

# Prilog analizi proračuna temeljnih nosača analitičkim i numeričkim metodama

---

**Belečetić, Antonio**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University North / Sveučilište Sjever**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:122:269752>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-09**



*Repository / Repozitorij:*

[University North Digital Repository](#)





**Sveučilište  
Sjever**

**Završni rad br. 465/GD/2023**

**Prilog analizi proračuna temeljnih nosača analitičkim i  
numeričkim metodama**

**Antonio Belečetić, 0336043675**

Varaždin, rujan 2023. godine





# Sveučilište Sjever

Odjel za Graditeljstvo

Završni rad br. 465/GD/2023

## **Prilog analizi proračuna temeljnih nosača analitičkim i numeričkim metodama**

**Student**

Antonio Belečetić, 0336043675

**Mentor**

Božo Soldo, prof.dr.sc.

# Prijava završnog rada

## Definiranje teme završnog rada i povjerenstva

ODJEL Odjel za Graditeljstvo

STUDIJ Preddiplomski stručni studij graditeljstva

PRISTUPNIK Antonio Belečetić

MATIČNI BROJ 03336043675

DATUM 04.09.2023.

KOLEGIJ Temeljenje

NASLOV RADA Prilog analizi proračuna temeljnih nosača analitičkim i numeričkim metodama

NASLOV RADA NA ENGL. JEZIKU Enclosure to analysis of foundation support calculations using analytical and numerical methods

MENTOR dr.sc. Božo Soldo

ZVANJE red. prof.

ČLANOVI POVJERENSTVA

1. doc.dr.sc. Aleksej Anisin
2. prof.dr.sc. Božo Soldo
3. doc.dr.sc. Goran Puž
4. izv.prof.dr.sc. Bojan Đurin
- 5.

## Zadatak završnog rada

BROJ 465/GD/2023

OPIS

Pod temom Završnog rada:

"PRILOG ANALIZI PRORAČUNA TEMELJNOG NOSAČA ANALITIČKIM I NUMERIČKIM METODAMA"

u radu je potrebno prikazati analizu proračuna temeljnih nosača s više metoda s naglaskom na analitičku metodu jednoparametarskog na dva tipa zadatka, po mogućnosti i ostalih metoda i uz više mogućih uvjeta.

Načelni sadržaj rada sastojao bi se od poglavlja:

- SADRŽAJ
- UVOD
- PLITKI TEMELJI
- ANALITIČKE I NUMERIČKE METODE PRORAČUNA PREDMETNIH METODA
- PRIMJERI PRORAČUNA SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA
- PRORAČUN U RAČUNALNOM PROGRAMU TOWER 8.4. DEMO
- REZULTATI I ANALIZA PRORAČUNA
- ZAKLJUČAK
- LITERATURA

ZADATAK URUČEN

13.09.2023.



POTPIS MENTORA

*Božo Soldo*

## Sažetak

Za osiguranje stabilnosti temelja objekta i izbjegavanje problema tijekom gradnje, neophodno je kvalitetno riješiti interakciju između temelja i tla u svim fazama gradnje. Pored samog dimenzioniranja, količine armature i vrste temelja, interakcija temelja i tla igra ključnu ulogu u proračunu temelja. S obzirom na složenost mehaničkih karakteristika tla, često je potrebno primijeniti pojednostavljena u proračunu kako bi se izbjegli nerješivi problemi ili nerealno skupa rješenja. Većina analitičkih metoda bazira se na pretpostavci da je tlo homogen, linearno elastičan i izotropan poluprostor. U ovom radu najprije se općenito opisuju temeljni nosači, njihova podjela i primjena, a potom se provodi proračun na jednoparametarskom modelu tla koji tlo zamjenjuje nizom nezavisnih opruga čiju krutost predstavlja koeficijent reakcije podloge koji je potreban u proračunu. Koeficijent reakcije podloge kao najbitniji parametar u proračunu naprezanja i slijeganja temeljnog nosača dobio se preko omjera kontaktnog naprezanja između nosača i tla i početnog slijeganja koji se iščitava iz Bjerumovih dijagrama. Sam proračun provodi se na temeljnom nosaču opterećenom u sredini koncentriranom silom i temeljnom nosaču koji je na svojim rubovima opterećen koncentriranom silom, te su takvi primjeri najčešći u praksi. Također proveden je proračun istih u računalnom programu Tower 8.4. Demo i metodom konačnih razlika koja pri proračunu uzima u obzir i djelovanje ostalih točaka na promatranu. Na kraju samog rada napravljena je usporedba dobivenih rezultata iz kojih je vidljivo da su odstupanja računalnog programa i jednoparametarskog modela tla minimalna, dok je kod rezultata dobivenih metodom konačnih razlika vidljivo veće odstupanje od prethodne dvije metode.

**Ključne riječi:** Jednoparametarski model tla, temeljni nosač, analitička metoda, metoda konačnih razlika

# **ENCLOSURE TO ANALYSIS OF FOUNDATION SUPPORT CALCULATIONS USING ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS.**

## **Abstract**

To ensure the stability of the building foundation and avoid problems during construction, it is essential to properly address the interaction between the foundation and the soil in all stages of construction. In addition to the actual sizing, quantity of reinforcement, and type of foundation, the interaction between the foundation and soil plays a crucial role in the foundation design. Due to the complexity of the mechanical characteristics of the soil, simplifications are often applied in calculations to avoid unsolvable problems or unrealistically expensive solutions. Most analytical methods are based on the assumption that the soil is homogeneous, linearly elastic, and an isotropic half-space. This paper first provides a general description of foundation supports, their classification and application, and then conducts a calculation using a one-parameter soil model that replaces the soil with a series of independent springs whose stiffness represents the soil reaction coefficient required in the calculation. The soil reaction coefficient, as the most important parameter in stress and settlement calculation of the foundation support, is obtained through the ratio of contact stress between the support and soil and initial settlement, which is read from Bjerum's diagrams. The calculation is demonstrated on a foundation support loaded with a concentrated force in the center and a foundation support loaded with a concentrated force on its edges, which are the most common examples in practice. The same calculations were also performed in the Tower 8.4 computer program and using the finite difference method, which takes into account the effect of other points on the observed point during calculation. Finally, a comparison of the obtained results was made, which shows that the deviations between the computer program and the one-parameter soil model are minimal, while the deviations in the results obtained by the finite difference method are noticeably higher than the previous two methods.

**Keywords:** One-parameter soil model, foundation support, analytical method, finite difference method.

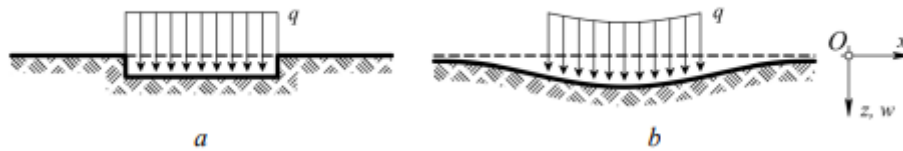
# Sadržja

<b>1. UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2. TEMELJI</b> .....	<b>2</b>
2.1. Općenito .....	2
2.2. Klasifikacija temeljnih nosača prema parametru krutosti .....	3
<b>3. PRIMJER SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA</b> .....	<b>4</b>
3.1. Temeljni nosač- privremene građevine .....	4
3.2. Temeljni nosači u lukama.....	5
3.3. Temeljni nosači – temelji zgrada.....	6
3.4. Željeznička pruga, nosač na elastičnoj podlozi .....	8
<b>4. ANALITIČKE I NUMERIČKE METODE PRORAČUNA PREDMETNIH METODA</b> .....	<b>9</b>
4.1. Općenito .....	9
4.2. Jednoparametarski model tla .....	11
4.3. Metoda konačnih razlika MKR .....	12
<b>5. PRIMJERI PRORAČUNA SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA</b> .....	<b>14</b>
5.1. Primjer proračuna savitljivog temeljnog nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini .	14
5.2. Primjer proračuna savitljivog temeljnog nosača opterećenog koncentriranim silama na krajevima nosača .....	24
5.3. Metoda konačnih razlika na savitljivom nosaču opterećenog koncentriranom silom na sredini .....	33
5.4. Metoda konačnih razlika na savitljivom nosaču opterećenom koncentriranim silama na krajevima .....	35
<b>6. PRORAČUN U RAČUNALNOM PROGRAMU TOWER 8.4 DEMO</b> .....	<b>37</b>
<b>7. REZULTATI I ANALIZA PRORAČUNA</b> .....	<b>45</b>
7.1. Usporedba rezultata dobivenih različitim metodama proračuna .....	45
<b>8. ZAKLJUČAK</b> .....	<b>51</b>
<b>9. LITERATURA</b> .....	<b>52</b>
<b>10. POPIS SLIKA</b> .....	<b>53</b>
<b>11. POPIS TABLICA</b> .....	<b>55</b>



## 1. UVOD

„Analiza savijanja nosača na elastičnoj podlozi (temeljni nosači) razvila se na pretpostavci da su reakcijske sile podloge u ovom slučaju tla proporcionalne progibu grede na tom mjestu. Karakteristike vertikalne deformacije podloge definiraju se pomoću identičnih, neovisnih, gusto smještenih i linearno elastičnih opruga. Krutost tih opruga predstavlja koeficijent reakcije podloge. U povijesti ovaj model razvijen je za analizu željezničkih pruga, vrlo je jednostavan, ali ne pokazuje karakteristike mnogih praktičkih temelja na precizan način. Jedna od najvažnijih nedostataka modela (Winklerov model) je pojava prekida između opterećenog i neopterećenog dijela površine temelja. U stvarnosti, površina tla ne pokazuje nikakav prekid (Slika 1.1.).“ [1]



**Slika 1.1.** Deformacija elastičnih temelja pod jednolikim naprezanjem a) Winklerova pretpostavka b) Stvarnost [1]

U ovom radu naglasak će biti na proračunu temeljnih nosača na jednoparametarskom modelu tla, te usporedbe s metodom konačnih razlika i najčešćim komercijalnim softverskim programom. Sam proračun započinje se diferencijalnom jednačinom ravnog elastičnog nosača poprečno opterećenog na svoju os. Povezuje se slijeganje temeljnog tla i reakcijski tlakovi, te koriste jednačbe za proračun slijeganja temeljnog tla, momenta savijanja, poprečne sile i reakcije tla. Uz jednoparametarski model tla, proračun je proveden metodom konačnih elemenata i programom Tower Demo 8.4.. Na kraju samog rada napravljena je usporedba rezultata dobivenih analitičkom, numeričkom metodom proračuna i rezultata dobivenih u računalnom programu Tower 8.4. Demo.

Kod jednoparametarskog modela kao poznati glavni nedostatak je odabir koeficijenta reakcije podloge. Kod metode konačnih razlika taj nedostatak ne postoji. Važno je imati na umu da je u praksi važno provoditi proračune s više metoda kako bi se potvrdila valjanost konačnog proračuna, iz ovog razloga došlo se na ideju ovog rada.

## 2. TEMELJI

### 2.1. Općenito

„Temelj je dio konstrukcije koji omogućava da se sile i momenti reakcija konstrukcije raspodijele na toliku površinu tla kolika je potrebna kako bi se postigla posebna sigurnost od sloma tla i da su deformacije kompatibilne s funkcijom građevine. U temeljenju se proučavaju promjene napona i deformacije u tlu ispod temelja te međusobno djelovanje građevine i tla kako bi se temelj mogao što povoljnije oblikovati.“ [2]

Vrsta i intenzitet opterećenja koje temelj mora prenijeti na tlo preko kontaktne površine, vrste i karakteristike tla, nivo podzemne vode, položaj građevine u odnosu na postojeće građevine utječu na odabir vrste i oblika temelja. Dubina temelja predstavlja visinsku razliku između kontaktne površine i površine tla, a prema dubini temelji se dijele na:

- Plitki temelji
- Duboki temelji
- Kombinirani temelji (npr. Ploča s pilotima)

Plitki temelji prenose opterećenje na tlo samo preko kontaktne površine, a dijelimo ih na:

- Temelji samci
- Temeljne trake
- Temeljni nosači
- Temeljni roštilji
- Temeljne ploče

Ponašanje plitkih temelja ovisi o njihovoj krutosti. Podjela se može izvršiti na:

- Krute plitke temelje (samci i trake)
- Savitljive plitke temelje (temeljni nosači, roštilji, ploče)

U slučaju kada tlo treba prenesti velike horizontalne sile koriste se duboki temelji koji se dijele na:

- Betonske dijafragme
- Temelji na bunarima
- Temelji na kesonima
- Temelji na sanducima
- Pilot

## 2.2. Klasifikacija temeljnih nosača prema parametru krutosti

„Klasifikacija temeljnih nosača konačne dužine, na Winklerovoj podlozi, vrši se prema koeficijentu savitljivosti  $\alpha L$ . Ako je koeficijent savitljivosti temeljnog nosača veći, nosač je savitljiviji i obrnuto (manje savitljiv, odnosno krući). Na savitljivom nosaču (veliki  $\alpha L$ ), utjecaji se prenose na malu udaljenost od sile, dok se kod krutih nosača (mali  $\alpha L$ ), utjecaji prenose na veću udaljenost od sile. Uobičajena klasifikacija temeljnih nosača na Winklerovoj podlozi, u funkciji koeficijenta savitljivosti  $\alpha L$ , prikazana je u tablici 2.1.“ [3]

Drugim riječima koeficijent savitljivosti  $\alpha L$  je mjera fleksibilnosti nosača tj. Sposobnosti nosača da se prilagodi neravnomjernoj raspodjeli naprezanja u tlu. Što je koeficijent savitljivosti veći, to je nosač fleksibilniji i manje osjetljiv na lokalne utjecaje, a što je koeficijent savitljivosti manji, to je nosač krući i više osjetljiv na lokalne utjecaje.

**Tablica 2.1.** Klasifikacija temeljnih nosača prema parametru krutosti  $\alpha L$  [3]

Klasifikacija (Hetenyi, 1936.)	$\alpha L$	Klasifikacija (Vesić, 1961.)	$\alpha L$
Kratke (krute) grede	$< 0,80$	Kratke (krute) grede	$< 0,80$
Greda srednje dužine	$0,80$ $– \pi$	Greda srednje dužine	$0,80$ $– 2,25$
-	-	Srednje dugačke grede	$2,25$ $– 5,00$
Dugačke (Savitljive) grede	$> \pi$	Dugačke (savitljive) grede	$> 5,00$

Pri čemu je:

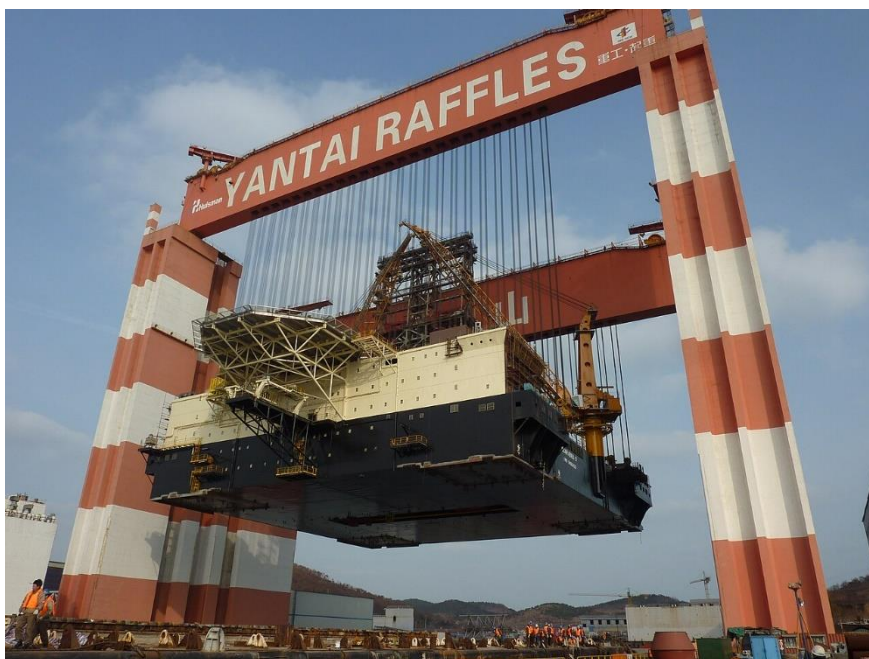
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s \cdot B}{4EI}}$$

### 3. PRIMJER SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA

#### 3.1. Temeljni nosač- privremene građevine

Temeljni nosači korišteni su za temeljenje privremenih građevina na gradilištu, naročito kao temelji za staze kranških dizalica. U građevinskim projektima koriste se kranške dizalice za potrebe vertikalnog i horizontalnog transporta na gradilištu. Kako bi tlo podnijelo velika opterećenja (vlastitu težinu dizalice, težinu tereta i utjecaj vjetra), koja dizalica prenosi na tlo, potreban je čvrst temelj. Izrada dobrog temelja zahtjeva određena financijska sredstva koja direktno opterećuju trošak projekta. Osim toga inženjeri na gradilištu su izloženi dodatnom izazovu kako brzo i točno proračunati i dimenzionirati ekonomične i sigurne temelje za kranšku dizalicu. Često, zbog ekonomskih razloga ili nedovoljne svijesti o važnosti privremenih temelja za kranške dizalice, njihova važnost se zanemaruje i ne pridaje im se potrebna pozornost pri izradi i proračunu.

Na slici 3.1. prikazana je portalna dizalica Taisun, najveća portalna dizalica nosivosti 20000 tona koja se koristi u brodogradilištu Yantai Raffles u Kini. Temelji dizalice prenose na tlo opterećenja od težine dizalice, utjecaja vjetra, ali i tereta koji se na njoj. Proračun i izrada takvog temeljnog nosača zahtjeva ozbiljan pristup kako bi se spriječile moguće ljudske žrtve i materijalne štete



**Slika 3.1.** Portalna dizalica Taisun nosivosti 20000

Izvor: <https://th.bing.com/th/id/OIP.CV56V2F96PnqkF-pdY4IsgHaFj?pid=ImgDet&rs=1>

### 3.2. Temeljni nosači u lukama

Temeljni nosači se također često koriste u teretnim lukama (Slika 3.2.). Sa sve većim brodovima i istovarom kontejnera, lučne dizalice su sve veće i brže. To zahtjeva kvalitetne temelje koju će pružiti siguran oslonac dizalicama, bez diferencijalnih slijeganja.

Staze po kojima se kreću dizalice montiraju se na temeljne nosače koji bez velikih deformacija ili sloma moraju na tlo sve sile koje na dizalicu djeluju.

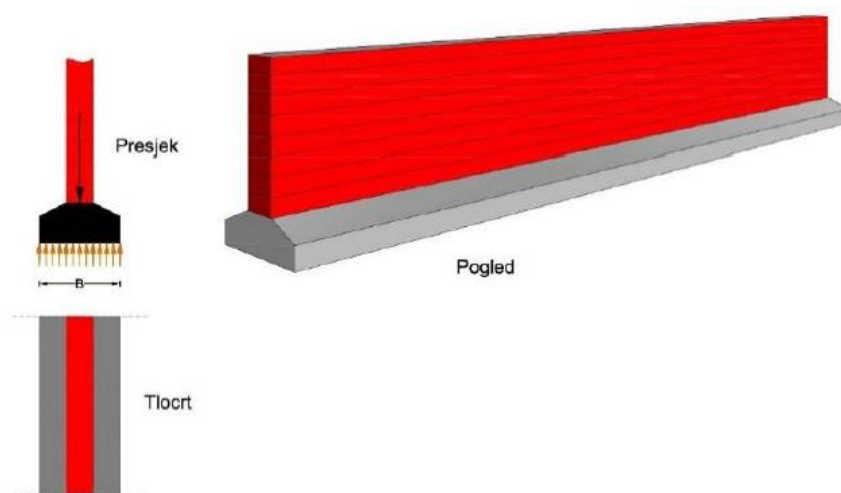


**Slika 3.2.** Dizalica u luci, Izvor: <http://ba.beamcrane.com/port-crane/portal-crane/high-efficient-rail-mounted-portal-crane.html>

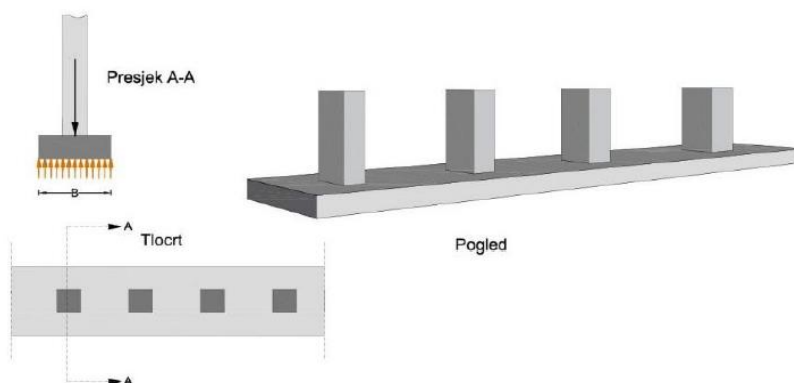
### 3.3. Temeljni nosači – temelji zgrada

Temeljne trake distribuiraju teret zidova ili stupova na tlo. Za veća opterećenja, temeljne trake se učvršćuju nosačima, gredama, obično na gornjoj strani i takav sklop naziva se temeljni nosač. Temeljni nosači su kontinuirani temeljni koji preuzimaju točkasto opterećenje stupova ili kontinuirano opterećenje zidova. Tehnički i ekonomski je jednostavnije i isplativije izraditi temeljne nosače, nego više odvojenih temelja, pogotovo ako su temelji blizu jedan drugome. Oblici temeljnih nosača ovise o konstrukcijskim karakteristikama objekta i mogu biti različiti. Geometrijski se oblikuju tako da se pokuša uspostaviti preklapanje težišta površine temelja s djelovanjem ukupne rezultatne sile na temeljni nosač. Zato se ponekad, kada sile u stupovima nisu jednake, a želi se postići jednako naprezanje na tlo ispod temelja, rade trapezni oblici.

