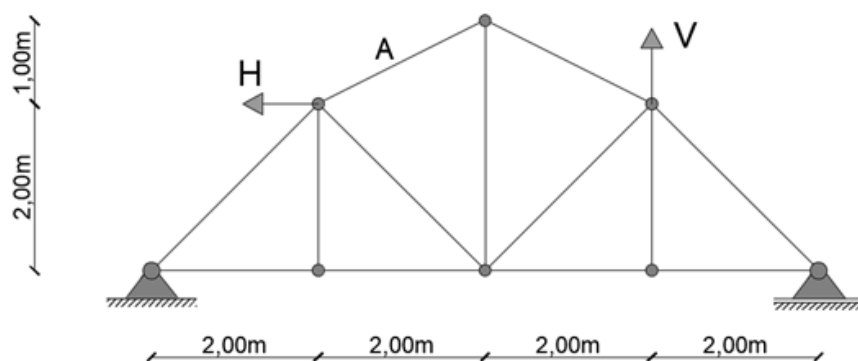
Usporedba iznosa sile u štapu A rješene metodom virtualnog rada sa rješenjem dobivenim u programu Dlubal RFEM 5.13.

#### ZADATAK;

Potrebno je odrediti silu u štapu A.

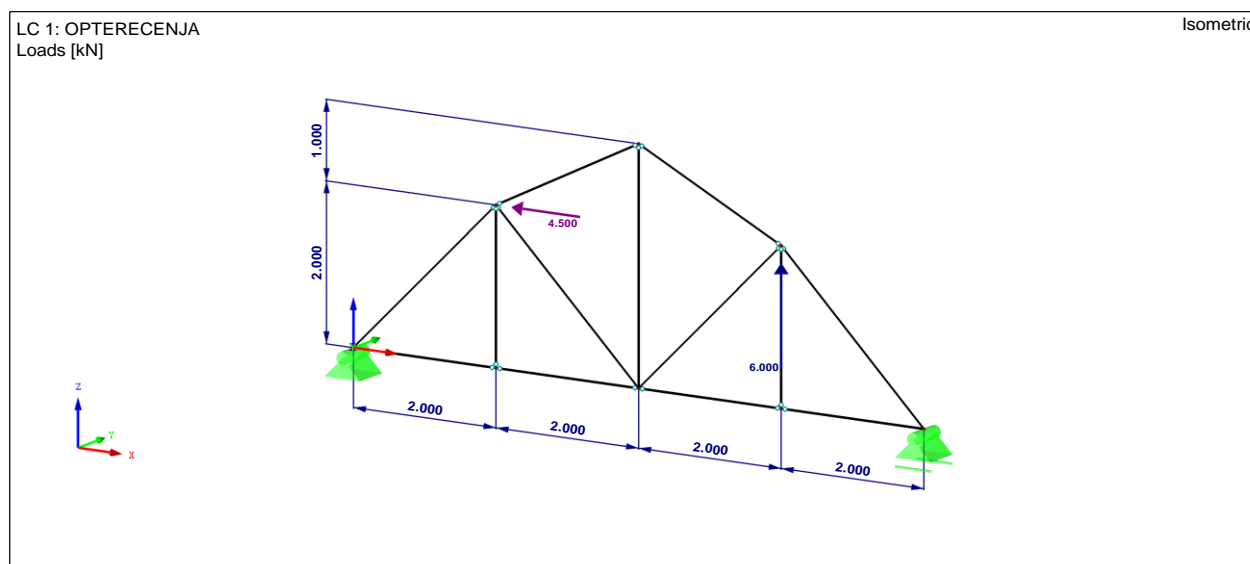
$$H=4,50 \text{ kN}$$

$$V=6,00 \text{ kN}$$



Podsjetnik : metodom virtualnog rada sila u štapu A iznosi ;