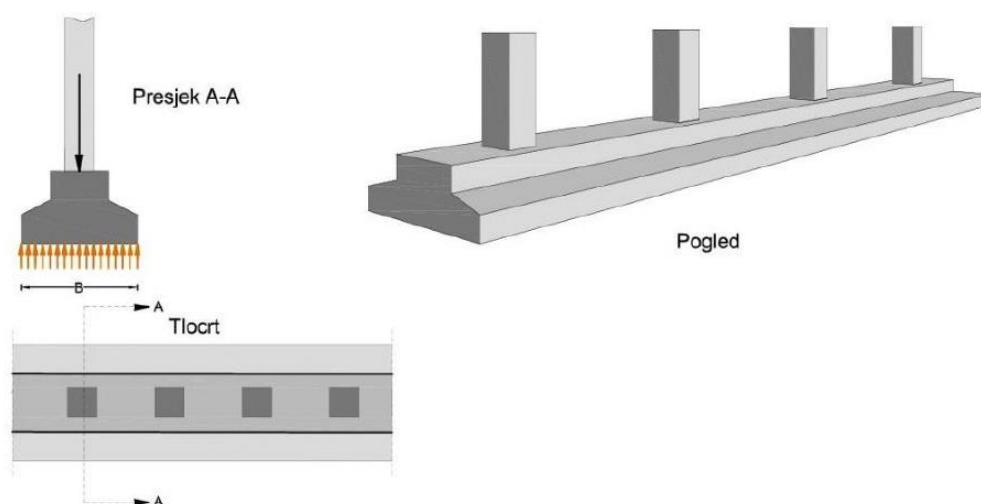
Na slici 3.3. prikazani su tipovi temeljnih traka i temeljnih nosača:



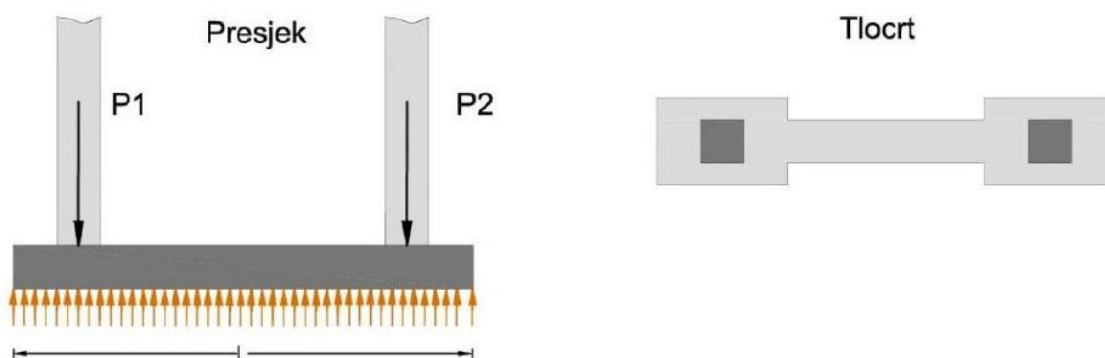
a) temeljna traka ispod zida



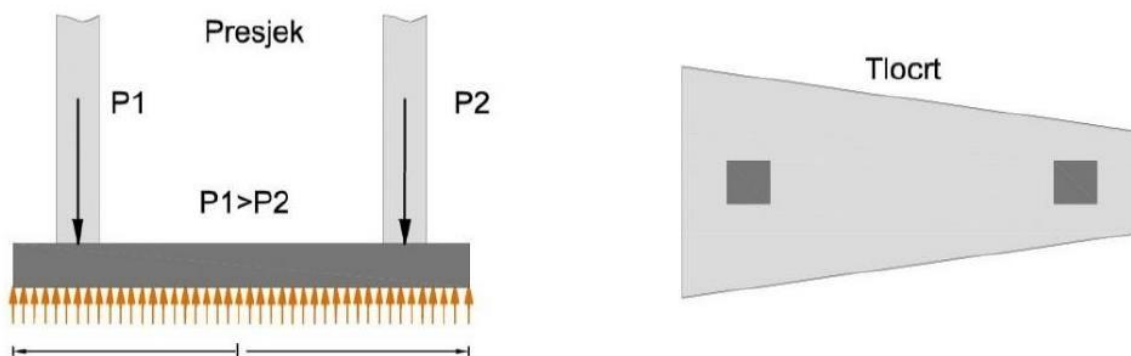
b) temeljni nosač ispod pojedinačnih stupova



c) Temeljni nosač ojačan gredom s gornje strane



d) Temeljni samci spojeni temeljnim nosačem



e) Trapezni oblik temeljnog nosača

**Slika 3.3.** Tipovi temeljnih traka i nosača

Izvor: <https://zir.nsk.hr/islandora/object/unin:3156>



### 3.4. Željeznička pruga, nosač na elastičnoj podlozi

Željezničku prugu kao nosač na elastičnoj podlozi, prvi je praktički primijenio Zimmerman, dok je Winkler 1875. godine zasnovao koncept modula reakcije podloge i uveo ga u primjenu. Winklerova teorija od tada se koristi za proračun savitljivih temeljnih konstrukcija, kao što su temeljni roštilji, temeljni nosači, temelje ploče i slično.



**Slika 3.4.** Željeznička pruga- nosač na elastičnoj podlozi,

Izvor: <https://icz.hr/2021/07/23/zbog-remonta-lijevi-kolosijek-pruge-drzavna-granica-savski-marof-zagreb-gk-bit-ce-zatvoren-za-promet/>



**Slika 3.5.** Željeznička pruga- nosač na elastičnoj podlozi,

Izvor: <https://www.tportal.hr/biznis/clanak/nakon-50-godina-gradi-se-nova-zeljeznicka-pruga-20150714>



## 4. ANALITIČKE I NUMERIČKE METODE PRORAČUNA PREDMETNIH METODA

### 4.1. Općenito

„Ključni aspekt proračuna elastičnih temeljnih konstrukcija, koji se danas često susreću u praksi, je sposobnost inženjera da 'osjeti' i odabere najpovoljniju metodu izračuna koje će dati najrealnije rezultate. Tlo, kao izuzetno heterogen i anizotropan materijal, ne može se definirati jednostavnim odnosima i matematičkim izrazima, te proračun nosivosti tla zahtijevaju određena pojednostavljenja, jer bi u suprotnom problem bio nerješiv ili bi rješenje bilo ekonomski neopravdano. Imajući to u vidu, najveći broj rješenja je razvijen za tlo kao linearno-elastičan, homogen i izotropan kontinuum. Ova rješenja su relativno jednostavna, međutim zbog grube idealizacije, u nekim slučajevima mogu dati nerealne ili potpuno pogrešne rezultate. Zbog toga, svaki rezultat treba prije primjene kritički preispitati sa aspekta ulaznih pretpostavki i učinjene idealizacije, kojim je dat fizički model, sveden na pojednostavljeni matematički model. U tom smislu, svaki rezultat treba tumačiti kao posljedicu proračuna idealiziranog, a ne realnog fizičkom modela.“ [3]

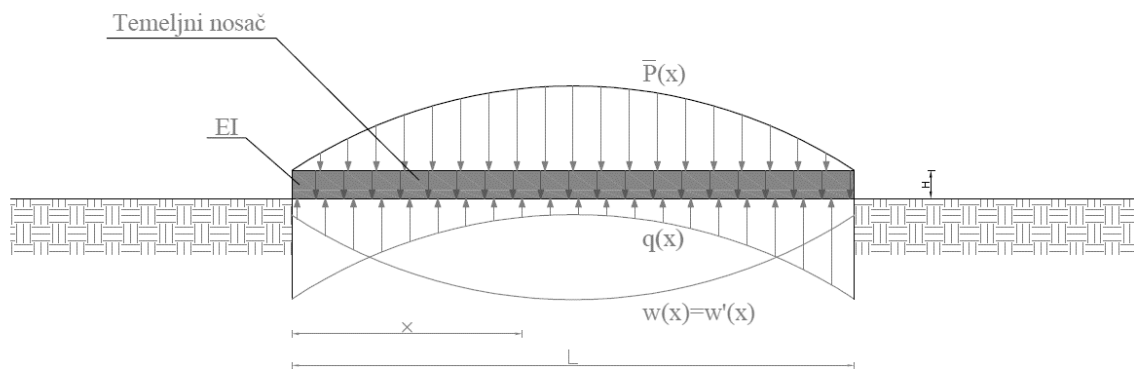
Određivanje realnog modela interakcije temeljnog tla i elastičnih temeljnih konstrukcija zahtjeva složenu analizu čiji je rezultat što realnija raspodjela reakcije podloge ( $q$ ) po površini temeljnog nosača ( $A$ ).

Prema [1], proračun naprezanja na kontaktu temelja i temeljno tla izvodi se na više načina:

- Linearno deformabilno tlo, poznato kao Winklerov poluprostor
- Linearno elastičan homogen beskonačan poluprostor
- Nehomogeno i nelinearno stišljivo tlo

Raspodjela naprezanja na kontaktnoj plohi temelja ovisi o deformacijskim osobinama tla prikazanima kao slijeganje i krutosti temelja prikazanom kao modul elastičnosti pomnožen sa momentom tromosti presjeka temelja. Pretpostavka je da vertikalni pomak točke po osi nosača odgovara slijeganju ispod te točke. Temeljem prethodnih pretpostavki došlo se do diferencijalne jednadžbe elastične grede poprečno opterećene na svoju os, a ona prema [2] glasi:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = \bar{p}(x)$$



**Slika 4.0.** *Elastični temeljni nosač na tlu*

$w$  – progib nosača (m)

$w'$  – slijeganje ispod nosača

$q$  – reakcija tla

$g$  – vlastita težina nosača

$\bar{p}(x)$  – naprezanje u smjeru pozitivnog progiba

Diferencijalnom elastične grede poprečno opterećene dobivena je veza između pomaka točke na osi temeljnog nosača  $w'(x)$  i slijeganja temeljnog nosača. Veza ovisi o elastičnim osobinama nosača i deformacijskim osobinama tla.



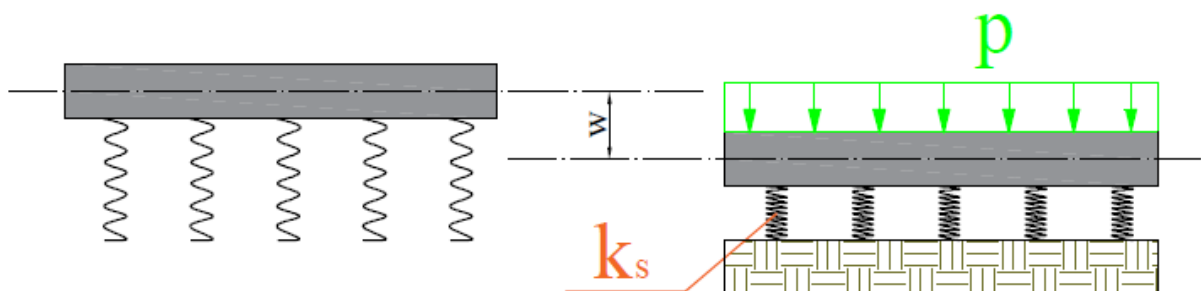
**Slika 4.1.** *Armatura elastičnih temeljnih nosača na tlu*

Izvor: <https://gradnja-tamara.hr/project/betoniranje-temelja-i-deka/>

## 4.2. Jednparametarski model tla

„Jednparametarski model tla, najjednostavniji je model tla. Zasnovan je na konceptu modula reakcije tla. U mehaniku tla, ovaj model uveo je Winkler, a Zimmerman ga je prvi put praktično primijenio na proračunu napona u željezničkim tračnicama, koju su oslonjene na pragove, a koji leže na sloju tucanika. Zimmermann je željezničke tračnice modelirao kao kontinuirani nosač na nizu deformabilnih oslonaca. Pošto su pragovi međusobno nezavisni i dovoljno udaljeni, opterećenje na jednom osloncu ima utjecaj samo na taj oslonac dok je slijeganje susjednih oslonaca nula. Ovo je osnovna pretpostavka u konceptu modula reakcije tla ili Winklerove podloge. Pošto se podloga opisuje jednim parametrom, naziva se i jednparametarski model tla.“ [3]

„Postupno se ta teorija počela primjenjivati i u proračunu savitljivih temeljnih konstrukcija. U prvoj polovici XX. Stoljeća, metoda je proširena na proračun pilota i zaštitnih zidova u tlu opterećenih bočnim silama. Za razliku od temeljnih nosača gdje se tlo modelira sistemom vertikalnih elastičnih opruga, kod bočno opterećenih pilota i savitljivih zaštitnih zidova u tlu, tlo se modelira sistemom horizontalnih elastičnih opruga.“ [3]



Slika 4.2. Jednparametarski model tla

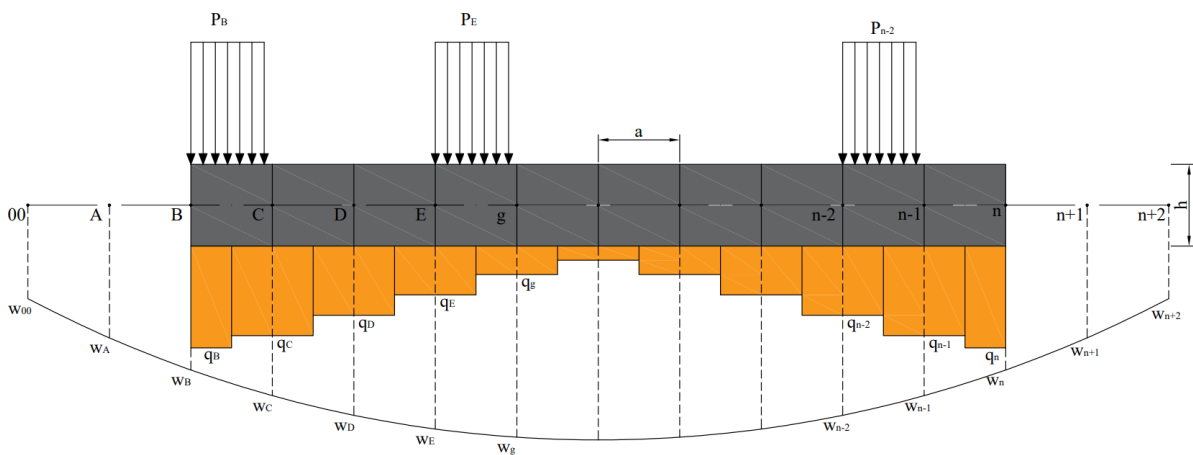
„Pretpostavka o tlu kao sistemu neovisnih opruga (Slika 4.2.) ne odgovara realnom ponašanju tla. Tlo je kontinuum, u kojem se utjecaj iz jedne točke prenosi na okolne točke. Međutim Winklerov model se zbog jednostavnosti zadržao se u upotrebi do danas i može se koristiti za neke jednostavne inženjerske proračune.“ [3]

$$p = k \cdot w$$

$$k = \frac{p}{w}$$

### 4.3. Metoda konačnih razlika MKR

„Metoda konačnih razlika zamjenjuje glavnu diferencijalnu jednadžbu sa algebarskom jednadžbom koja povezuje pomak promatrane točke u odnosu na susjedne točke. Ona se postavlja u svaku točku mreže na površini nosača i na taj način nastaje sustav algebarskih jednadžbi koji se zasniva na pravokutnom koordinatnom sustavu, opterećenju te fizičkim i elastičnim konstantama opterećenog nosača. Ova opterećenja-deformacija jednadžba uspostavlja linearnu vezu između opterećenja u žarišnoj točki i nepoznatu veličinu deformacije nosača u toj točki i ostalim aktivnim točkama mreže. Pogošćivanjem mreže povećava se red matrice sustava, odnosno raste složenost algoritma čije bi rješavanje bilo gotovo nemoguće bez upotrebe računala.“ [11]



Slika 4.3. Temeljni nosač podijeljen na  $n$  elemenata s promatranom točkom na rubu elementa

Jednadžba diferencijalne točke  $m$  glasi:

$$\frac{EI}{\alpha^4} = (w_{m-2} - 4w_{m-1} + 6w_m - 4w_{m+1} + w_{m+2}) + q_m = p_m + g$$

Diferencijalna jednadžba u matričnom obliku glasi:

$$[D][U] + [\lambda]\{q\} = \{f\}$$

Pri čemu je:

$[D]$  – matrica diferenčnog operetora

$[U]$  – matrica utjecajnih slijevanja

$[\lambda]$  – dijagonalna matrica

$\{q\}$  – nepoznati vektor reakcije tla

$\{f\}$  – vektor vanjskog djelovanja

U matričnoj jednadžbi diferencijalne grede nepoznati su samo reakcijskih pritisci tla na nosač.

Ako se u matričnu jednadžbu diferencijalne grede uvede supstitucija  $[D][U] + [\lambda] = A$  dobije se sljedeće:

$$[A]\{q\} = \{f\}$$

Iz čega je dobiven izraz za nepoznati vektor reakcije tla

$$\{q\} = [A]^{-1}\{f\}$$

Nakon što se riješi sustav jednadžbi, izračunaju se slijeganja točaka u čvorovima pomoću jednadžbe:

$$w = [U]\{q\}$$

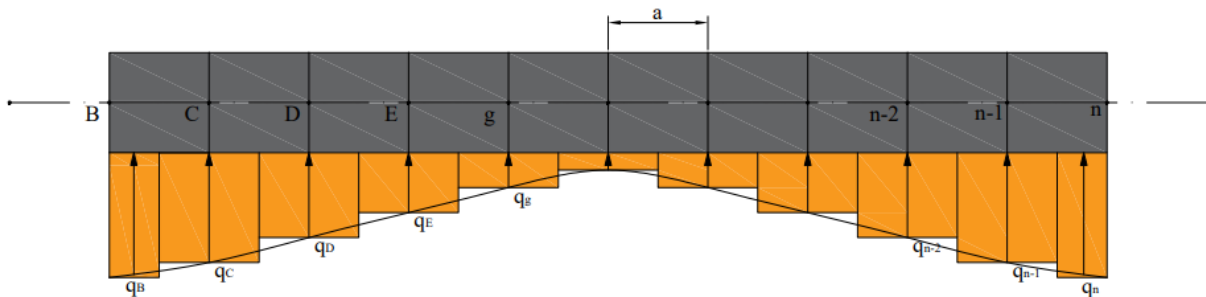
Momente savijanja dobivamo pomoću jednadžbe:

$$M_m = -\frac{EI}{\alpha^2}(w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1})$$

i poprečna sila:

$$Q_m = -\frac{EI}{2\alpha^3}(w_{m-2} + 2w_{m-1} - 2w_{m+1} + w_{m+2})$$

Ovim jednadžbama riješena su sva slijeganja, momenti savijanja i poprečne sile u svim diskretnim točkama.



Slika 4.4. Reakcija tla ispod nosača

Da bi se provjerila točnost rezultata, označena površina na nosaču i suma sila koje djeluju na nosač moraju biti jednake .

$$\int_0^L q_i dx = \frac{q_1 + q_2}{2} \alpha + \frac{q_2 + q_3}{2} \alpha + \dots + \frac{q_{n-1} + q_n}{2} \alpha = P_1 + P_2$$

## 5. PRIMJERI PRORAČUNA SAVITLJIVIH TEMELJNIH NOSAČA

### 5.1. Primjer proračuna savitljivog temeljnog nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini

Diferencijalna jednadžba ravnog elastičnog nosača poprečno opterećenog na svoju os povezuje nepoznatu funkciju pomaka nosača i poznato vanjsko opterećenje:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = \bar{p}(x)$$

$$\bar{p}(x) = p(x) + g - q(x)$$

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + q(x) = p(x) + g$$

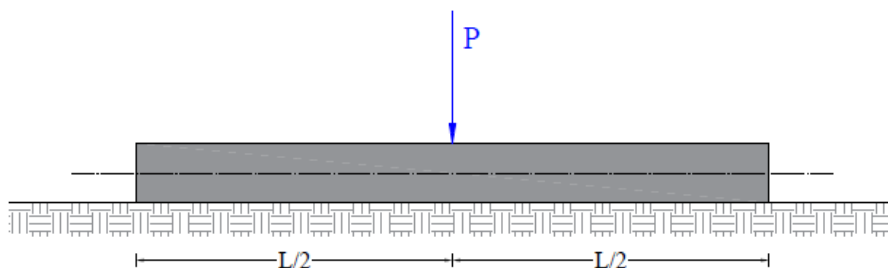
Dobivena jednadžba povezuje krutost i vanjsko opterećenje s savijanjem nosača. Dvije nepoznanice  $q(x)$  i  $w(x)$  javljaju se u jednadžbi te je ista je nerješiva. Kako bi se povezale nepoznate funkcije potrebno je uvesti drugu jednadžbu

Kao dodatnu jednadžbu iskoristit će se osnovna pretpostavka Winkler-ovog modela koja daje vezu pomaka  $w$  i reaktivnog pritiska tla  $q$ :

$$q(x) = k_s \cdot w(x)$$

Za slučaj da je nosač na elastičnoj podlozi opterećen samo koncentriranim opterećenjem, jednadžba poprima oblik:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + k_s \cdot w(x) = 0$$



**Slika 5.1.** Temeljni nosač na elastičnoj podlozi opterećen koncentriranom silom u sredini

Promotri li se nosač konačne duljine na elastičnoj podlozi opterećen koncentriranom silom u sredini (Slika 5.1.). Opće rješenje diferencijalne jednadžbe može se prikazano je u obliku:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x) + C_2 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x) + C_3 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x) + C_4 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x)$$

Uzastopnim deriviranjem gornjeg izraza dobiva se:

$$w'(x) = (C_2 - C_3) \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x) + (C_1 - C_4) \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x) + (C_1 + C_4) \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x) + (C_2 + C_3) \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x)$$

$$w''(x) = 2C_1 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x) + 2C_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x) - 2C_3 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x) - 2C_4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x)$$

$$w'''(x) = 2(C_2 - C_3) \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x) + 2(C_1 - C_4) \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x) - 2(C_1 + C_4) \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cosh(\alpha x) - 2(C_2 + C_3) \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sinh(\alpha x)$$

Bezdimenzionalni parametar  $\alpha$  predstavlja krutost sistema temeljni nosač-podloga, dok se integracijske konstante  $C_1, C_2, C_3, C_4$  određuju na osnovu rubnih uvjeta.

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_b}{4EI}}$$

Pri čemu je:

- $k_b = k_s \cdot b$
- $E$  – modul elastičnosti betona
- $I$  – moment tromosti poprečnog presjeka temelja

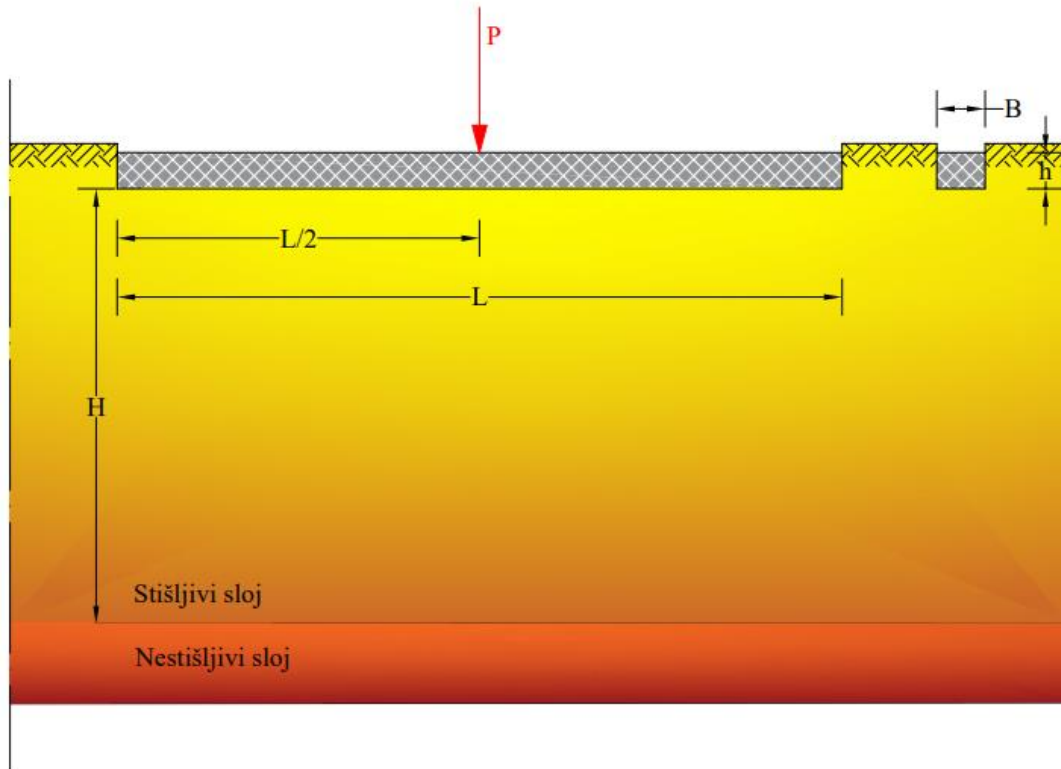
Moment savijanja  $M$  izračuna se pomoću izraza:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

Poprečne sile  $Q$  izračunaju se pomoću izraza:

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3}$$

Proračun se provodi za nosač: dužine  $L=10\text{m}$ , širine  $B=1.2\text{m}$ , visine  $h=0.9\text{m}$ , opterećen je na sredini sa silom  $P=1500\text{kN}$ . Debljina stišljivog sloja je  $H=100\text{m}$ . Nosač leži na tlu  $E_s = 20000 \text{ kN/m}^2$ .



**Slika 5.2** Shematski prikaz temeljnog nosača opterećenog koncentriranom silom na sredini

Moment tromosti presjeka računa se prema:

$$I = \frac{B \cdot h^3}{12} = \frac{1.2 \cdot 0.9^3}{12} = 0.0729 \text{ m}^4$$

Krutost nosača računamo prema:

$$EI = E_{bet} \cdot I = 3 \cdot 10^7 \cdot 0.0729 = 2187000 \text{ kNm}^2$$

Kontaktno naprezanje:

$$q = \frac{P}{A} = 125 \text{ kN/m}^2$$

Početno slijeganje izračunavamo pomoću Bjerumovih dijagrama. Najprije je potrebno odrediti omjere stranica, a zatim iščitati vrijednosti koeficijenata  $\mu_1$  i  $\mu_0$ . Nakon što se dobiju vrijednost koeficijenata, uvrštavaju se u formulu za početno slijeganje.

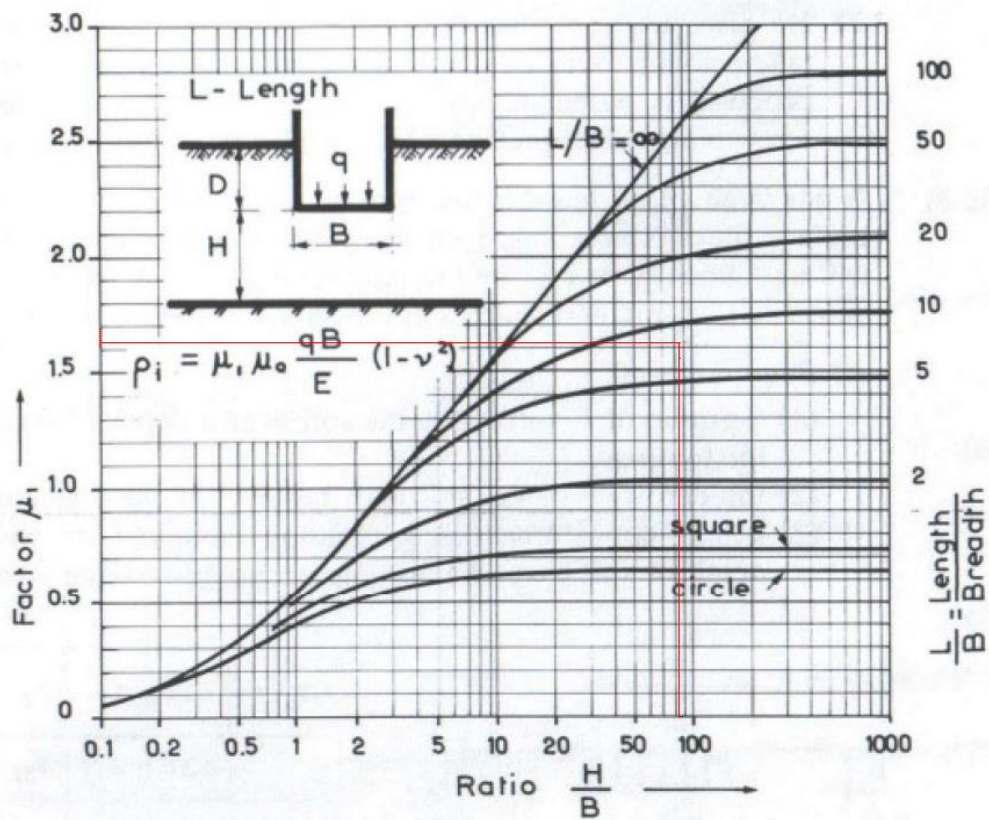


Omjeri stranica nosača dani su izrazima:

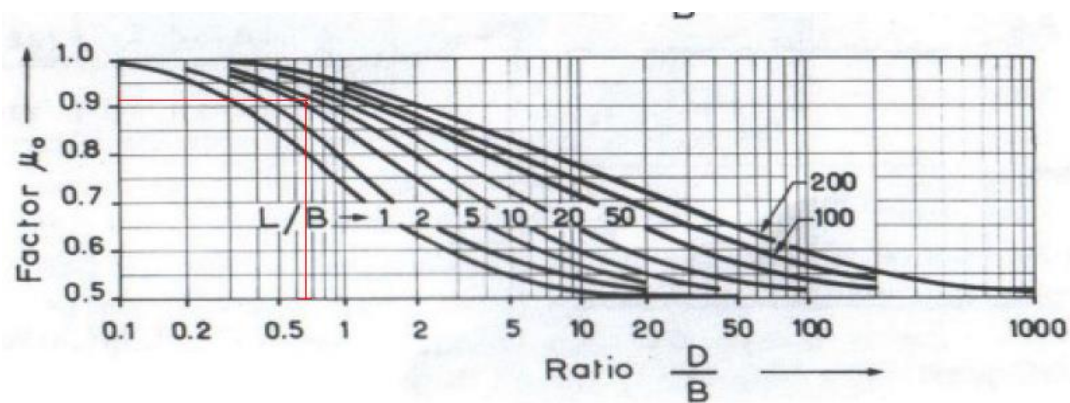
$$\frac{L}{B} = \frac{10}{1.2} = 8.33$$

$$\frac{H}{B} = \frac{100}{1.2} = 83.33$$

$$\frac{h}{B} = \frac{0.9}{1.2} = 0.66$$



Slika 5.3. Bjerumov dijagram za koeficijent  $\mu_1$



Slika 5.4. Bjerumov dijagram za koeficijent  $\mu_0$

Vrijednosti koeficijenata  $\mu_1$  i  $\mu_0$  iščitane iz dijagrama (Slika 5.3. i 5.4.):

$$\mu_1 = 1.63$$

$$\mu_0 = 0.91$$

Jednadžba početnog slijeganja:

$$w_0 = \mu_1 \cdot \mu_0 \cdot \frac{q \cdot B}{E} (1 - \vartheta^2) = 0.01012m$$

Parametar krutosti sistema temeljni nosač-tlo:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_b}{4EI}} = 0,20288524 \text{ rad}$$

Koeficijent reakcije podloge:

$$k_s = \frac{q}{w} = 12351.77 \text{ kN/m}^3$$

$$k_b = k_s \cdot b = 14822.13 \text{ kN/m}^3$$

U računalnom programu Excel kreirane su sve potrebne formule za unos ulaznih podataka prikazanih u tablici 5.1..

**Tablica 5.1.** *Tablica ulaznih parametara*

<b><i>L</i></b>	=	10	<i>m</i>	<b><i>P</i></b>	=	1500	<i>kN</i>
<b><i>B</i></b>	=	1.2	<i>m</i>	<b><i>k<sub>s</sub></i></b>	=	12351.77	<i>kN/m<sup>3</sup></i>
<b><i>h</i></b>	=	0.9	<i>m</i>	<b><i>k<sub>b</sub></i></b>	=	14822.13	<i>kN/m<sup>2</sup></i>
<b><i>H</i></b>	=	100	<i>m</i>	<b><i>α</i></b>	=	0.20288524	
<b><i>I</i></b>	=	0.0729	<i>m<sup>4</sup></i>	<b><i>ϑ</i></b>	=	0.3	
<b><i>E<sub>bet</sub></i></b>	=	30000	<i>MN/m<sup>2</sup></i>	<b><i>w<sub>0</sub></i></b>	=	0.01012	<i>m</i>
<b><i>E<sub>s</sub></i></b>	=	20000	<i>kN/m<sup>2</sup></i>				
<b><i>EI</i></b>	=	2187000	<i>kNm<sup>2</sup></i>				

Dva rubna uvjeta postavljaju se na početku nosača:

$$x = 0$$

Moment na početku nosača jednak je nuli:

$$M(0) = 0$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  u drugu derivaciju dobiva se sljedeće:

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(x = 0) = 0$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(x = 0) = 2C_1 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha 0) \cdot \cosh(\alpha 0) + 2C_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha 0) \cdot \sinh(\alpha 0) - 2C_3 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha 0) \cdot \cosh(\alpha 0) - 2C_4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha 0) \cdot \sinh(\alpha 0)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2\alpha^2 \cdot C_1 = 0$$

Izračunom vrijednosti uz koeficijente  $C_1, C_2, C_3, C_4$  dobiva se:

$$C_1 = 0$$

Poprečna sila na početku nosača jednaka je nuli:

$$Q(0) = 0$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = 0$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  u treću derivaciju dobiva se sljedeće:

$$\frac{d^3 w}{dx^3}(x = 0) = 0$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3}(x = 0) = 2(C_2 - C_3) \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha 0) \cdot \cosh(\alpha 0) + 2(C_1 - C_4) \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha 0) \cdot \sinh(\alpha 0) - 2(C_1 + C_4) \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha 0) \cdot \cosh(\alpha 0) - 2(C_2 + C_3) \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha 0) \cdot \sinh(\alpha 0)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3}(x = 0) = 2\alpha^3(C_2 - C_3) = 0$$

Izračunom vrijednosti uz koeficijente  $C_1, C_2, C_3, C_4$  dobiva se:

$$C_2 - C_3 = 0$$

$$C_2 = C_3$$

Drva rubna uvjeta postavljaju se na sredinu nosača:

$$x = \frac{L}{2} = 5m$$

Na sredini nosača pozno je da je kut  $\varphi$  jednak nuli:

$$\varphi(5) = 0$$

$$\varphi(x) = -EI \frac{dw}{dx} = 0$$

Uvrštavanjem  $x = 5$  u prvu derivaciju dobiva se sljedeće:

$$\frac{dw}{dx}(x = 5) = 0$$

$$\frac{dw}{dx}(x = 5) = (C_2 - C_3) \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha 5) \cdot \sinh(\alpha 5) + (C_1 - C_4) \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha 5) \cdot \cosh(\alpha 5) + (C_1 + C_4) \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha 5) \cdot \sinh(\alpha 5) + (C_2 + C_3) \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha 5) \cdot \cosh(\alpha 5)$$

$$\frac{dw}{dx}(x = 5) = \alpha \cdot ((C_2 - C_3) \cdot 1.01696 + (C_1 - C_4) \cdot 1.32488 + (C_1 + C_4) \cdot 0.63245 + (C_2 + C_3) \cdot 0.82395)$$

$$\frac{dw}{dx}(x = 5) = \alpha \cdot (1.95733 \cdot C_1 + 1.84091 \cdot C_2 - 0.19301 \cdot C_3 - 0.69243 \cdot C_4)$$

Izračunom vrijednosti uz koeficijente  $C_1, C_2, C_3, C_4$  dobiva se:

$$1.95733 \cdot C_1 + 1.84091 \cdot C_2 - 0.19301 \cdot C_3 - 0.69243 \cdot C_4 = 0$$

Poprečna sila na lijevoj strani polovice nosača jednaka je negativnog polovici sile:

$$Q(5) = P = -750kN$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3w}{dx^3} = -750kN$$

Uvrštavanjem  $x = 5$  u treću derivaciju dobiva se sljedeće:

$$\frac{d^3w}{dx^3}(x = 5) = \frac{750kN}{EI}$$

$$\frac{d^3w}{dx^3}(x = 5) = 2(C_2 - C_3) \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha 5) \cdot \cosh(\alpha 5) + 2(C_1 - C_4) \cdot \alpha^3 \cdot \cos(\alpha 5) \cdot \sinh(\alpha 5) - 2(C_1 + C_4) \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha 5) \cdot \cosh(\alpha 5) - 2(C_2 + C_3) \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha 5) \cdot \sinh(\alpha 5)$$

$$\frac{d^3w}{dx^3}(x = 5) = (2 \cdot \alpha^3) \cdot ((C_2 - C_3) \cdot 0.82395 + (C_1 - C_4) \cdot 0.63245 - (C_1 + C_4) \cdot 1.32488 - (C_2 + C_3) \cdot 1.01696)$$

$$\frac{dw}{dx}(x = 5) = 2 \cdot \alpha^3 \cdot (-0.69243 \cdot C_1 - 0.19301 \cdot C_2 - 0.184091 \cdot C_3 - 1.95733 \cdot C_4)$$

Izračunom vrijednosti uz koeficijente dobiva se:

$$0.69243 \cdot C_1 + 0.19301 \cdot C_2 + 0.184091 \cdot C_3 + 1.95733 \cdot C_4 = 0.020532$$

Sustav jednadžbi:

$$\begin{array}{cccc|l}
 \cos(\alpha 0) \cosh(\alpha 0) & \cos(\alpha 0) \sinh(\alpha 0) & \sin(\alpha 0) \cosh(\alpha 0) & \sin(\alpha 0) \sinh(\alpha 0) & = & \frac{M_1}{EI2\alpha^2} \\
 \cos(\alpha 0) \sinh(\alpha 0) & \cos(\alpha 0) \cosh(\alpha 0) & -\cos(\alpha 0) \cosh(\alpha 0) & -\cos(\alpha 0) \sinh(\alpha 0) & = & \frac{Q_1}{EI2\alpha^3} \\
 -\sin(\alpha 0) \cosh(\alpha 0) & -\sin(\alpha 0) \sinh(\alpha 0) & -\sin(\alpha 0) \sinh(\alpha 0) & -\sin(\alpha 0) \cosh(\alpha 0) & = & \\
 \sin(\alpha 5) \cosh(\alpha 5) & \sin(\alpha 5) \sinh(\alpha 5) & \sin(\alpha 5) \cosh(\alpha 5) & \sin(\alpha 5) \sinh(\alpha 5) & = & \varphi_1/EI\alpha \\
 + \cos(\alpha 5) \sinh(\alpha 5) & + \cos(\alpha 5) \cosh(\alpha 5) & + \cos(\alpha 5) \sinh(\alpha 5) & + \cos(\alpha 5) \cosh(\alpha 5) & = & \\
 \cos(\alpha 5) \sinh(\alpha 5) & \cos(\alpha 5) \cosh(\alpha 5) & \cos(\alpha 5) \cosh(\alpha 5) & \cos(\alpha 5) \sinh(\alpha 5) & = & \frac{Q_2}{EI2\alpha^3} \\
 -\sin(\alpha 5) \cosh(\alpha 5) & -\sin(\alpha 5) \sinh(\alpha 5) & -\sin(\alpha 5) \sinh(\alpha 5) & -\sin(\alpha 5) \cosh(\alpha 5) & = & 
 \end{array}$$

Numerički:

$$\begin{array}{cccc|l}
 C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & = & \\
 1 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & = & 0 \\
 1.95733 & 1.84091 & -0.19301 & -0.69243 & = & 0 \\
 -0.69243 & -0.19301 & -1.84091 & -1.95733 & = & 0.020532
 \end{array}$$

Sustav jednadžbi rješava se La Place-ovim razvojem sustava determinanti:

$$F = \begin{array}{cccc|l}
 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & -1 & 0 & \\
 1.95733 & 1.84091 & -0.19301 & -0.69243 & \\
 -0.69243 & -0.19301 & -1.84091 & -1.95733 & \\
 \hline
 & & & & F = -4.63383
 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cccc|l}
 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & -1 & 0 & \\
 0 & 1.84091 & -0.19301 & -0.69243 & \\
 0.020532 & -0.19301 & -1.84091 & -1.95733 & \\
 \hline
 & & & & A = 0.00000
 \end{array}$$

$$B = \begin{array}{cccc|l}
 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & -1 & 0 & \\
 1.95733 & 0 & -0.19301 & -0.69243 & \\
 -0.69243 & 0.020532 & -1.84091 & -1.95733 & \\
 \hline
 & & & & B = 0.01422
 \end{array}$$

$$C = \begin{array}{cccc|l}
 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 1.95733 & 1.84091 & 0 & -0.69243 & \\
 -0.69243 & -0.19301 & 0.020532 & -1.95733 & \\
 \hline
 & & & & C = 0.01422
 \end{array}$$

$$D = \begin{array}{cccc|l}
 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & -1 & 0 & \\
 1.95733 & 1.84091 & -0.19301 & 0 & \\
 -0.69243 & -0.19301 & -1.84091 & -0.020532 & \\
 \hline
 & & & & D = 0.03383
 \end{array}$$

Izračun integracijskih konstanti:

$$C_1 = \frac{A}{F} = \frac{0}{-4.63383} = 0$$

$$C_2 = \frac{B}{F} = \frac{0.01422}{-4.63383} = -0.003068$$

$$C_3 = \frac{C}{F} = \frac{0.01422}{-4.63383} = -0.003068$$

$$C_4 = \frac{D}{F} = \frac{0.03383}{-4.63383} = -0.007302$$

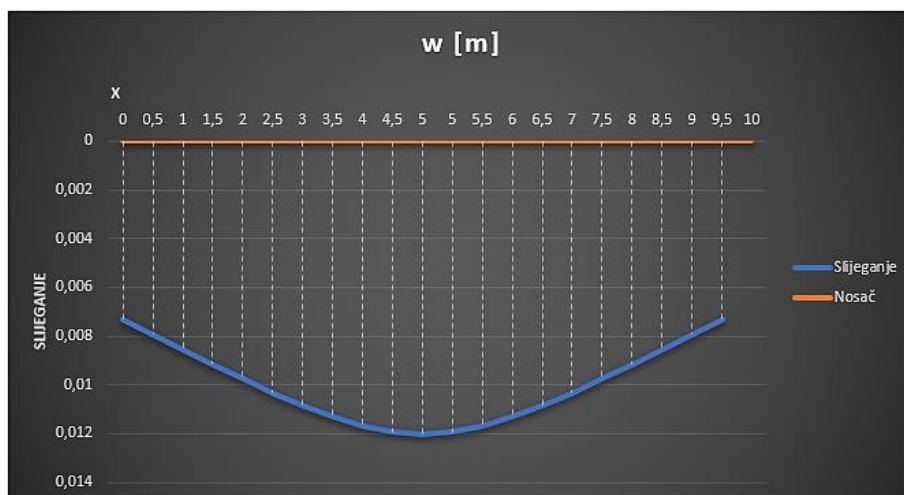
Uvrštavanjem integracijskih konstanti u jednadžbe dobiva se vrijednosti poprečne sile  $Q$ , momenta savijanja  $M$  i reakcije podloge  $q$  do polovice nosača, vrijednosti na drugoj polovici jednake su kao na prvoj polovici.

Prema prethodnim jednadžbama dobiveni su rezultati koji su prikazani u tablici 5.2.:

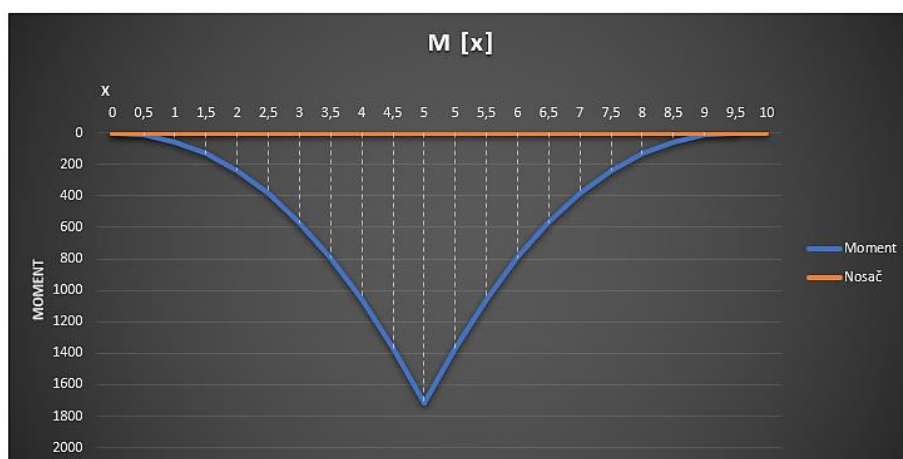
**Tablica 5.2.** Rezultati proračuna

$x$	$w'$	$w''$	$w'''$	$w$ [m]	$M(x)$	$Q(x)$	$q(x)$
[m]	[-]	[-]	[-]	[mm]	[kNm]	[kN]	[kN/m <sup>2</sup> ]
0	0	0	0	7.30	0	0	90.17
0.5	-0.001481395	-6.4E-06	2.6E-05	7.92	13.91	-56.42	97.83
1	-0.002962633	-2.6E-05	5.4E-05	8.54	57.19	-117.45	105.48
1.5	-0.004442929	-6E-05	8.4E-05	9.16	132.12	-183.05	113.14
2	-0.005920246	-0.00011	0.00012	9.76	240.99	-253.15	120.55
2.5	-0.007390660	-0.00018	0.00015	10.33	386.00	-327.59	127.59
3	-0.008847745	-0.00026	0.00019	10.85	569.26	-406.10	134.02
3.5	-0.010281943	-0.00036	0.00022	11.31	792.71	-488.29	139.70
4	-0.011679949	-0.00048	0.00026	11.68	1058.06	-573.56	144.27
4.5	-0.013024106	-0.00062	0.00030	11.93	1366.66	-661.14	147.36
5	-0.014291815	-0.00079	0.00034	12.02	1719.42	-750.00	148.47
5	-	-	-0.00034	-	-	750.00	-
5.5	-0.013024106	-0.00062	-0.00030	11.93	1366.66	661.14	147.36
6	-0.011679949	-0.00048	-0.00026	11,68	1058.06	573.56	144.27
6.5	-0.010281943	-0.00036	-0.00022	11.31	792.71	488.29	139.70
7	-0.008847745	-0.00026	-0.00019	10.85	569.26	406.10	134.02
7.5	-0.007390660	-0.00018	-0.00015	10.33	386.00	327.59	127.59
8	-0.005920246	-0.00011	-0.00012	9.76	240.99	253.15	120.55
8.5	-0.004442929	-6E-05	-8.4E-05	9.16	132.12	183.05	113.14
9	-0.002962633	-2.6E-05	-5.4E-05	8.54	57.19	117.45	105.48
9.5	-0.001481395	-6.4E-06	-2.6E-05	7.96	13.91	56.42	97.83
10	0	0	0	7.30	0	0	90.17