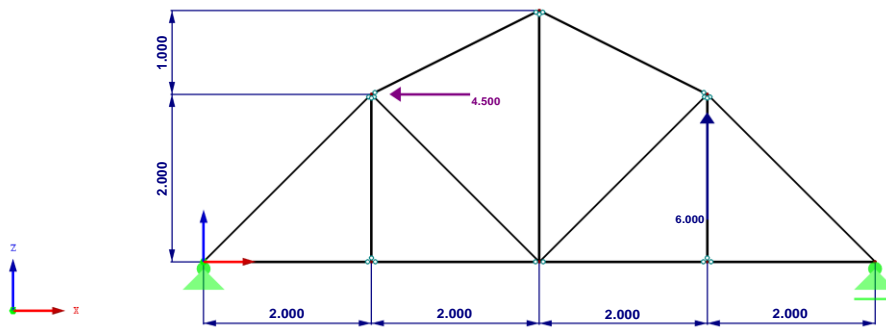
$$a = 3,916 \text{ kN}$$



Slika 4.8. Opterećenja na rešetkasti nosač – izometrija

LC 1: OPTERECENJA  
Loads [kN]

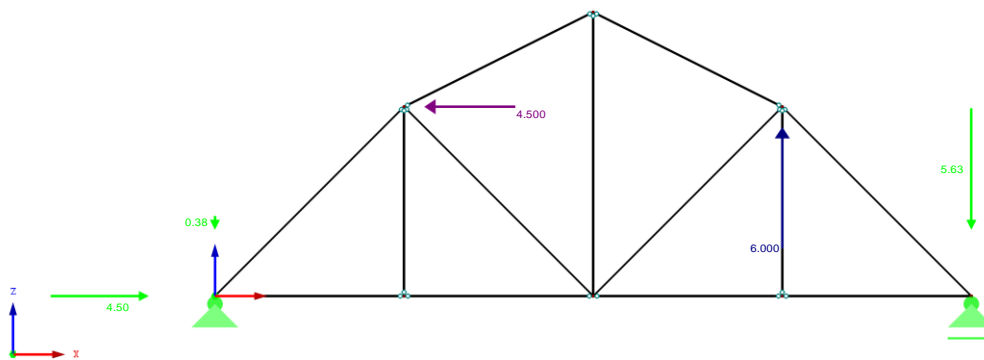
In Y-direction



Slika 4.9. Opterećenja na rešetkasti nosač – djelovanja u y smjeru

LC 1: OPTERECENJA  
Loads [kN]  
Support Reactions[kN]

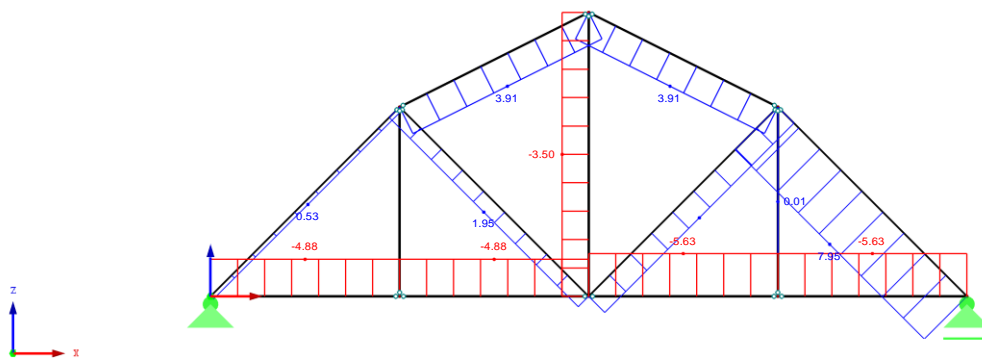
In Y-direction



Max P-X': 0.00, Min P-X': -4.50 kN  
Max P-Y': 0.00, Min P-Y': 0.00 kN  
Max P-Z': 5.63, Min P-Z': 0.38 kN

Slika 4.10. Opterećenja na rešetkasti nosač – iznos reakcijskih sila





Max N: 7.95, Min N: -5.63 [kN]

Slika 4.11. Opterećenja na rešetkasti nosač – iznos uzdužnih sila

Na slici 4.11. prikazane su uzdužne sile koje se javljaju u svim štapovima rešetkastog nosača, prema tome prikazana je i sila koja se javlja u štapu A. Prema rješenju prikazanom na slici 4.11. iznos te sile je jednak 3.91 kN, dok rješenje dobiveno metodom virtualnog rada iznosi 3.916 kN. Razlika između ova dva rezultata jednaka je nuli ili bi se eventualno javila u trećoj decimali.