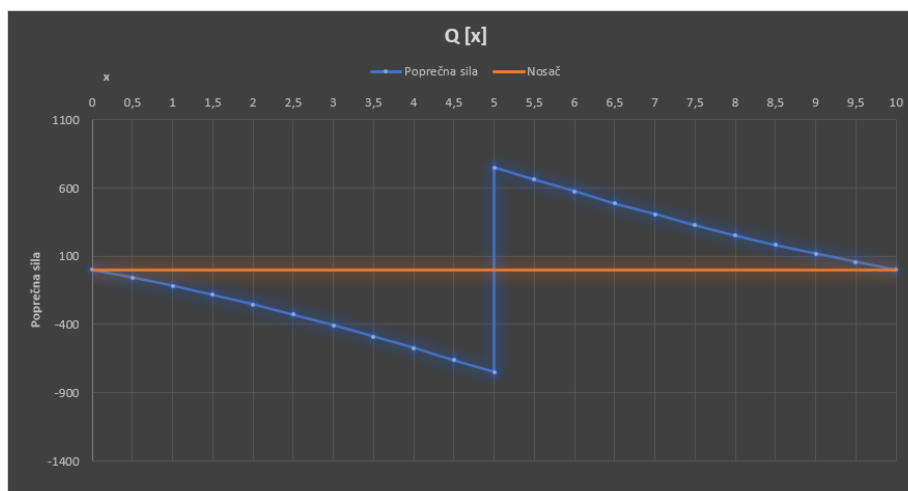
Dijagrami slijeganja, momenta i poprečne sile prikazani su na slikama 5.5, 5.6. i 5.7:



Slika 5.5. Dijagram slijeganja

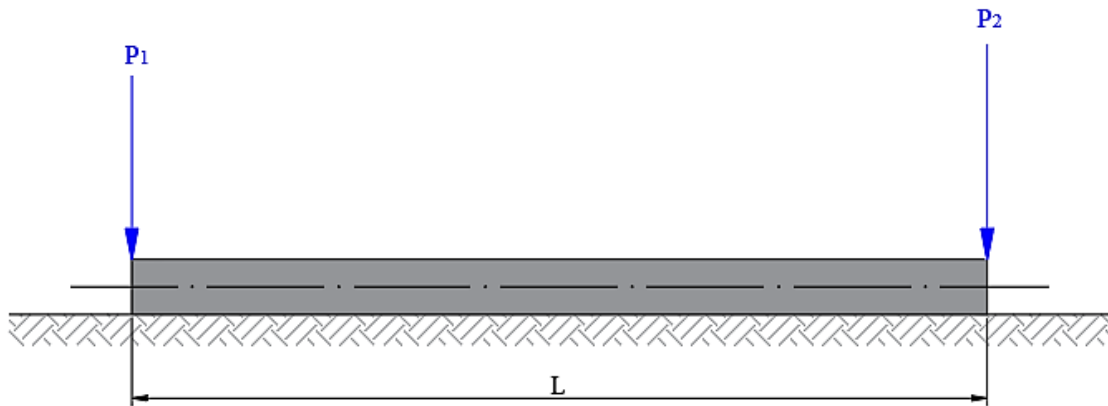


Slika 5.6. Dijagram momenta savijanja



Slika 5.7. Dijagram Poprečne sile

## 5.2. Primjer proračuna savitljivog temeljnog nosača opterećenog koncentriranim silama na krajevima nosača



**Slika 5.8.** Shematski prikaz nosača opterećenog dvjema koncentriranim silama

Za slučaj u kojem koncentrirano opterećenje djeluje na krajevima nosača (Slika 5.8.), opće rješenje diferencijalne jednačine za ravni nosač na elastičnoj podlozi glasi:

$$w(x) = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\alpha x) + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\alpha x) + C_3 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\alpha x) + C_4 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\alpha x)$$

Uzastopnim deriviranjem gornjeg izraza dobiva se:

$$w'(x) = C_1 \cdot \alpha e^{\alpha x} (\cos(\alpha x) - \sin(\alpha x)) + C_2 \cdot \alpha e^{\alpha x} (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) - C_3 \cdot \alpha e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) + C_4 \cdot \alpha e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) - \sin(\alpha x))$$

$$w''(x) = -C_1 2\alpha^2 e^{\alpha x} \sin(\alpha x) + C_2 2\alpha^2 e^{\alpha x} \cos(\alpha x) + C_3 2\alpha^2 e^{-\alpha x} \sin(\alpha x) - C_4 2\alpha^2 e^{-\alpha x} \cos(\alpha x)$$

$$w'''(x) = -C_1 \cdot 2\alpha^3 e^{\alpha x} (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) + C_2 \cdot 2\alpha^3 e^{\alpha x} (\cos(\alpha x) - \sin(\alpha x)) + C_3 \cdot 2\alpha^3 e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) - \sin(\alpha x)) + C_4 \cdot 2\alpha^3 e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x))$$

Integracijske konstante  $C_1, C_2, C_3, C_4$  određuju se na osnovu rubnih uvjeta, dok  $\alpha$  predstavlja bezdimenzionalni parametar krutosti sistema temeljni nosač-podloga.

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_b}{4EI}}$$



Pri čemu je:

- $k_b = k_s \cdot b$
- $E$  – modul elastičnosti betona
- $I$  – moment tromosti poprečnog presjeka temelja

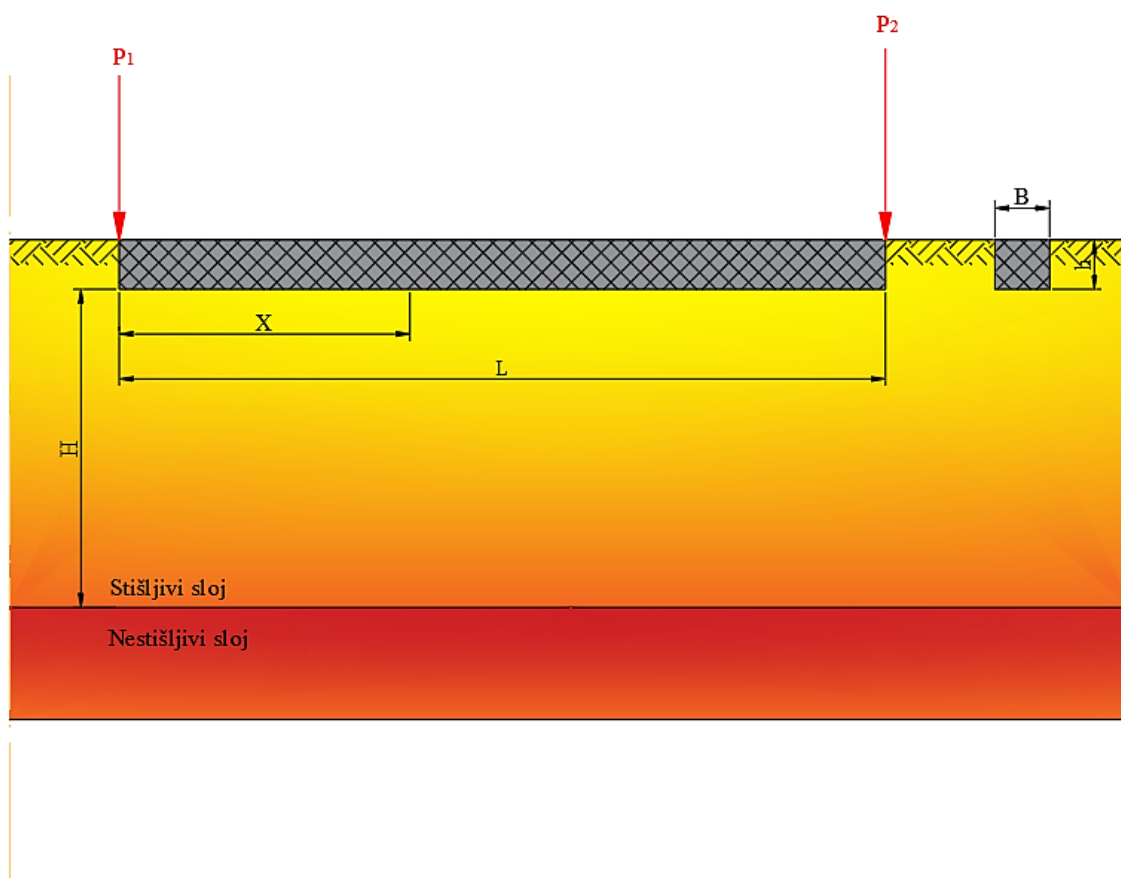
Moment savijanja  $M$  izračuna se pomoću izraza:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

Poprečne sile  $Q$  izračunaju se pomoću izraza:

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3}$$

Proračun se provodi za nosač: dužine  $L = 12\text{m}$ , širine  $B = 1\text{m}$ , visine  $h = 0.9\text{m}$ , opterećen na krajevima silama  $P_1 = 900\text{kN}$ ,  $P_2 = 1300\text{kN}$ . Debljina stišljivog sloja je  $H = 100\text{m}$ . Nosač leži na tlu  $E_s = 20000\text{ kN/m}^2$ .



Slika 5.9. Shematski prikaz nosača opterećenog dvjema koncentriranim silama

Moment tromosti presjeka:

$$I = \frac{B \cdot h^3}{12} = \frac{1 \cdot 0.9^3}{12} = 0.06075 \text{ m}^4$$

Krutost nosača:

$$EI = E_{bet} \cdot I = 3 \cdot 10^7 \cdot 0.0729 = 1822500 \text{ kNm}^2$$

Kontaktno naprezanje:

$$q = \frac{P_1 + P_2}{A} = 183.33 \text{ kN/m}^2$$

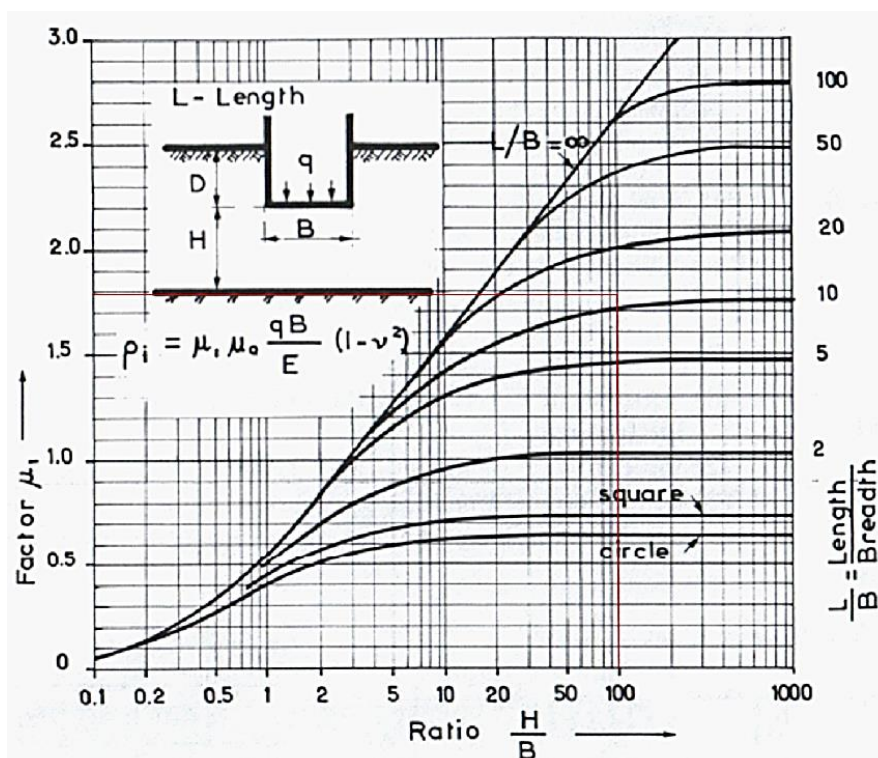
Početno slijeganje kao i u prethodnom zadatku računa se pomoću Bjerumovih dijagrama.

Omjeri stranica nosača dani su izrazima:

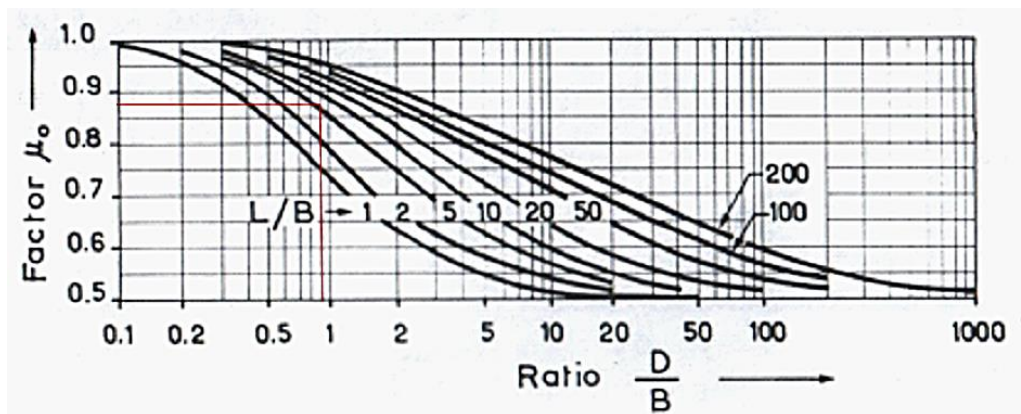
$$\frac{L}{B} = \frac{12}{1} = 6$$

$$\frac{H}{B} = \frac{100}{1} = 100$$

$$\frac{h}{B} = \frac{0.9}{1} = 0.9$$



Slika 5.10. Bjerumov dijagram za koeficijent  $\mu_1$



Slika 5.11. Bjerumov dijagram za koeficijent  $\mu_0$

Vrijednosti koeficijenata  $\mu_1$  i  $\mu_0$  iščitane iz dijagrama (Slika 5.10. i 5.11.):

$$\mu_1 = 1.79$$

$$\mu_0 = 0.88$$

Jednadžba početnog slijeganja:

$$w_0 = \mu_1 \cdot \mu_0 \cdot \frac{q \cdot B}{E} (1 - \vartheta^2) = 0.01314m$$

Koeficijent reakcije podloge:

$$k_s = \frac{q}{w} = 13952.53 \text{ kN/m}^3$$

$$k_b = k_s \cdot b = 13952.53 \text{ kN/m}^3$$

Parametar krutosti sistema temeljni nosač-tlo:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_b}{4EI}} = 0,209161305 \text{ rad}$$

U računalnom programu Excel kreirane su sve potrebne formule za unos ulaznih podataka prikazanih u tablici 5.3..

Tablica 5.3. Tablica ulaznih parametara

$L$	=	12	$m$	$w_0$	=	0.01314	$m$
$B$	=	1	$m$	$k_s$	=	13952.53	$kN/m^3$
$h$	=	0.9	$m$	$k_b$	=	13952.53	$kN/m^2$
$H$	=	100	$m$	$\alpha$	=	0.209161305	
$I$	=	0.0729	$m^4$	$\vartheta$	=	0.3	
$E_{bet}$	=	30000	$MN/m^2$	$P_1$	=	900	$kN$
$E_s$	=	20000	$kN/m^2$	$P_2$	=	1300	$kN$
$EI$	=	18222500	$kNm^2$				

Rubni uvjeti postavljaju se na početak nosača:

$$x = 0$$

Moment na početku nosača jednak je nuli:

$$M(0) = 0$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  u drugu derivaciju dobiva se sljedeće:

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(x = 0) = 0$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(x = 0) = -C_1 2\alpha^2 e^{\alpha 0} \sin(\alpha 0) + C_2 2\alpha^2 e^{\alpha 0} \cos(\alpha 0) + C_3 2\alpha^2 e^{-\alpha 0} \sin(\alpha 0) - C_4 2\alpha^2 e^{-\alpha 0} \cos(\alpha 0)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2\alpha^2 \cdot (C_2 - C_4) = 0$$

Izračunom vrijednosti uz koeficijente  $C_1, C_2, C_3, C_4$  dobiva se:

$$C_1 - C_4 = 0$$

Poprečna sila na početku nosača jednaka je nuli:

$$Q(0) = -P_1$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -900 \text{ kN}$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  u treću derivaciju dobiva se sljedeće:

$$\frac{d^3 w}{dx^3}(x = 0) = \frac{900 \text{ kN}}{EI}$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3}(x = 0) = -C_1 \cdot 2\alpha^3 e^{\alpha 0} (\cos(\alpha 0) + \sin(\alpha 0)) + C_2 \cdot 2\alpha^3 e^{\alpha 0} (\cos(\alpha 0) - \sin(\alpha 0)) + C_3 \cdot 2\alpha^3 e^{-\alpha 0} (\cos(\alpha 0) - \sin(\alpha 0)) + C_4 \cdot 2\alpha^3 e^{-\alpha 0} (\cos(\alpha 0) + \sin(\alpha 0))$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3}(x = 0) = 2\alpha^3 (-C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = \frac{900 \text{ kN}}{EI}$$

Izračunom vrijednosti uz koeficijente  $C_1, C_2, C_3, C_4$  dobiva se:

$$-C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0.02698$$

Postavljanje dva rubna uvjeta na kraju nosača:

$$x = L = 12m$$

Na sredini nosača poznat je moment koji iznosi nula:

$$M(12) = 0$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2} = 0$$

Uvrštavanjem  $x = 12$  u prvu derivaciju dobiva se sljedeće:

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x = 12) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2}(x = 12) = & -C_1 2\alpha^2 e^{\alpha 12} \sin(\alpha 12) + C_2 2\alpha^2 e^{\alpha 12} \cos(\alpha 12) + C_3 2\alpha^2 e^{-\alpha 12} \sin(\alpha 12) \\ & - C_4 2\alpha^2 e^{-\alpha 12} \cos(\alpha 12) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 2\alpha^2 \cdot (C_2 - C_4) = 0$$

Izračunom vrijednosti uz koeficijente  $C_1, C_2, C_3, C_4$  dobiva se:

$$-7.26538 \cdot C_1 - 9,93006 \cdot C_2 + 0,04799 \cdot C_3 + 0.06559 \cdot C_4 = 0$$

Poprečna sila na kraju nosača jednaka je sili:

$$Q(12) = P = 1300kN$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3w}{dx^3} = 1300kN$$

Uvrštavanjem  $x = 12$  u treću derivaciju dobiva se sljedeće:

$$\frac{d^3w}{dx^3}(x = 12) = -\frac{1300kN}{EI}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3w}{dx^3}(x = 12) = & -C_1 2\alpha^3 e^{\alpha 12} (\cos(\alpha 12) + \sin(\alpha 12)) + C_2 2\alpha^3 e^{\alpha 12} (\cos(\alpha 12) - \sin(\alpha 12)) + \\ & C_3 2\alpha^3 e^{-\alpha 12} (\cos(\alpha 12) - \sin(\alpha 12)) + C_4 2\alpha^3 e^{-\alpha 12} (\cos(\alpha 12) + \sin(\alpha 12)) \end{aligned}$$

$$\frac{d^3w}{dx^3}(x = 12) = 2 \cdot \alpha^3 \cdot (2.66467 \cdot C_1 - 17.19544 \cdot C_2 - 0.11358 \cdot C_3 - 0.01760 \cdot C_4)$$

Izračunom vrijednosti uz koeficijente dobiva se:

$$2.66467 \cdot C_1 - 17.19544 \cdot C_2 - 0.11358 \cdot C_3 - 0.01760 \cdot C_4 = -0.038976$$

Sustav jednadžbi:

$$\begin{array}{cccc|c}
 \sin(\alpha 0)e^{\alpha 0} & \cos(\alpha 0)e^{\alpha 0} & \sin(\alpha 0)e^{\alpha 0} & -\cos(\alpha 0)e^{-\alpha 0} & = \frac{M_1}{-EI2\alpha^2} \\
 (-\cos(\alpha 0) - \sin(\alpha 0))e^{\alpha 0} & (\cos(\alpha 0) - \sin(\alpha 0))e^{\alpha 0} & (\cos(\alpha 0) - \sin(\alpha 0))e^{-\alpha 0} & (-\cos(\alpha 0) - \sin(\alpha 0))e^{-\alpha 0} & = \frac{Q_1}{-EI2\alpha^3} \\
 \sin(\alpha 12)e^{\alpha 12} & \cos(\alpha 12)e^{\alpha 12} & \sin(\alpha 12)e^{\alpha 12} & -\cos(\alpha 12)e^{-\alpha 12} & = \varphi_1 / -EI\alpha \\
 (-\cos(\alpha 12) - \sin(\alpha 12))e^{\alpha 12} & (\cos(\alpha 12) - \sin(\alpha 12))e^{\alpha 12} & (\cos(\alpha 12) - \sin(\alpha 12))e^{-\alpha 12} & (-\cos(\alpha 12) - \sin(\alpha 12))e^{-\alpha 12} & = \frac{Q_2}{-EI2\alpha^3}
 \end{array}$$

Numerički:

$$\begin{array}{cccc|c}
 C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & \\
 0 & 1 & 0 & -1 & = 0 \\
 -1 & 1 & 1 & 1 & = 0.026984 \\
 -7.26538 & -9.93006 & 0.04799 & 0.06559 & = 0 \\
 2.66467 & -17.19544 & -0.11358 & -0.01760 & = -0.038976
 \end{array}$$

Sustav jednadžbi rješava se pomoću La Place-ovog razvoja sustava determinanti:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -7.26538 & -9.93006 & 0.04799 & 0.06559 \\ 2.66467 & -17.19544 & -0.11358 & -0.01760 \end{vmatrix} \quad F = 148.00375$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0.026984 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9.93006 & 0.04799 & 0.06559 \\ -0.038976 & -17.19544 & -0.11358 & -0.01760 \end{vmatrix} \quad A = -0.3356989$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0.026984 & 1 & 1 \\ -7.26538 & 0 & 0.04799 & 0.06559 \\ 2.66467 & -0.038976 & -0.11358 & -0.01760 \end{vmatrix} \quad B = 0.2624912$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0.026984 & 1 \\ -7.26538 & -9.93006 & 0 & 0.06559 \\ 2.66467 & -17.19544 & -0.038976 & -0.01760 \end{vmatrix} \quad C = 3.1330023$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0.026984 \\ -7.26538 & -9.93006 & 0.04799 & 0 \\ 2.66467 & -17.19544 & -0.11358 & -0.038976 \end{vmatrix} \quad D = 0.2624912$$