## 5. Zaključak

Ovaj diplomski rad bavi se statičkim sustavima i metodom virtualnog rada koja se primjenjuje na statički određenim sustavima. Predstavljeni su uvjeti koje sustav mora ispunjavati da bi se smatrao geometrijski stabilnim i način na koji se određuje statička određenost sustava.

Metoda virtualnog rada primjenjena je na primjeru dva statički određena sustava, a to su trozglobni nosač i rešetkasti nosač. Detaljno je objašnjena sama metoda virtualnog rada i njen princip. Na samom kraju rada odrađena je usporedba rezultata koji su dobiveni pomoću metode virtualnog rada i rezultata koji su dobiveni pomoću software-a Dlubal RFEM 5.13. Prilikom usporedbe rezultata koji su dobiveni za trozglobni nosač, metodom virtualnog rada dobiven je rezultat  $R_{A,H} = 154,54 \text{ kN}$ , a software-om je dobiven rezultat tražene silu u iznosu od  $R_{A,H} = 154,55 \text{ kN}$ , dakle razlika između ova dva rezultata iznosi  $0,01 \text{ kN}$ . Dok, promatrajući statički sustav rešetkastog nosača metodom virtualnog rada za traženu silu dobivamo iznos  $a = 3,916 \text{ kN}$ , a pomoću programa Dlubal RFEM 5.13. za traženu silu dobivamo rezultat  $a = 3,91 \text{ kN}$ , dakle u ovom slučaju razlika između ova dva rezultata je jednaka 0 ili se javlja tek u trećoj decimali.

Prema ovim rezultatima, moguće je zaključiti da je metoda virtualnog rada poprilično točna metoda i da je primjenjiva kada na zadanom statički određenom sustavu imamo potrebu odrediti samo jednu traženu veličinu bez određivanja svih reakcijskih sila i unutarnjih sila koje nam za zadanu problematiku nisu potrebne. Ova metoda je i relativno brza i jednostavna za inženjere koji su upućeni u njenu provedbu.

## 6. Literatura

Knjige:

- [1] Fresli K.(2017.): Građevna statika 1., Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb
- [2] Darkov A., Kuznestov V. (1966.): Structural mechanics, Mir publishers Moscow

Bilješke s predavanja:

- [3] Uroš M. (2016.): Mehanika II, Dinamika-Kinematika i Kinetika; Kinematika sustava tijela-Virtualni rad, Katedra za statiku, dinamiku i stabilnost konstrukcija; Zavod za tehničku mehaniku, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zagreb

Internet izvori:

- [4] [https://www.grad.unizg.hr/download/repository/5.PRE\\_14\\_15.ppsx](https://www.grad.unizg.hr/download/repository/5.PRE_14_15.ppsx)
- [5] <https://learnaboutstructures.com/Bernoulli-Euler-Beam-Theory>
- [6] <https://www.dlubal.com/en/products/rfem-fea-software/what-is-rfem>

## Popis slika

- Slika 1.1. *Primjer statički određenog sustava*
- Slika 1.2. *Primjer statički neodređenog sustava*
- Slika 1.3. *Primjer mehanizma*
- Slika 3.4. *Reakcijske sile u ležajevima*
- Slika 1.5. *Zamijena krutih veza zglobovima - TROKUT*
- Slika 1.6. *Zamijena krutih veza zglobovima – ČETVEROKUT*
- Slika 1.7. *Dva štapa smještena duž ravne linije – NESTABILAN SUSTAV*
- Slika 1.8. *Dva štapa koja ne leže na istoj liniji– STABILAN SUSTAV*
- Slika 1.9. *Primjer jednostavne rešetke*
- Slika 1.10. *Primjeri sustava*
- Slika 1.12. *Primjer geometrijski stabilnog i nestabilnog sustava*
- Slika 4.1. *Rad sile  $\vec{F}$  na putu  $\vec{AB}$*
- Slika 2.2. *Infinitezimalni odsječak između poprečnih presjeka kroz točke  $x$  i  $x+dx$*
- Slika 2.3. *Orijentirane duljine pomaka promatranog dijela grede*
- Slika 2.4. *Prikaz vanjskih sila koje djeluju na promatrani dio grede*
- Slika 2.5. *Prikaz orijentiranih duljina virtualnih pomaka okomitih na os grede*
- Slika 2.6. *Zaokreti ravnina poprečnih presjeka*
- Slika 2.7. *Utjecaj topline*
- Slika 2.8. *Prikaz linearne funkcije*
- Slika 3.1. *Trozglobni okviri*
- Slika 3.2. *Rešetkasti sustavi*
- Slika 4.1. *Sučelje programa Dlubal RFEM 5.13.*
- Slika 4.2. *Opterećenja na trozglobni nosač - izometrija*
- Slika 4.3. *Opterećenja na trozglobni nosač – djelovanja u y smjeru*
- Slika 4.4. *Opterećenja na trozglobni nosač – iznos reakcijskih sila*
- Slika 4.5. *Opterećenja na trozglobni nosač – iznos uzdužnih sila*
- Slika 4.6. *Opterećenja na trozglobni nosač – iznos poprečnih sila*
- Slika 4.7. *Opterećenja na trozglobni nosač – iznos momenata*
- Slika 4.8. *Opterećenja na rešetkasti nosač – izometrija*
- Slika 4.9. *Opterećenja na rešetkasti nosač – djelovanja u y smjeru*
- Slika 4.10. *Opterećenja na rešetkasti nosač – iznos reakcijskih sila*
- Slika 4.11. *Opterećenja na rešetkasti nosač – iznos uzdužnih sila*



IZJAVA O AUTORSTVU  
I  
SUGLASNOST ZA JAVNU OBJAVU

Završni/diplomski rad isključivo je autorsko djelo studenta koji je isti izradio te student odgovara za istinitost, izvornost i ispravnost teksta rada. U radu se ne smiju koristiti dijelovi tuđih radova (knjiga, članaka, doktorskih disertacija, magistarskih radova, izvora s interneta, i drugih izvora) bez navođenja izvora i autora navedenih radova. Svi dijelovi tuđih radova moraju biti pravilno navedeni i citirani. Dijelovi tuđih radova koji nisu pravilno citirani, smatraju se plagijatom, odnosno nezakonitim prisvajanjem tuđeg znanstvenog ili stručnoga rada. Sukladno navedenom studenti su dužni potpisati izjavu o autorstvu rada.

Ja, ANTONELA MARGIĆ (ime i prezime) pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor/ica diplomskog rada pod naslovom ODREĐIVANJE GEOMETRIJSKE STABILNOSTI SLOŽENIH STATIČKIH SUSTAVA METODOM VIRTUALNOG RADA (upisati naslov) te da u navedenom radu nisu na neodovoljeni način (bez pravilnog citiranja) korišteni dijelovi tuđih radova.

Studentica:  
(ANTONELA MARGIĆ)

Antonela Margić  
(vlastoručni potpis)

Sukladno Zakonu o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju završne/diplomske radove sveučilišta su dužna trajno objaviti na javnoj internetskoj bazi sveučilišne knjižnice u sastavu sveučilišta te kopirati u javnu internetsku bazu završnih/diplomskih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice. Završni radovi istovrsnih umjetničkih studija koji se realiziraju kroz umjetnička ostvarenja objavljuju se na odgovarajući način.

Ja, ANTONELA MARGIĆ (ime i prezime) neopozivo izjavljujem da sam suglasan/na s javnom objavom diplomskog rada pod naslovom ODREĐIVANJE GEOMETRIJSKE STABILNOSTI SLOŽENIH STATIČKIH SUSTAVA METODOM VIRTUALNOG RADA (upisati naslov) čiji sam autor/ica.

Studentica:  
(ANTONELA MARGIĆ)

Antonela Margić  
(vlastoručni potpis)