Izračun integracijskih konstanti:

$$C_1 = \frac{A}{F} = \frac{-0.3356989}{148.00375} = -0.002268178$$

$$C_2 = \frac{B}{F} = \frac{0.2624912}{148.00375} = 0.001773544$$

$$C_3 = \frac{C}{F} = \frac{3.1330023}{148.00375} = 0.021168399$$

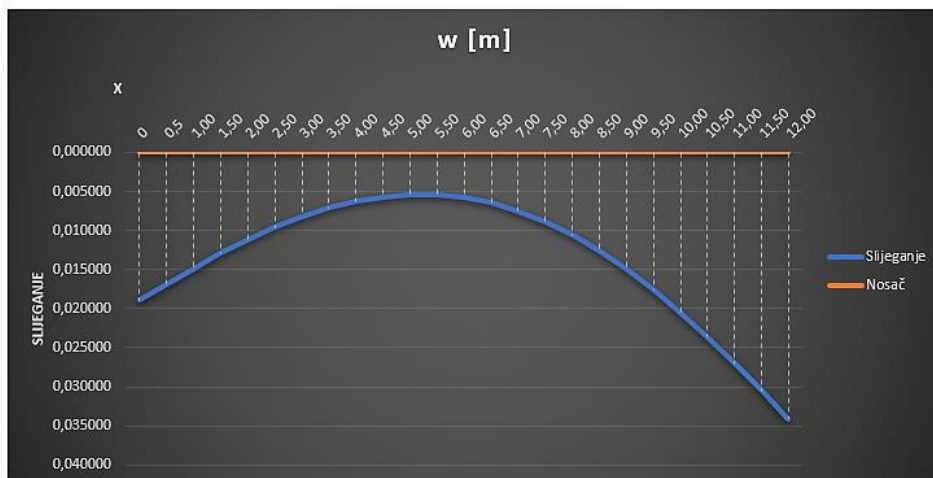
$$C_4 = \frac{D}{F} = \frac{0.2624912}{148.00375} = 0.001773544$$

Prema prethodnim jednadžbama dobiveni su rezultati koji su prikazani u tablici 5.4.:

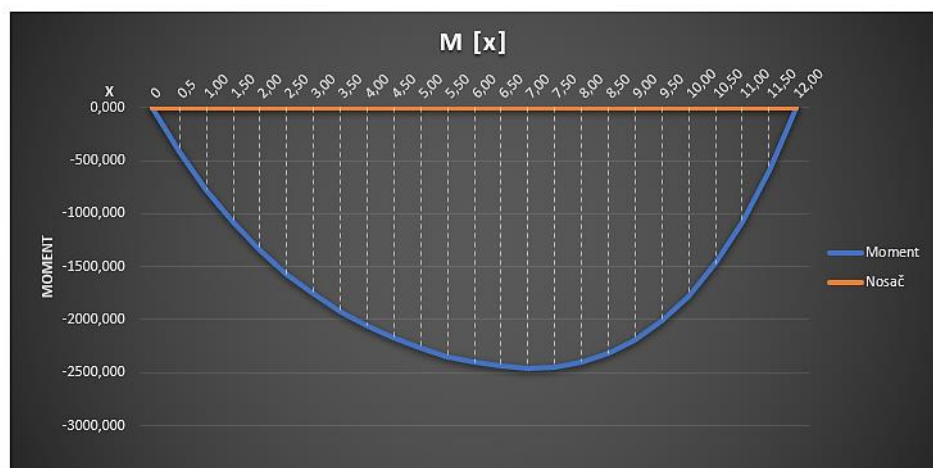
**Tablica 5.4.** Prikaz rezultata proračuna

$x$	$w'$	$w''$	$w'''$	$w$	$M(x)$	$Q(x)$	$q(x)$
[m]	[-]	[-]	[-]	[mm]	[kNm]	[kN]	[kN/m <sup>2</sup> ]
0.0	-0.00416	0	0.000494	18.90	0	900.00	263.71
0.5	-0.0041	0.000229	0.000425	16.83	-418.24	775.39	234.82
1.0	-0.00394	0.000427	0.000365	14.82	-777.77	665.05	206.73
1.5	-0.00368	0.000596	0.000312	12.91	-1085.58	568.49	180.12
2.0	-0.00334	0.000740	0.000266	11.15	-1348.31	484.58	155.58
2.5	-0.00294	0.000863	0.000226	9.58	-1572.10	412.40	133.61
3.0	-0.00248	0.000967	0.000192	8.22	-1762.42	350.47	114.64
3.5	-0.00198	0.001056	0.000163	7.10	-1924.02	297.20	99.05
4.0	-0.00143	0.001131	0.000138	6.25	-2060.77	250.81	87.13
4.5	-0.00085	0.001194	0.000115	5.67	-2175.66	209.41	79.16
5.0	-0.00024	0.001246	9.38E-05	5.40	-2270.67	170.96	75.34
5.5	0.000394	0.001288	7.32E-05	5.44	-2346.75	133.34	75.87
6.0	0.001046	0.001319	5.18E-05	5.80	-2403.78	94.34	80.89
6.5	0.001711	0.001339	2.84E-05	6.49	-2440.49	51.69	90.50
7.0	0.002383	0.001347	1.68E-06	7.51	-2454.47	3.06	104.78
7.5	0.003056	0.001340	-3E-05	8.87	-2442.16	-53.88	123.76
8.0	0.003721	0.001316	-6.7E-05	10.56	-2398.82	-121.47	147.40
8.5	0.004369	0.001272	-0.00011	12.59	-2318.53	-202.04	175.63
9.0	0.004989	0.001204	-0.00016	14.93	-2194.24	-297.84	208.29
9.5	0.005568	0.001107	-0.00023	17.57	-2017.79	-411.03	245.14
10.0	0.006090	0.000977	-0.00030	20.49	-1779.98	-543.62	285.84
10.5	0.006538	0.000807	-0.00038	23.65	-1470.64	-697.43	329.94
11.0	0.006890	0.000592	-0.00048	27.01	-1078.75	-874.03	376.84
11.5	0.007121	0.000325	-0.00059	30.52	-592.61	-1074.61	425.79
12.0	0.007205	-3.5E-19	-0.00071	34.11	0	-1300.00	475.85

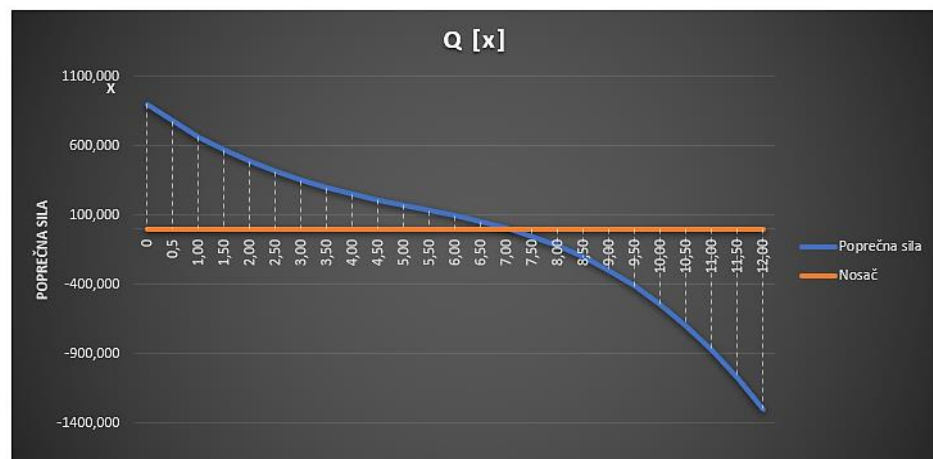
Dijagrami poprečne sile, momenta savijanja i slijeganja prikazani su na slikama 5.12, 5.13 i 5.14:



Slika 5.12. Dijagram slijeganja



Slika 5.13. Dijagram momenta savijanja



Slika 5.14. Dijagram poprečne sile

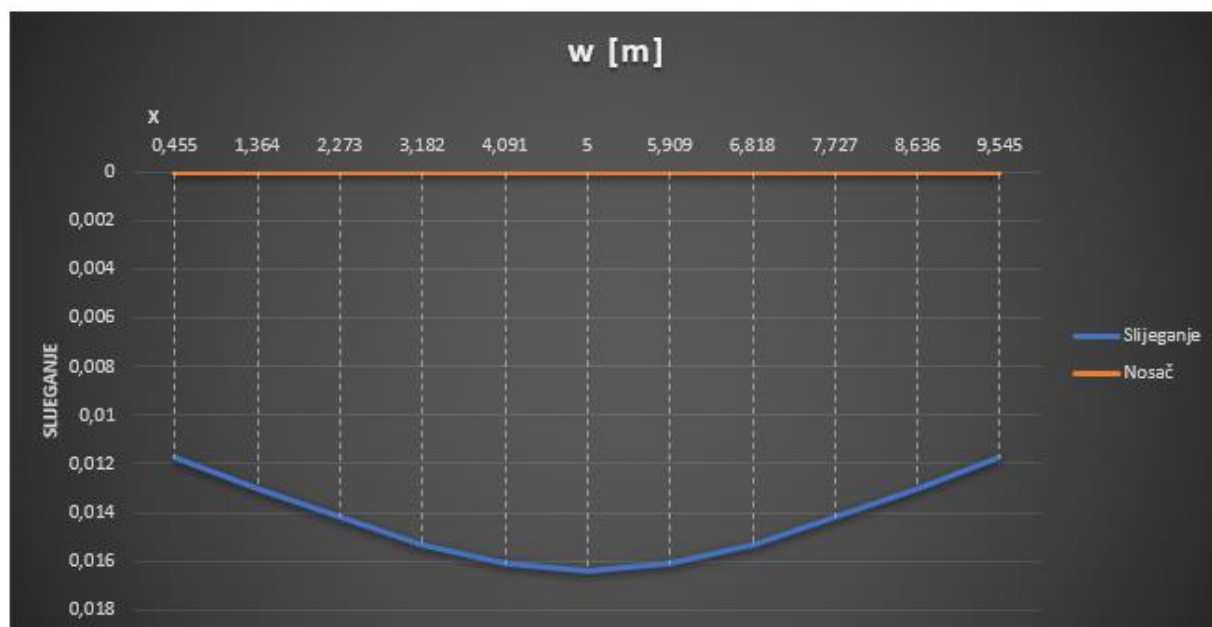


### 5.3. Metoda konačnih razlika na savitljivom nosaču opterećenom koncentriranom silom na sredini

Rješenja za temeljni nosač koji je poprečno opterećen koncentriranom silom u sredini dobivena su metodom konačnih razlika i nalaze se u tablici 5.5:

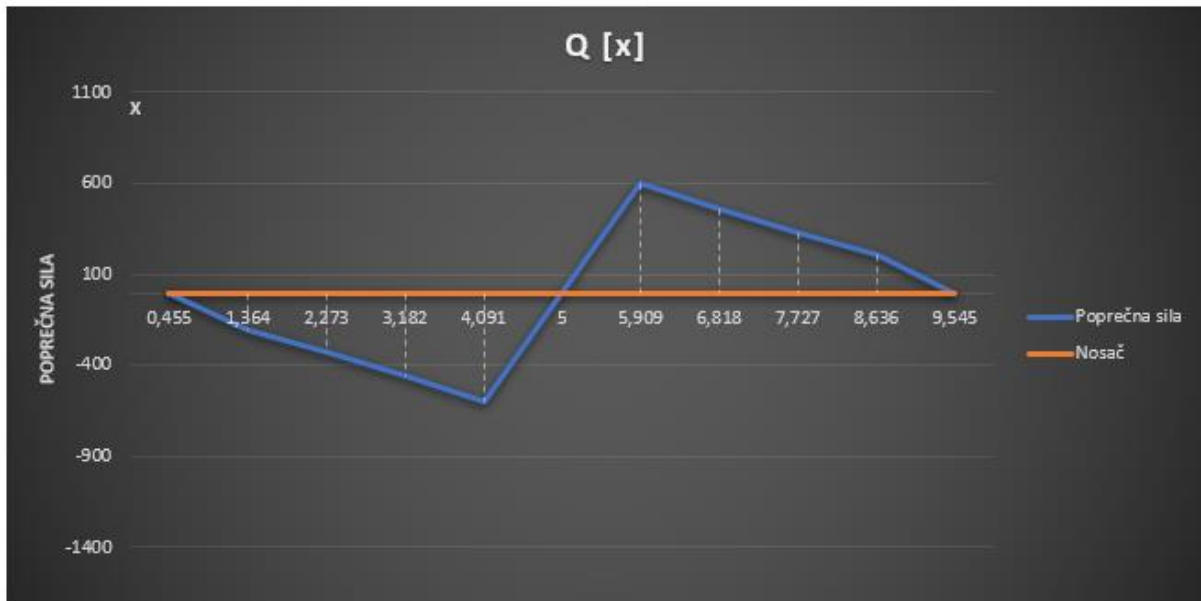
**Tablica 5.5.** Prikaz rezultata proračuna

<b>Metoda konačnih razlika</b>					
Točka	x [m]	w[mm]	M [kNm]	Q(kN)	q(x)
1	0.455	11.76	0.00	0.00	140.43
2	1.364	13.02	130.97	-202.92	142.44
3	2.273	14.22	368.94	-325.56	153.28
4	3.182	15.30	722.88	-458.23	164.52
5	4.091	16.09	1202.09	-600.56	174.53
6	5.000	16.44	1814.81	0.00	180.16
7	5.909	16.09	1202.09	600.56	174.53
8	6.818	15.30	722.88	-458.23	164.52
9	7.727	14.22	368.94	-325.56	153.28
10	8.636	13.02	130.96	-202.92	142.44
11	9.545	11.76	0.00	0.00	140.43



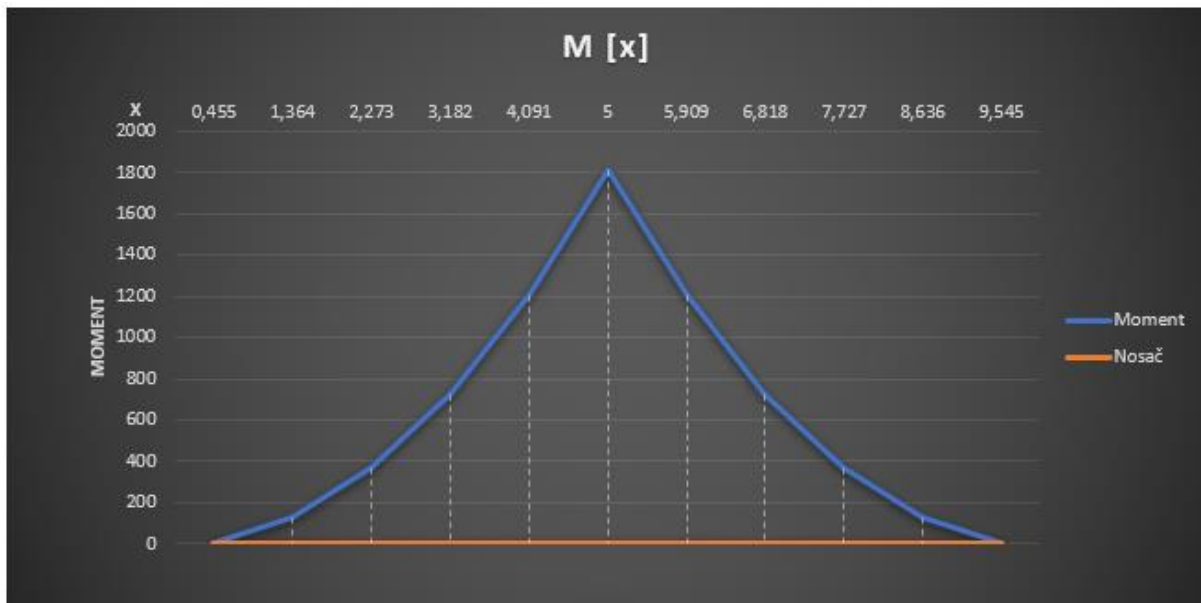
**Slika 5.15.** Dijagram slijezanja nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini

Na slici 5.15. prikazan je dijagram slijezanja iz kojega je vidljivo da je najveće slijezanje na sredini nosača ispod koncentrirane sile.



Slika 5.16. Dijagram poprečne sile nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini

Slika 5.16. prikazuje dijagram poprečne sile gdje se najveće vrijednosti nalaze oko sredine temeljnog nosača, dok su na rubovima nosača jednake nuli .



Slika 5.17. Dijagram momenta savijanja nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini

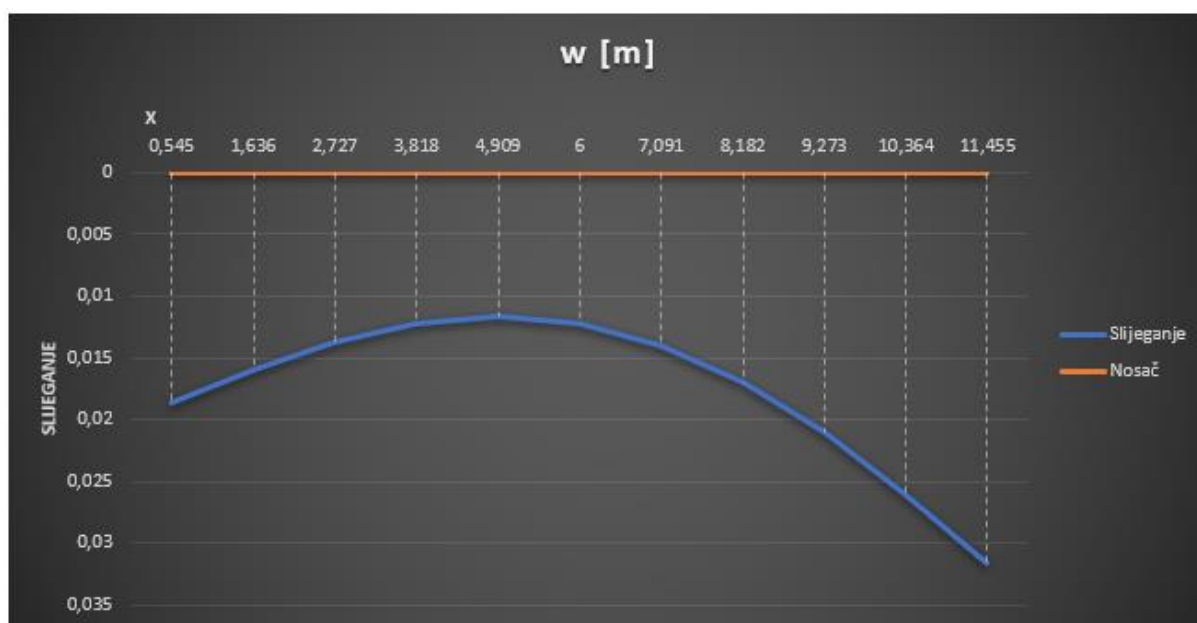
Na slici 5.17. prikazan je dijagram momenta savijanja gdje se najveći momenti kao i slijeganja javljaju ispod koncentrirane sile odnosno na sredini nosača.

### 5.4. Metoda konačnih razlika na savitljivom nosaču opterećenom koncentriranim silama na krajevima

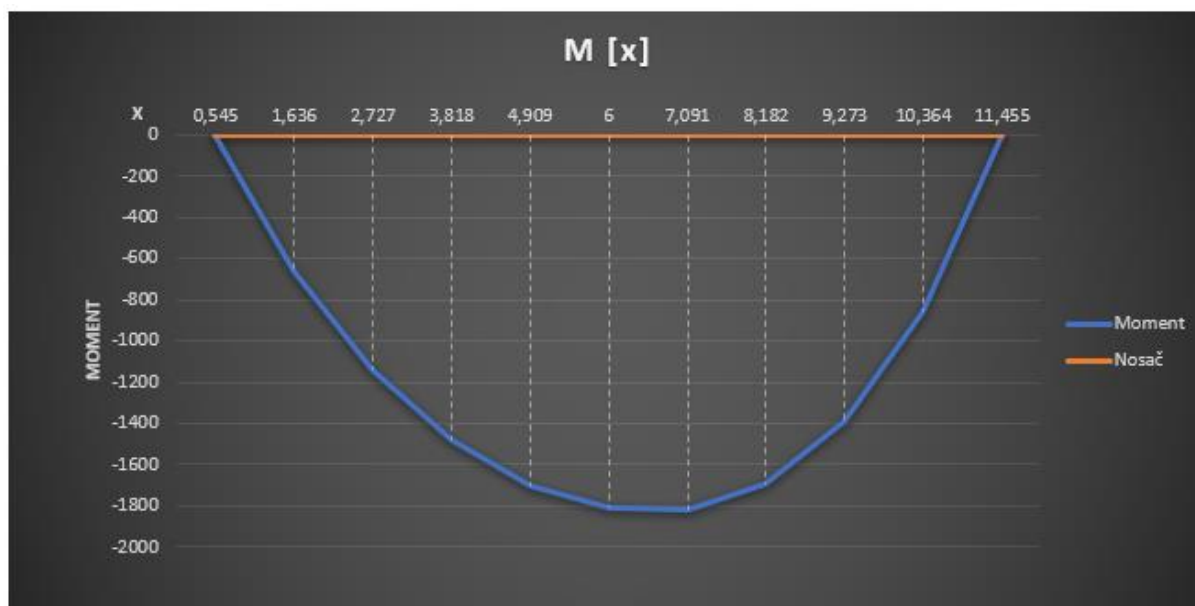
Proračun temeljnog nosača poprečno opterećenog koncentriranim silama na krajevima provodi se metodom konačnih razlika i dobivena rješenja prikazana su u tablici 5.6:

**Tablica 5.6.** Prikaz rezultata proračuna

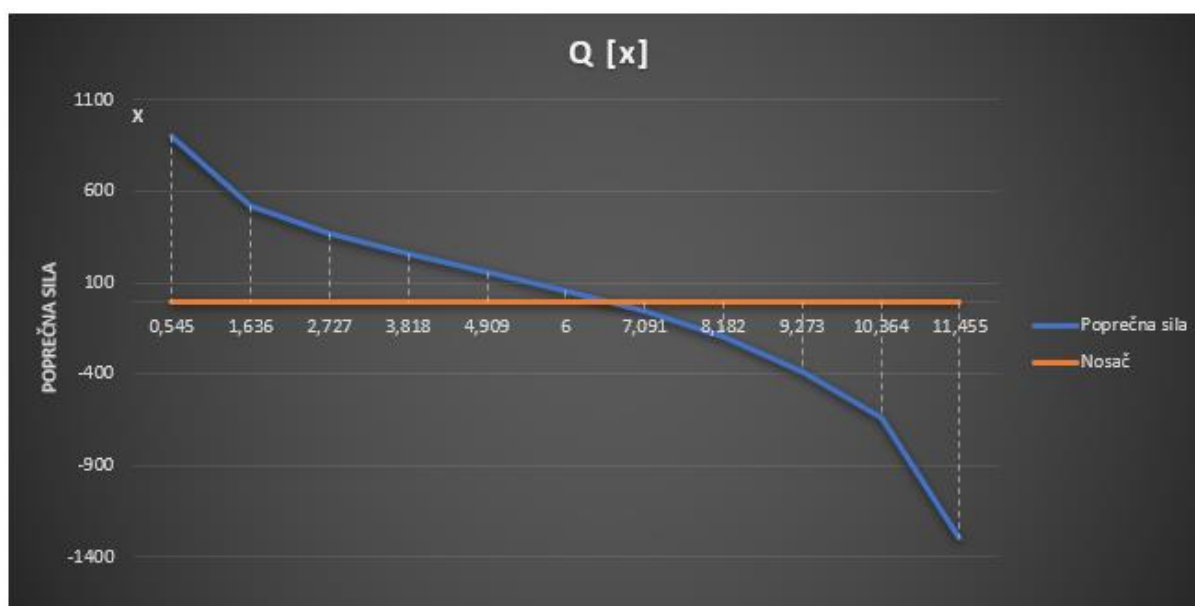
<b>Metoda konačnih razlika</b>					
Točka	x [m]	w[mm]	M [kNm]	Q(kN)	q(x)
1	0.545	18.62	0.00	900.00	277.98
2	1.636	15.95	-663.85	523.56	166.58
3	2.727	13.72	1142.32	373.20	130.68
4	3.818	12.23	1478.11	254.83	107.93
5	4.909	11.71	1698.31	153.89	98.733
6	6.000	12.29	1813.87	55.50	103.24
7	7.091	14.06	1819.41	-55.68	122.20
8	8.182	17.02	1692.38	-195.98	156.62
9	9.273	21.09	1391.81	-383.38	208.55
10	10.364	26.06	-855.90	-637.91	279.68
11	11.455	31.59	0.00	1300.00	483.272



**Slika 5.18.** Dijagram slijezanja nosača opterećenog koncentriranim silama na rubu



Slika 5.19. Dijagram momenta savijanja nosača opterećenog koncentriranim silama na rubu



Slika 5.20. Dijagram poprečne sile nosača opterećenog koncentriranim silama na rubu

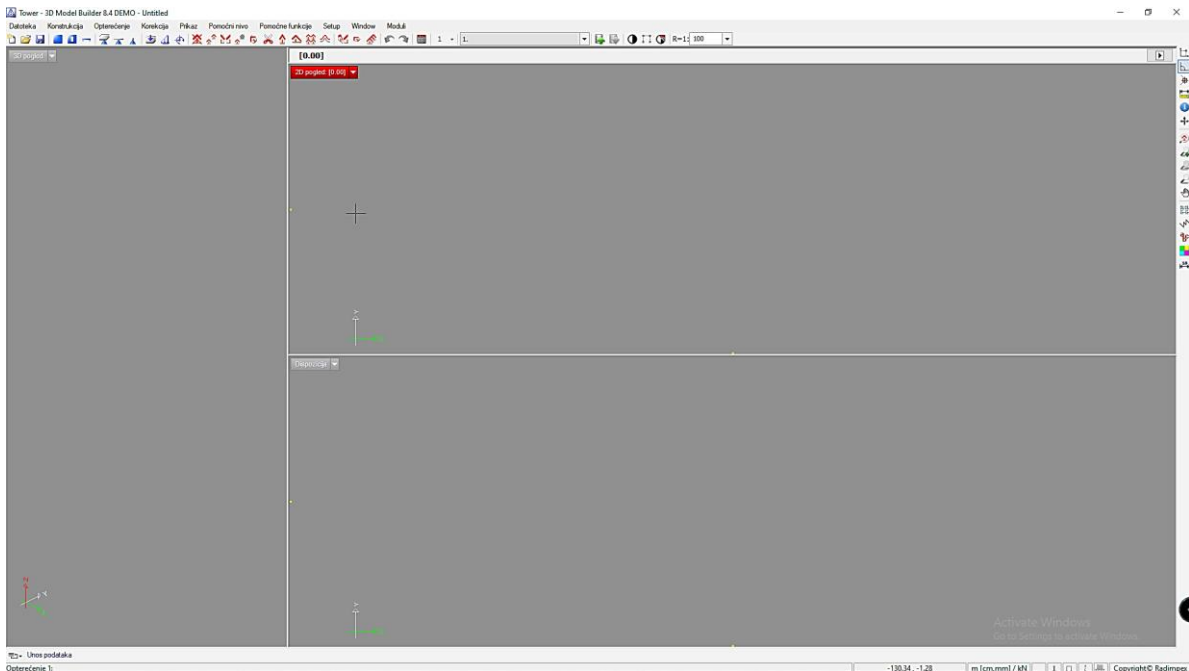
Dijagram poprečne sile prikazan na slici 5.20 prikazuje raspodjelu poprečnih sila u temeljnom nosaču, te je vidljivo da se najveće sile javljaju neposredno ispod mjesta djelovanja koncentriranih sila.

## 6. PRORAČUN U RAČUNALNOM PROGRAMU TOWER 8.4 DEMO

„Program Tower služi z statičku i dinamičku analizu ravnih i prostornih konstrukcija. Proračun se provodi metodom konačnih elemenata, a geometrija modela definira se grafički, iscrtavanjem samih konstruktivnih elemenata i opterećenja. Program se sastoji od četiri modula, koju su međusobno povezani“ [4]:

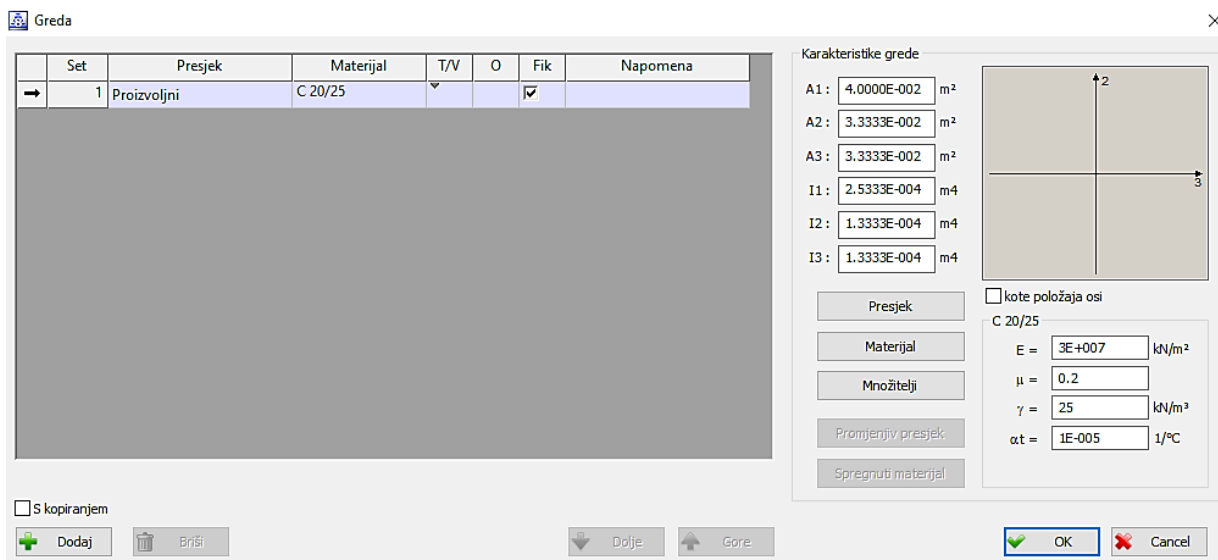
- Unos podataka
- Formiranje mreže
- Proračun
- Obrada rezultata

Pokretanjem računalnog programa Tower, otvara se sučelje na slici 6.1., te je zatim potrebno formirati koordinatni sustav.



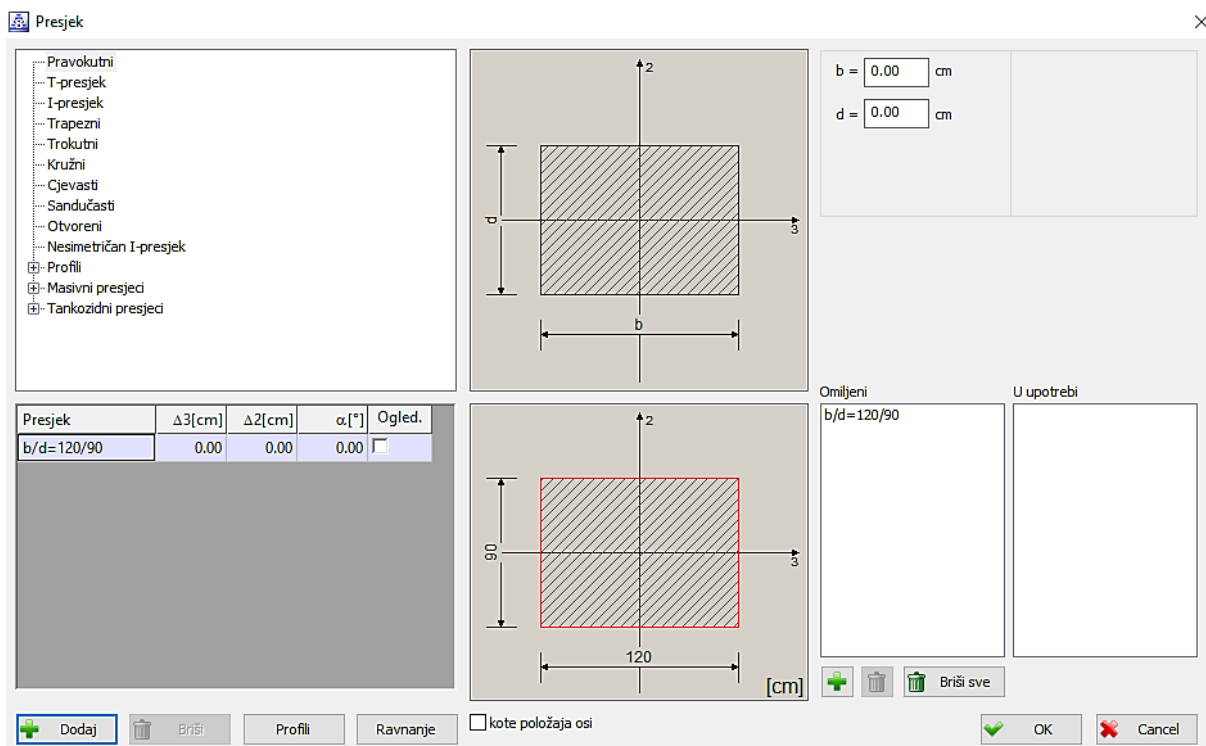
**Slika 6.1.** Početno sučelje programa Tower 8.4 Demo

Nakon formiranja koordinatnog sustava može se krenuti sa izradom modela, najprije se određuje ikona „Greda“, proizvoljno se određuje početna točka i u komandi redak upisuje se dužina nosača, u ovom slučaju  $L=10\text{m}$ . pritiskom tipke Enter otvara se prozor u kojem se zadaju karakteristike grede slika 6.2..



Slika 6.2. Sučelje za definiranje karakteristika grede

Klikom na komandno polje „Presjek“ otvara se dijaloški okvir na slici 6.3. u kojem se definiraju dimenzije presjeka, u ovom slučaju  $B = 1.20 \text{ cm}$ ,  $h = 90 \text{ cm}$ , unos dimenzija potvrđuje se klikom na „Dodaj“ te zatim klikom na „Ok“



Slika 6.3. Sučelje za definiranje dimenzija presjeka

Klikom na komandno polje „Materijal“ otvara se dijaloški okvir na slici 6.4. u kojem je potrebno definirati razred betona od kojega je nosač izrađen, odabiremo razred betona C20/25  $E_s = 30000 \text{ MN/m}^2$ . Unos se potvrđuje klikom na polje „Ok“.

Biblioteka materijala

Beton	Čelik	Drvo	Opeka/Blokovi	Ostalo	Svi materijali		
Naziv	Tip	E [kN/m <sup>2</sup> ]	μ	γ [kN/m <sup>3</sup> ]	αt [1/°C]	Em [kN/m <sup>2</sup> ]	μm
C 12/15	Beton	2.7000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	2.7000E+007	0.20
C 16/20	Beton	2.9000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	2.9000E+007	0.20
→ C 20/25	Beton	3.0000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.0000E+007	0.20
C 25/30	Beton	3.1000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.1000E+007	0.20
C 30/37	Beton	3.3000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.3000E+007	0.20
C 35/45	Beton	3.4000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.4000E+007	0.20
C 40/50	Beton	3.5000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.5000E+007	0.20
C 45/55	Beton	3.6000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.6000E+007	0.20
C 50/60	Beton	3.7000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.7000E+007	0.20
C 55/67	Beton	3.8000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.8000E+007	0.20
C 60/75	Beton	3.9000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	3.9000E+007	0.20
C 70/85	Beton	4.1000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	4.1000E+007	0.20
C 80/95	Beton	4.2000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	4.2000E+007	0.20
C 90/105	Beton	4.4000E+007	0.20	25.00	1.0000E-005	4.4000E+007	0.20

Gore Dolje Dodaj Briši OK Cancel

Slika 6.4. Sučelje za definiranje vrste materijala

Potrebno je dodati linearni ležaj ispod cijele grede i potvrditi unos tipkom „Enter“ nakon čega se otvara dijaloški okvir na slici 6.5..

Linijski ležaj

Set	R1	R2	R3	M1	Napomena
→ 1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

K,R1: 1.0000E+010  
**K,R2: 1.2352E+004**  
 K,R3: 1.0000E+010  
 K,M1: 1.0000E+010

Množitelji

Tlo  
 b = 1.200 m

Karakteristike zida  
 d: 0.2 m  
 C 20/25  
 E = 3E+007 kN/m<sup>2</sup>  
 μ = 0.2  
 γ = 25 kN/m<sup>3</sup>  
 αt = 1E-005 1/°C  
 Em = 3E+007 kN/m<sup>2</sup>  
 μm = 0.2

Materijal

S kopiranjem  
 Dodaj  
 Briši  
 Modelira se koristeći poluprostor  
 Podaci poluprostora

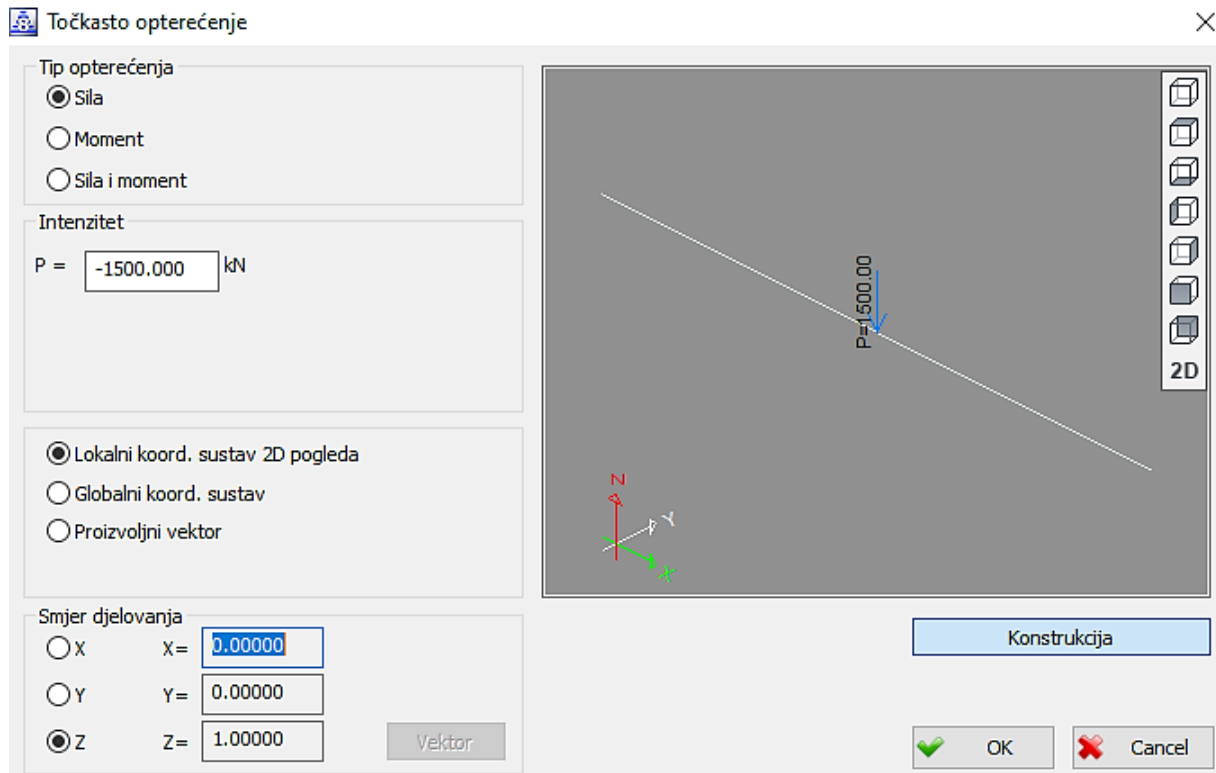
Gore Dolje

OK Cancel

Slika 6.5. Dijaloški okvir „Linijski ležaj“

Pomoću četiri parametra: R1, R2, R3, M1, određen je set linijskih oslonaca. parametri određuju rotaciju ili pomak oslonca u smjeru njegove lokalne osi. Navedeno je na slici 6.5. označeno brojem 1. nosač se nalazi na tlu pa je spriječen pomak oslonca u smjeru lokalne osi R2, odnosno

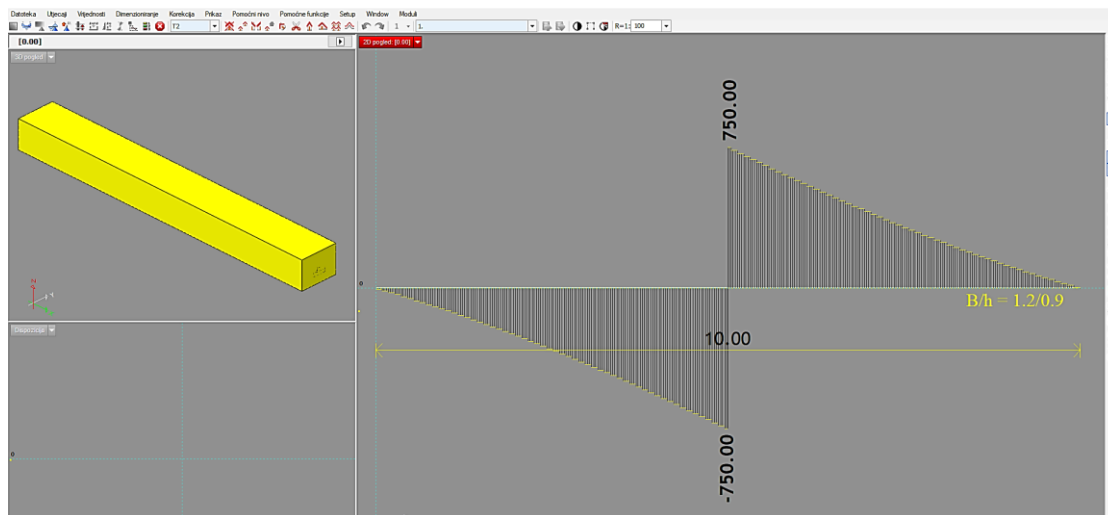
za tu os se dobivaju reakcije. U pravokutnik 2 upisuje se krutost oslonca tj.  $k_s$ . Još je preostalo označiti da je linijski oslonac tlo s širinom  $B=1.2\text{m}$ . Prije proračuna potrebno je dodati točkasto opterećenje na sredinu ležaja kao što je prikazano na slici 6.6.



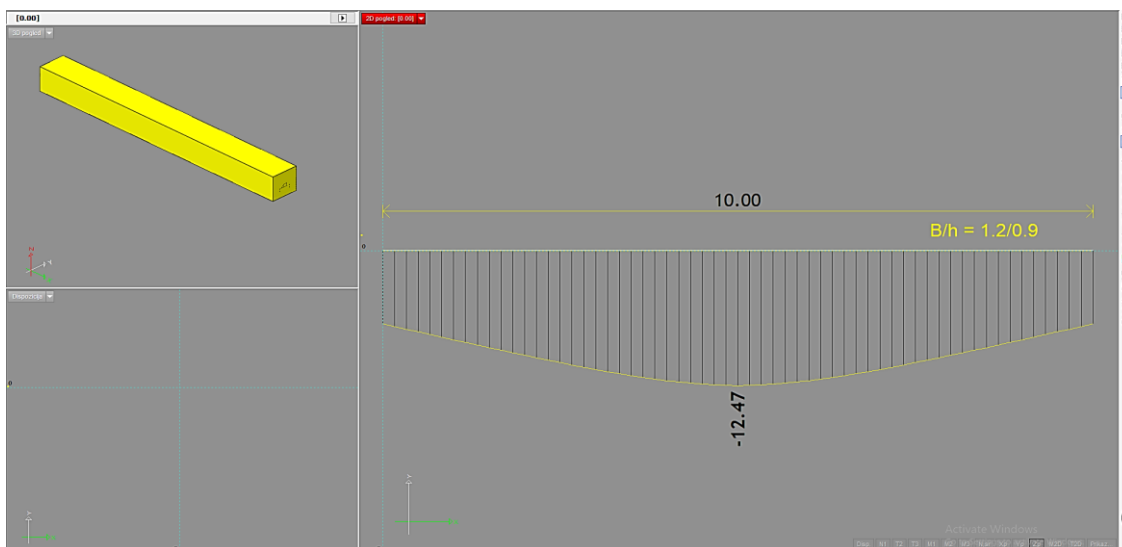
Slika 6.6. dijaloški okvir „Točkasto opterećenje“

Time su uneseni svi parametri koji su potrebni za proračun. Za dobivanje rezultata potrebno je formirati mrežu na kartici „Moduli“ nakon čega je potrebno odabrati „Proračunaj“. Proračun se vrši po teoriji I. reda bez seizmičkog proračuna. Na kartici „Utjecaji“ klikne se na „Greda“ i moguće je pregledavanje dobivenih rezultata prikazanih na slici 6.7., slici 6.8. i 6.9..

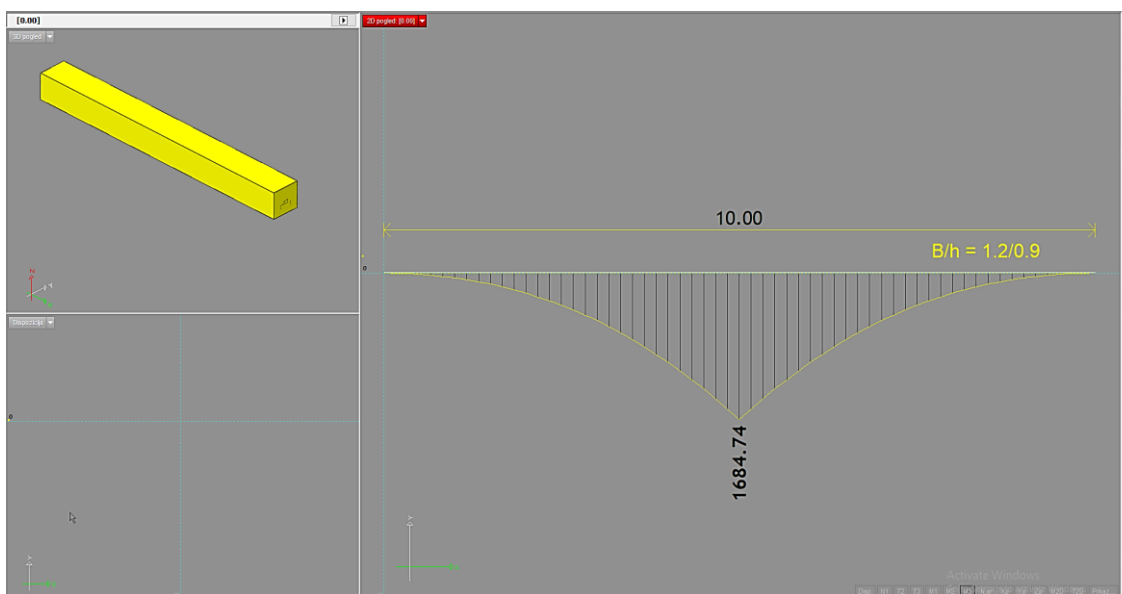




Slika 6.7. Dijagram poprečne sile iz programa Tower 8.4. Demo



Slika 6.8. Dijagram slijeganja iz programa Tower 8.4. Demo



Slika 6.9. Dijagram momenta savijanja iz programa Tower 8.4. Demo

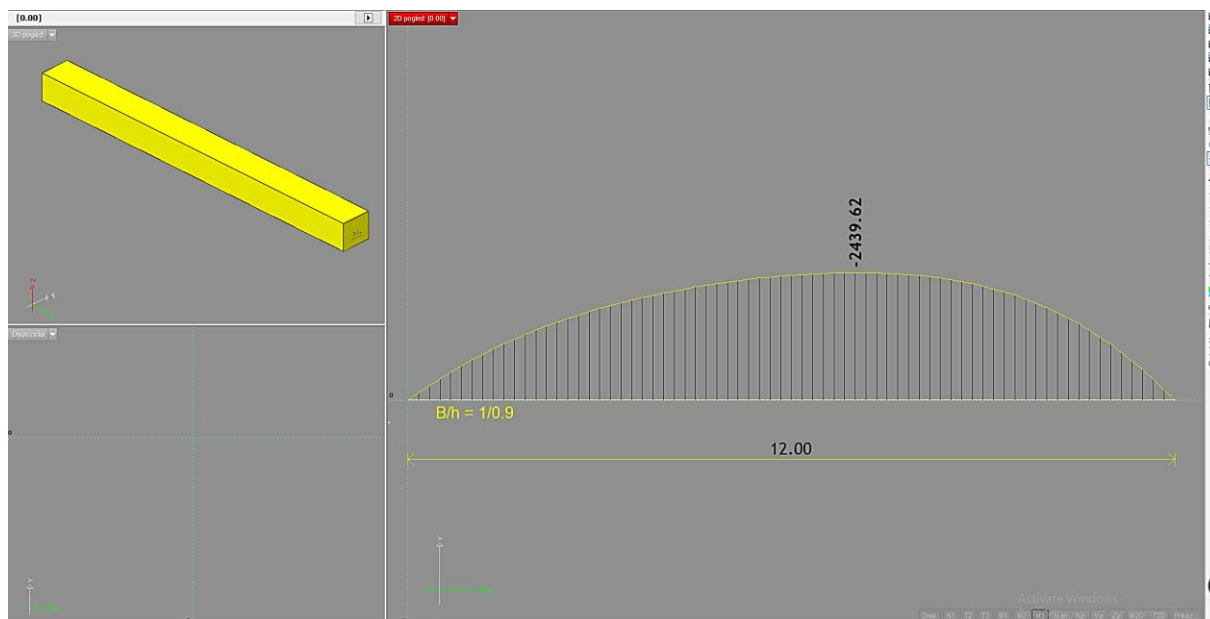
Tablica 6.1. Rezultati Deformacije grede iz računalnog programa Tower 8.4. Demo

Deformacija grede GLO – Opterećenje 1				
Oznaka	LC	X[m]	Zp [mm]	q(x)
Nivo: [0.00m]				
(1-21)	1	0.00	-7.263	89.71
		0.50	-7.886	97.41
		1.00	-8.509	105.10
		1.50	-9.129	112.76
		2.00	-9.735	120.24
		2.50	-10.317	127.43
		3.00	-10.858	134.12
		3.50	-11.337	140.03
		4.00	-11.729	144.87
		4.50	-12.004	148.72
		5.00	-12.127	149.79
		5.50	-12.004	148.72
		6.00	-11.729	144.87
		6.50	-11.337	140.03
		7.00	-10.858	134.12
		7.50	-10.317	127.43
		8.00	-9.735	120.24
		8.50	-9.129	112.76
		9.00	-8.509	105.10
		9.50	-7.886	97.41
		10.00	-7.263	89.71

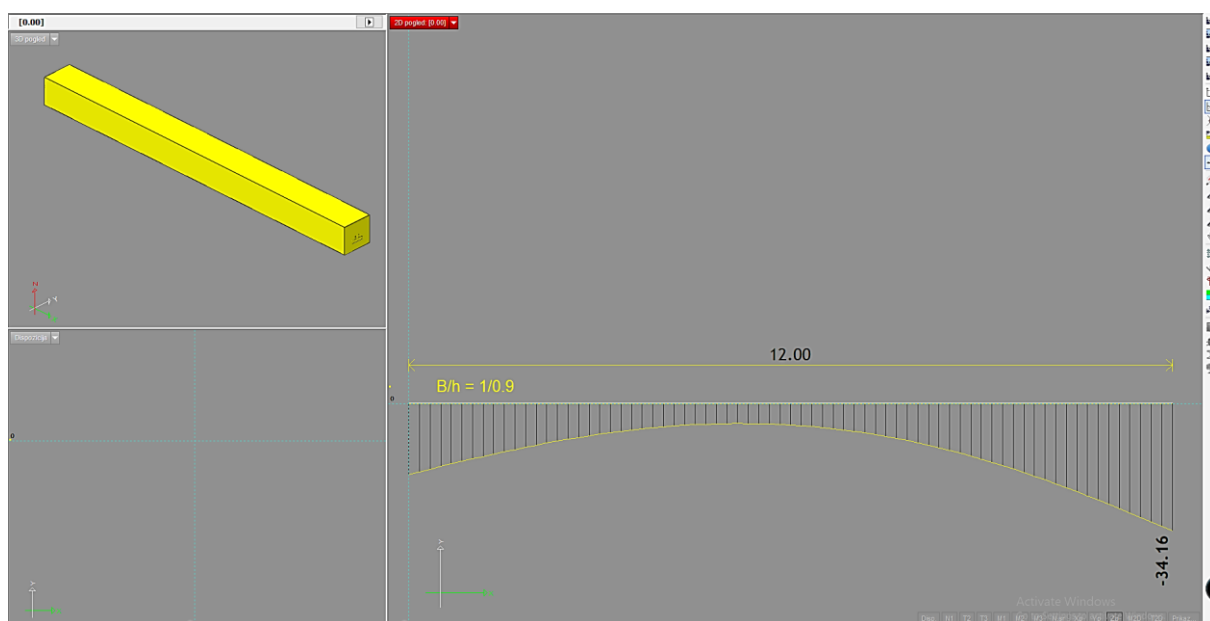
Tablica 6.2. Rezultati reznih sila u gredi iz računalnog programa Tower 8.4. Demo

Rezne sile u gredama – Opterećenje 1				
Oznaka	LC	X[m]	M3 [kNm]	T2 [kN]
Nivo: [0.00m]				
(1-21)	1	0.00	0	0
		0.50	13.456	-55.58
		1.00	56.134	-121.40
		1.50	130.34	-180.36
		2.00	238.38	-255.97
		2.50	382.49	-322.91
		3.00	564.83	-407.71
		3.50	787.40	-481.77
		4.00	1052.0	-574.11
		4.50	1360.0	-653.32
		5.00	1712.6	-750.00
		5.00	1712.6	750.00
		5.50	1360.0	653.32
		6.00	1052.0	574.11
		6.50	787.40	481.77
		7.00	564.83	407.71
		7.50	382.49	322.91
		8.00	238.38	255.97
		8.50	130.34	180.36
		9.00	56.134	121.40
		9.50	13.456	55.58
		10.00	0	0

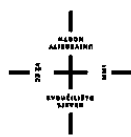
Isti postupak ponovljen je za zadatak u kojem opterećenje djeluje na početku i kraju nosača. Rezultati proračuna prikazani su dijagramima na slici 6.10. i 6.11. i tablicama:



Slika 6.10. Dijagram momenta savijanja iz programa Tower 8.4. Demo



Slika 6.11. Dijagram slijeganja iz programa Tower 8.4. Demo



Tablica 6.3. Rezultati Deformacije grede iz računalnog programa Tower 8.4. Demo

<b>Deformacija grede GLO – Opterećenje 1</b>				
Oznaka	LC	X[m]	Zp [mm]	q(x)
(1-21)	1	0.00	-18.979	264.81
		0.50	-16.883	235.56
		1.00	-14.849	207.18
		1.50	-12.926	180.35
		2.00	-11.154	155.63
		2.50	-9.571	133.54
		3.00	-8.204	114.47
		3.50	-7.081	98.80
		4.00	-6.222	86.81
		4.50	-5.646	78.78
		5.00	-5.368	74.90
		5.50	-5.401	75.36
		6.00	-5.757	80.32
		6.50	-6.441	89.87
		7.00	-7.460	104.09
		7.50	-8.816	123.01
		8.00	-10.507	146.60
		8.50	-12.529	174.81
		9.00	-14.871	207.49
		9.50	-17.516	244.39
		10.00	-20.442	285.22
10.50	-23.617	329.52		
11.00	-26.999	376.70		
11.50	-30.537	426.07		
12.00	-34.165	476.69		

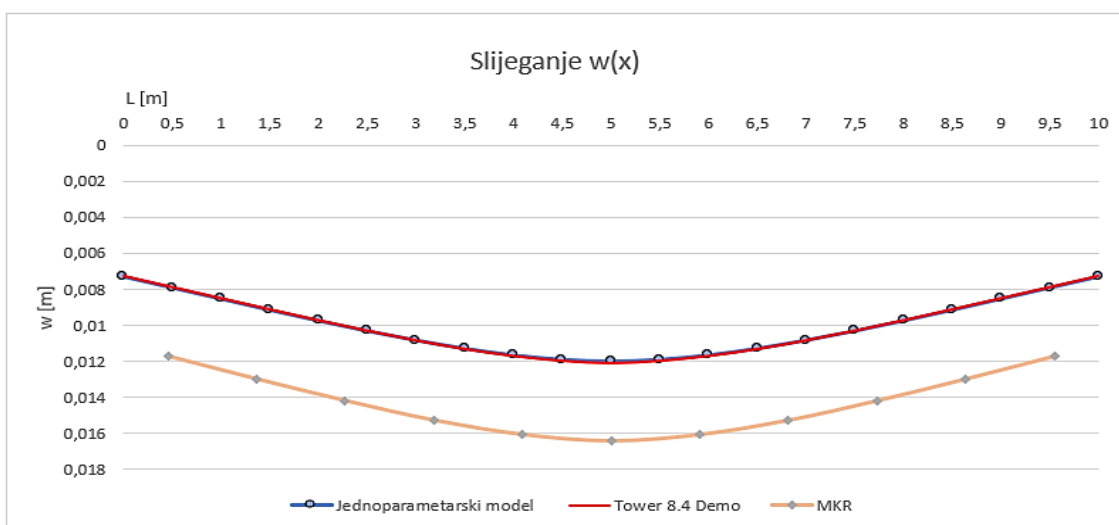
Tablica 6.4. Rezultati Rezne sile u gredi iz računalnog programa Tower 8.4. Demo

<b>Rezne sile u gredama – Opterećenje 1</b>				
Oznaka	LC	X[m]	M3 [kNm]	T2 [kN]
(1-21)	1	0.00	0	900
		0.50	-416.90	777.08
		1.00	-774.91	658.91
		1.50	-1081.1	572.54
		2.00	-1342.3	482.41
		2.50	-1564.5	417.56
		3.00	-1753.4	350.53
		3.50	-1913.6	302.28
		4.00	-2049.1	251.62
		4.50	-2163.0	213.80
		5.00	-2257.1	171.51
		5.50	-2332.5	137.05
		6.00	-2389.1	94.227
		6.50	-2425.6	47.131
		7.00	-2439.6	2.527
		7.50	-2427.6	-59.962
		8.00	-2384.9	-121.50
		8.50	-2305.5	-209.21
		9.00	-2182.4	-295.79
		9.50	-2007.5	-418.22
		10.00	-1771.4	-537.42
10.50	-1464.1	-703.08		
11.00	-1074.3	-861.33		
11.50	-590.42	-1076.9		
12.00	0	-1278.6		

## 7. REZULTATI I ANALIZA PRORAČUNA

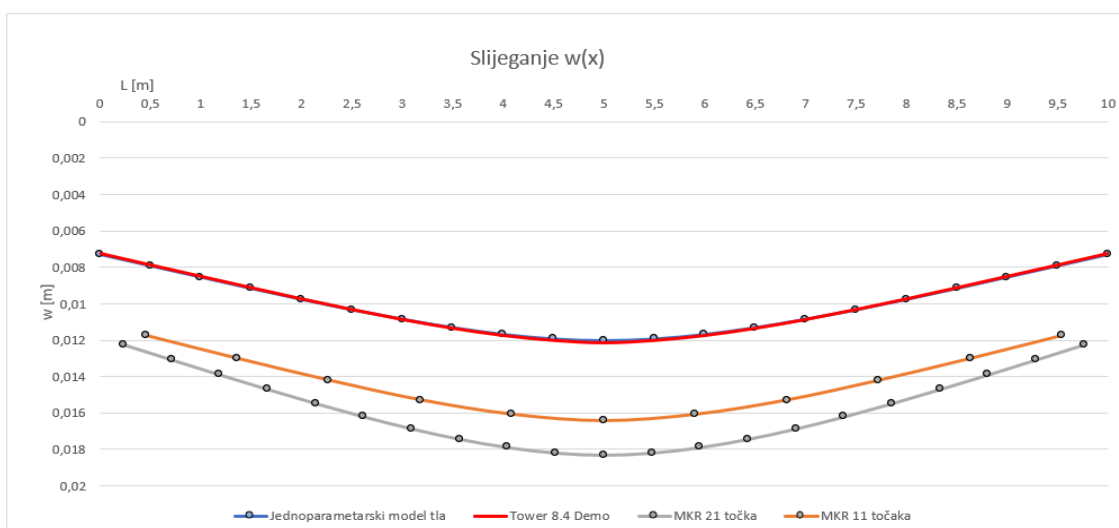
### 7.1. Usporedba rezultata dobivenih različitim metodama proračuna

Rezultati proračuna prvog primjera u kojem koncentrirana sila djeluje na sredini nosača, dobiveni analitičkom metodom i programom Tower pokazuju minimalne razlike, što je očekivano s obzirom na korištenje analitičke metode s jednoparametarskim modelom tla, a u programu Tower proračun je proveden unoseći samo jedan parametar tla, ali metoda konačnih razlika pokazuje odstupanja u rezultatima zbog drugačijeg načina proračuna. Na grafikonima se nalaze dijagrami pojedinih elemenata proračuna i njihove vrijednosti proračunate različitim metodama.



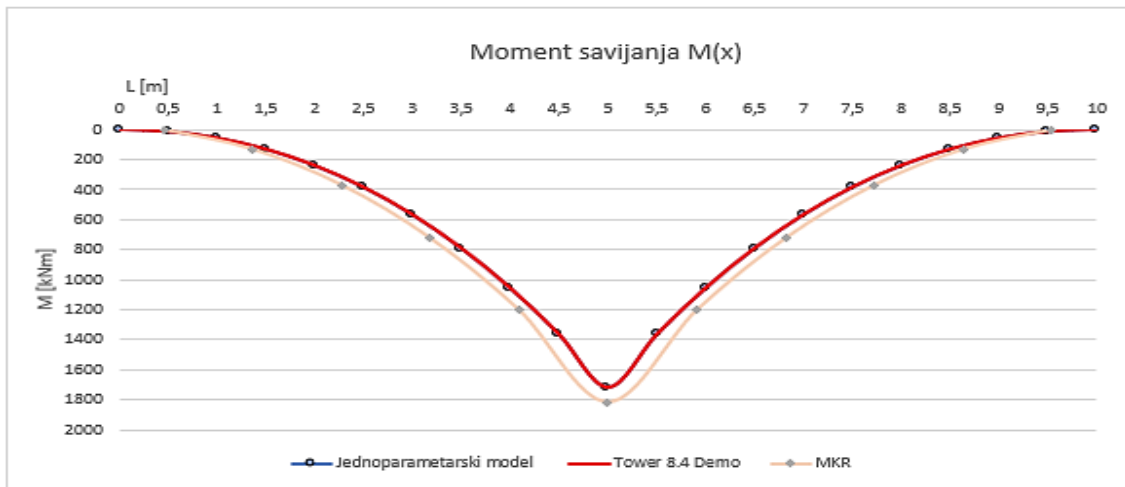
Slika 7.1. Dijagram slijeganja za različite načine proračuna

Analizirajući dijagram slijeganja na slici 7.1., primjećuje se gotovo identičan rezultat za jednoparametarski model i program Tower. Razlika je najizraženija na sredini nosača, gdje djeluje koncentrirana sila i iznos slijeganja je najveći, a razlika iznosi 0.11 mm. Obzirom na iznos slijeganja na ovom dijelu nosača, ova razlika od 0.9% je zanemariva. MKR pokazuje veće odstupanje u rezultatu.



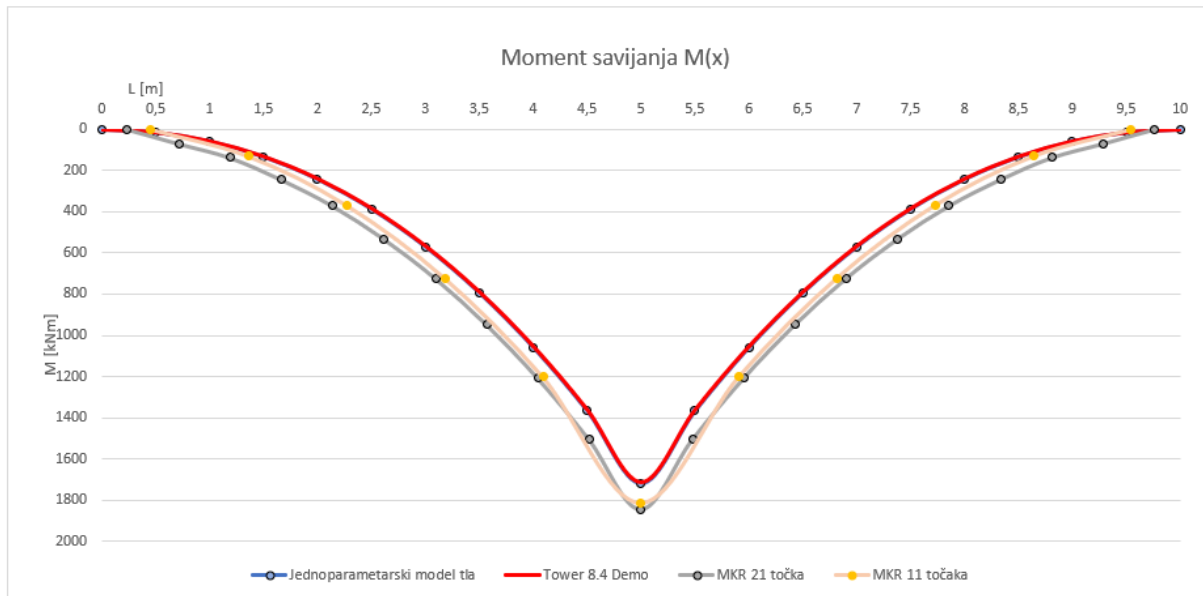
**Slika 7.11.** Usporedba dijagrama slijeganja MKR s više točaka

Slika 7.10. Prikazuje usporedbu rezultata MKR s više točaka, iz slike je vidljivo da se povećanjem broja elemenata ili točaka povećava i iznos slijeganja.



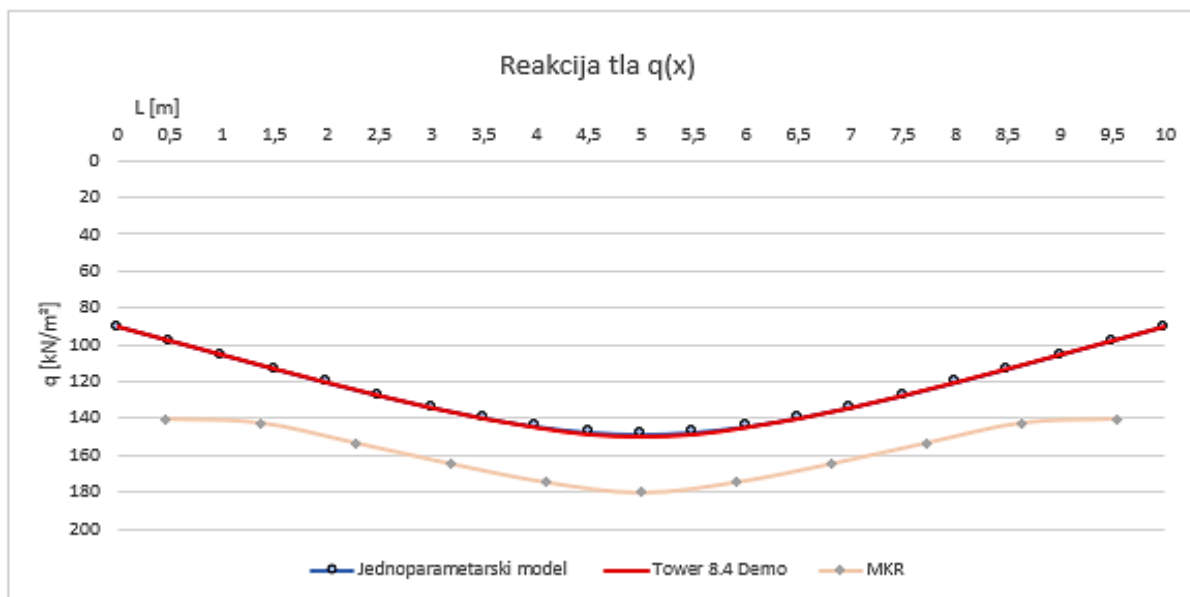
**Slika 7.2.** Dijagram momenta savijanja za različite načine proračuna

Dijagram momenata na slici 7.2., isto kao i prethodni dijagram slijeganja pokazuje gotovo identične rezultate kod proračuna jednparametarskim modelom tla i programom Tower. Najveće odstupanje javlja se u sredini nosača gdje djeluje koncentrirana sila, a iznosi 6.82  $\text{kNm}$  što je 0.4%. Kao i u prethodnim dijagramima vidljivo je da je odstupanje rezultata dobivenih MKR prisutno u svakoj točki nosača.



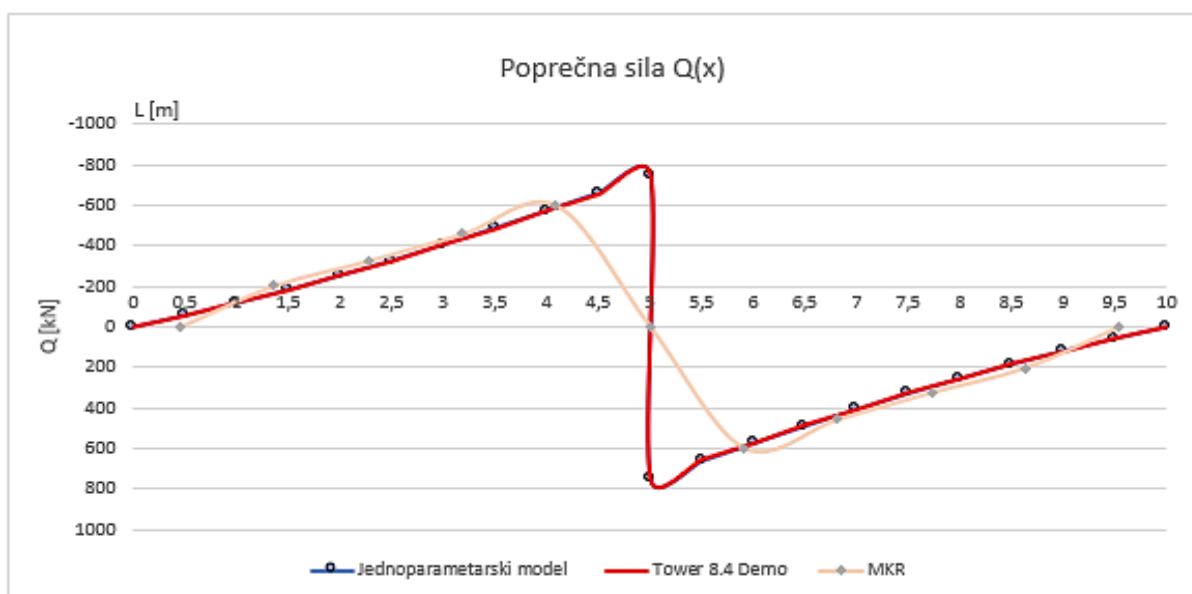
**Slika 7.10.** Usporedba dijagrama momenta savijanja MKR s više točaka

Preciznost proračuna Metodom Konačnih Razlika moguće je poboljšati podjelom temeljno nosača na više elemenata, na slici 7.9. prikazana je usporedba proračuna s 11 karakterističnih točaka i 21, te je vidljivo da krivulja u kojoj je odabrano više točaka prikazuje veće momente što je korisno kako bi se spriječile neželjene posljedice na konstrukciju koja leži na temelju.



Slika 7.3. Dijagram reakcije tla za različite načine proračuna

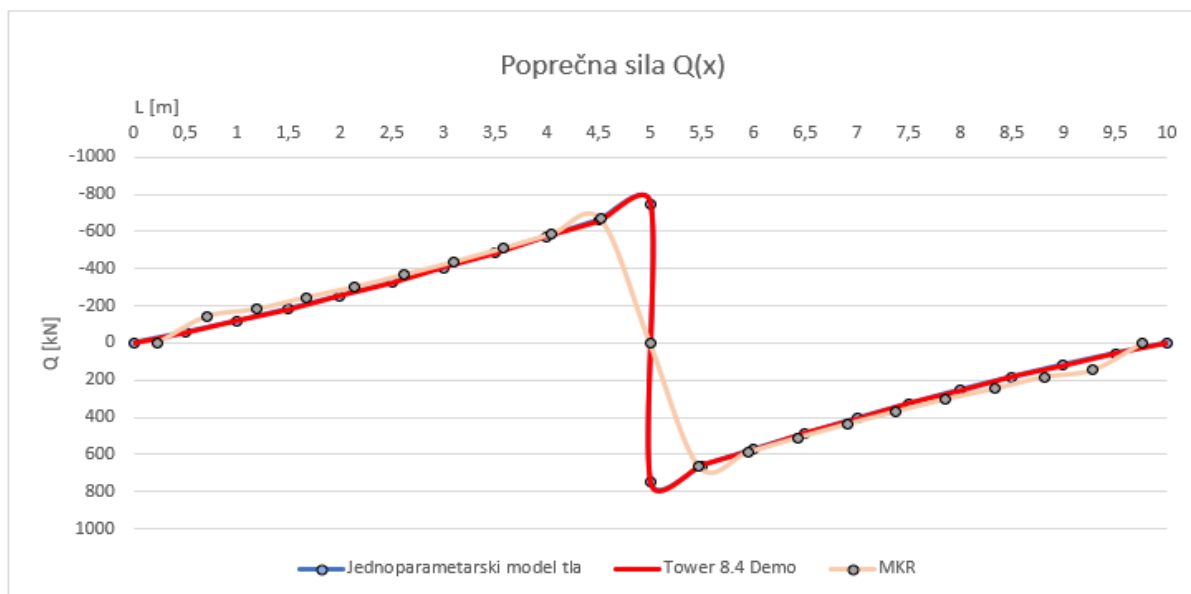
Dijagram reakcije tla na slici 7.3. ne pokazuje veće odstupanje u rezultatu kod jednparametarskog modela i Towera, najveća razlika u dijagramu reakcije tla javlja se na 4.5m i 5.5m neposredno prije i nakon mjesta gdje djeluje koncentrirana sila, a razlika iznosi 1.36 kN/m<sup>2</sup> dok MKR odstupa od rezultata u svakoj točki nosača.



Slika 7.4. Dijagram Poprečne sile za različite načine proračuna

Na dijagramu poprečne sile na slici 7.4., primjećuju se dva rubna uvjeta koja se koriste u rješavanju zadatka na jednparametarskom modelu, na  $x=0$  vidi se da poprečna sila iznosi 0 i na  $x=5m$  vidi se da je na lijevoj polovici nosača poprečna sila jednaka -750kN. Najveća razlika

u rezultatu nalazi se neposredno prije i nakon mjesta djelovanja koncentrirane sile. Na svim rezultatima poprečne sile primjećuje se neobično velika razliku između analitičkog proračuna temeljnog nosača i programa Tower, no demo verzija programa Tower ograničena je na računanje 300 entiteta, te su iz tog razloga vrijednosti uprosječne na svakih 0.1m nosača dakle vrijednost poprečne sile jednaka je prosjeku svih poprečnih sila na intervalu  $[0,0.1]$ . kod metode konačnih razlika vidi se da je poprečna sila na sredini nosača jednaka 0 što u stvarnosti nije slučaj. Slično kao i program Tower, MKR uprosječuje vrijednosti poprečnih sila, no na bitno većem razmaku.

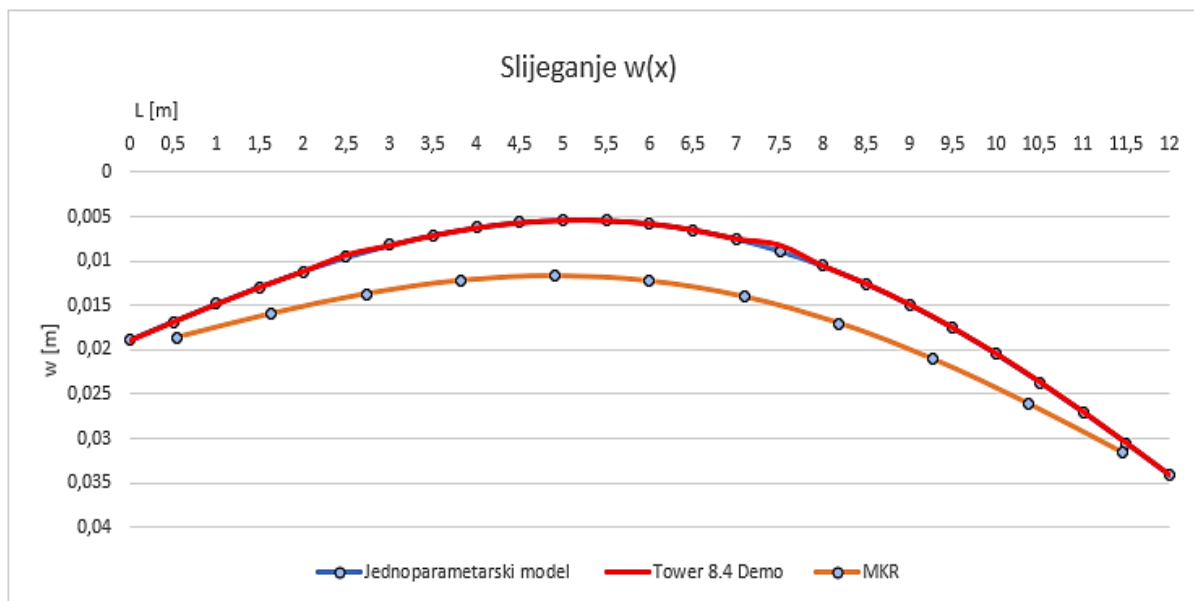


**Slika 7.9.** Dijagram poprečnih sila nakon progušćenja karakterističnih točaka u MKR

Na slici 7.9. prikazana je ista usporedba kao i na slici 7.4., no u ovom slučaju broj karakterističnih točaka je 21 umjesto prethodnih 11. Vidljivo je da povećanje broja točaka uzrokuje precizniji rezultat u MKR.

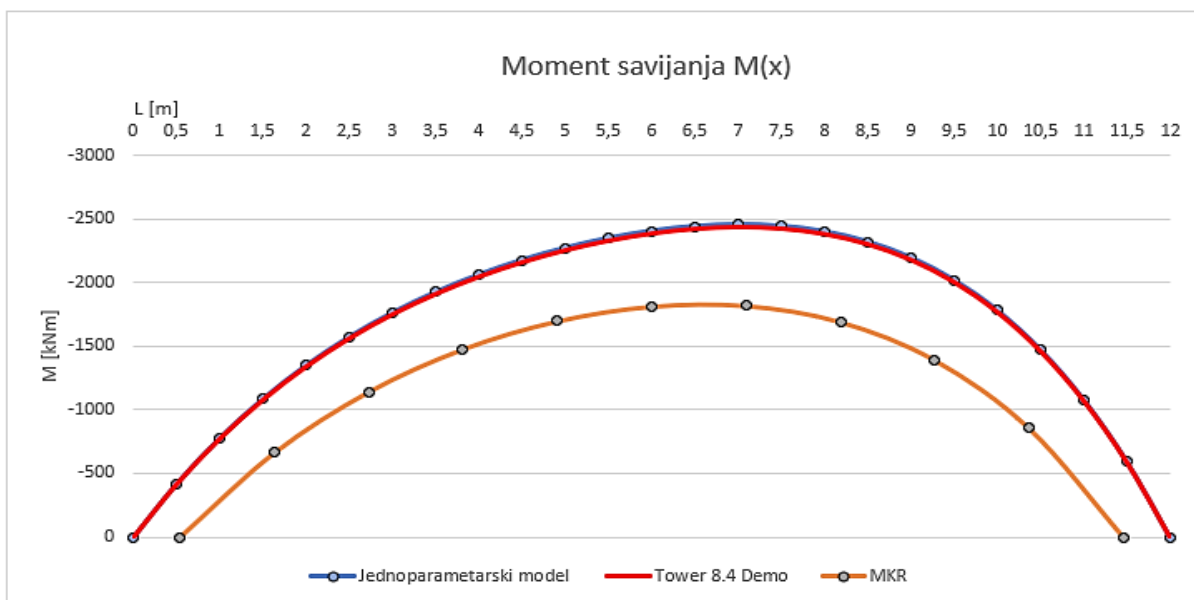
Primjer zadatka u kojem koncentrirana sila djeluje na rubovima nosača rezultati proračuna dobiveni različitim metodama gotovo su identični za jednoparametarski model i program Tower, a rezultati MKR se bitno razlikuju u svakoj točki nosača. Grafički su prikazani dijagrami: slijeganja, momenta savijanja, poprečnih sila i reakcija tla.





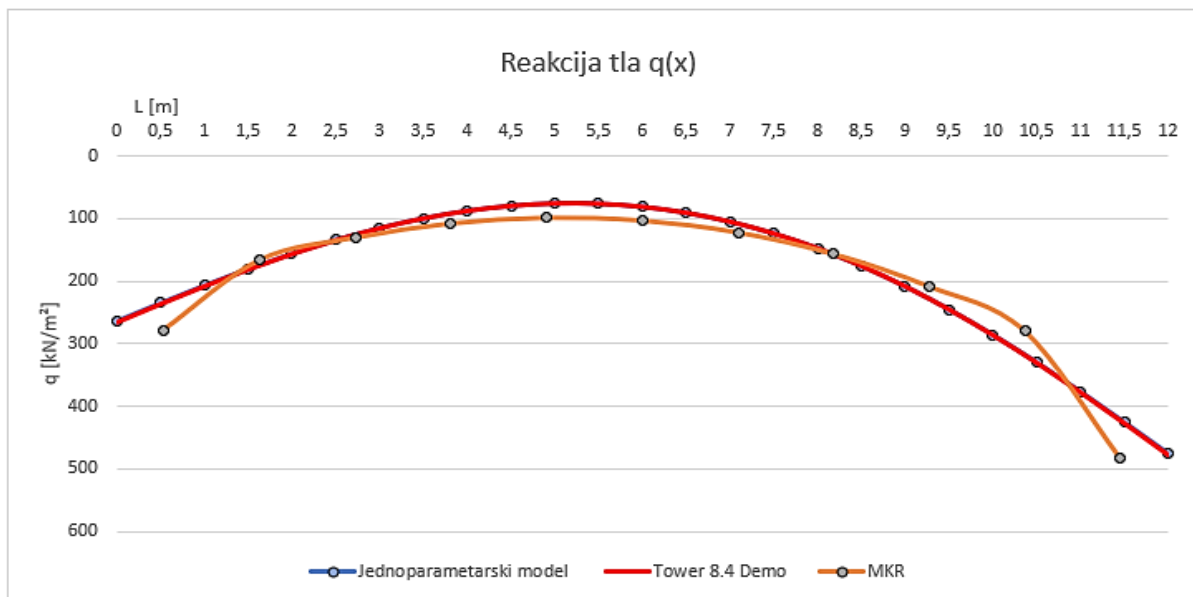
Slika 7.5. Dijagram slijeganja za različite načine proračuna

Analizirajući dijagram slijeganja na slici 7.5., primjećuje se da je najveća vrijednost slijeganja prisutna na mjestu djelovanja koncentrirane sile od 1300kN. Vrijednost slijeganja zatim postupno opada prema sredini nosača, nakon čega počinje ponovno rasti kako se približavamo drugoj koncentriranoj sili od 900kN. Rezultati dobiveni jednparametarskim modelom tla i programom Tower demo približno su jednaki, dok se kod metode konačnih razlika primjećuje odstupanje koje je najizraženije na mjestu gdje su slijeganja najmanja.



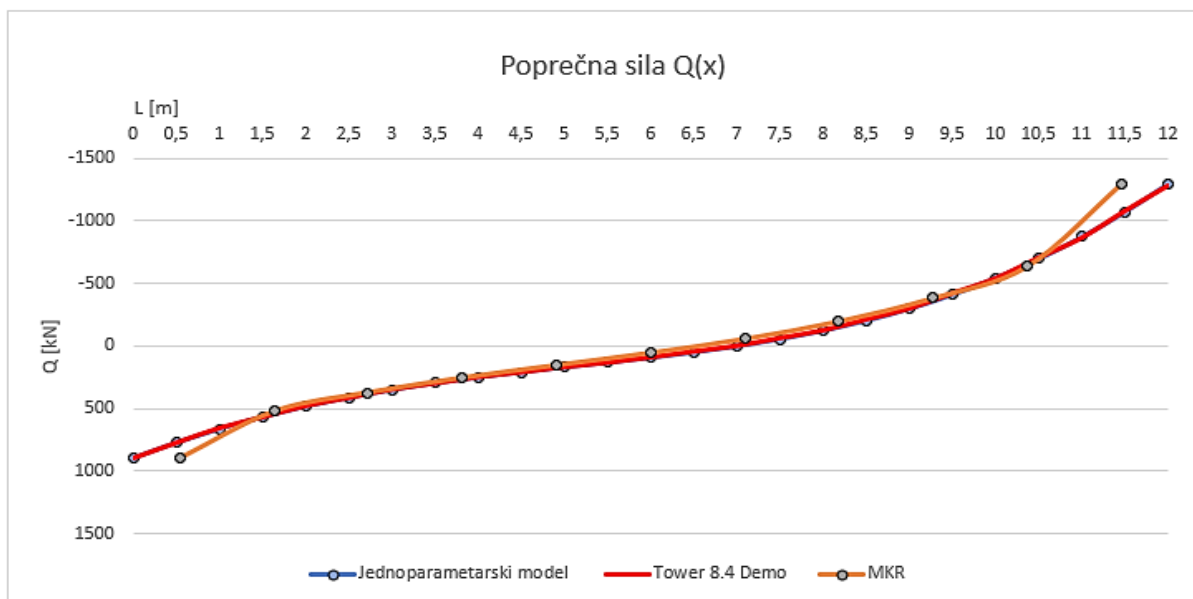
Slika 7.6. Dijagram momenta savijanja za različite načine proračuna

Dijagramu momenta savijanja na slici 7.6, prikazuje da su razlike u proračunu s jednim parametrom male, no razlika se povećava što je moment veći. MKR kao i u prethodnim dijagramima odstupa u svakoj točki.



Slika 7.7. Dijagram reakcije tla za različite načine proračuna

U dijagramu reakcije tla na slici 7.7, rezultati jednparametarskog modela i programa Tower Demo daju približno jednake rezultate, dok rezultati MKR minimalno odstupaju. U dijagramu poprečnih sila na slici 7.8. vidljivo je da nema većih rasipanja rezultata, što je začuđujuće s obzirom na primjer rasipanja rezultata MKR kod poprečne sile u prethodnom zadatku.



Slika 7.8. Dijagram poprečne sile za različite načine proračuna

## 8. ZAKLJUČAK

Nosači na elastičnoj podlozi ili temeljni nosači primjenjuju se kod temeljenja zgrada, kranskih staza na gradilištima ili brodskim lukama itd. gdje su prisutna relativno velika opterećenje i u praksi je česta rasprava u zadovoljavajućoj nosivosti kako ne bi došlo do neželjenih posljedica. U radu su analizirani najčešći primjeri opterećenja koji se javljaju u praksi. Nosači klasificirani prema koeficijentu savitljivosti  $\alpha L$ , u kojem je važan ulazni podatak za proračun  $\alpha$  koji predstavlja bezdimenzionalni koeficijent krutosti, te je potrebno precizno proračunati parametre koji su potrebni za njegov izračun. Krutost nosača  $EI$  također je jedan od ulaznih parametara za proračun, a ovisi o dimenzijama presjeka temeljnog nosača i kvaliteti materijala. Koeficijent reakcije podloge kao jedini parametar kojim je u radu opisano tlo u jednoparametarskom modelu i programu Tower Demo računa se iščitavanjem vrijednosti iz Bjerumovih dijagrama i uvrštavanjem istih u jednadžbu. Metoda iščitavanja iz dijagrama za ovakve tipove zadatka, ali i općenito za probleme koje rješavaju inženjeri graditeljstva nije idealna jer ovisi o vještini osobe koja iščitava vrijednosti, te najmanja greška dovodi do pogrešnih rezultata što je kasnije teško uočiti ako osoba nije iskusna. Prije početka proračuna momenata savijanja, poprečnih sila i slijeganja važno je shvatiti koja opća rješenja diferencijalne jednadžbe ravnog elastičnog nosača poprečno opterećenog na njegovu os su prikladna za taj zadatak, a sama rješenja ovise o vrsti i položaju koncentrirane sile u odnosu na nosač.

Usporedbom različitih metoda proračuna vidljivo je da su rezultati jednoparametarskog model tla i programa Tower demo gotovo identični što ne začuđuje obzirom da je u oba slučaja tlo opisalo samo jednim parametrom. Rezultati proračuna Metodom Konačnih Razlika nešto odstupaju od spomenutih. Točnost dobivenih rezultata kod ove metode može se poboljšati povećanjem broja elemenata.

Najčešći nedostatak jednoparametarskog modela je odabir koeficijenta reakcije podloge, što često dovodi do nerealnih rezultata, pa se metoda konačnih razlika smatra točnija. Može se reći da je u praksi važno provoditi proračune s više metoda kako bi se čim realnije donijela konačna odluka.

Prikazani postupci proračuna, rezultati i usporedbe različitim postupcima mogu biti korisni u praksi za brze inženjerske proračune, tj. brzih predmetnih procjena.

## 9. LITERATURA

<b>Broj</b>	<b>Autor</b>	<b>Godina</b>	<b>Naslov</b>
1.	<i>I.B. Teodoru</i>	2009.	<i>„EBBEF2p-A Computer Code for Analysing Beams on Elastic Foundation „</i>
2.	<i>E. Nonveiller</i>	1979.	<i>„Mehanika tla i temeljenje građevina“, Školska knjiga Zagreb, Zagreb</i>
3.	<i>P. Santrač</i>	2012.	<i>„Fundiranje-predavanje i vježbe – Interakcija konstrukcije i tla“, Građevinski fakultet Subotica, Subotica</i>
4.	<i>Radimpex TOWER 8.4. Demo</i>		<i>Radimpex TOWER 8.4. Demo: Računalni softver za statičku i dinamičku analizu konstrukcija</i>
5.	<i>B. Soldo, P. Presečki, M. Kuhta</i>	2016.	<i>„Enclosure to the Analysis of Flexion of Transverse Weighted Constructions on the Ground,“ Civil Engineering Science and Practice, 6th International Conference, Žabljak</i>
6.	<i>B. Soldo</i>	2022.	<i>Nastavni materijali sa predavanja iz kolegija Temeljenje na Preddiplomskom studiju graditeljstva Sveučilište Sjever, Varaždin</i>
7.	<i>B. Soldo</i>	2022.	<i>Nastavni materijali sa predavanja iz kolegija Geomehanika 2 na Preddiplomskom studiju graditeljstva Sveučilište Sjever, Varaždin</i>
8.	<i>V. Šimić</i>	2002.	<i>„Otpornost materijala I“-2. izdanje, Školska knjiga Zagreb</i>
9.	<i>V. Šimić</i>	1995.	<i>„Otpornost materijala II“-1. izdanje, Školska knjiga Zagreb</i>
10.	<i>B. Soldo, M. Orešković, A. Aniskin</i>	2010.	<i>„Contribution to Knowledge of Koefficient of Reaction Substrates“ // Proceedings of 3rd Symposium of Macedonian Association of Geotechnics, Skopj</i>
11.	<i>M. Prskalo, A. Vrdoljak</i>	2016.	<i>„Analiza slijeganja temeljnih ploča metodom konačnih razlika“, e-Zbornik: Elektronički zbornik radova Građevinskog fakulteta Mostar, Broj 12, 68-75, Prosinac 2016</i>

## 10. POPIS SLIKA

Broj i opis slike	Izvor
1.1. Deformacija elastičnih temelja pod jednolikim naprezanjem a) Winklerova pretpostavka b) Stvarnost	I.B. Teodoru (2009) – „EBBEF2p-A Computer Code for Analysing Beams on Elastic Foundation „
3.1. Portalna dizalica Taisun nosivosti 20000 tona	<a href="https://th.bing.com/th/id/OIP.CV56V2F96PnqkF-pdY4IsgHaFj?pid=ImgDet&amp;rs=1/">https://th.bing.com/th/id/OIP.CV56V2F96PnqkF-pdY4IsgHaFj?pid=ImgDet&amp;rs=1/</a>
3.2. Dizalica u luci	<a href="https://zir.nsk.hr/islandora/object/unin:3156">https://zir.nsk.hr/islandora/object/unin:3156</a>
3.3. Tipovi temeljnih traka i nosača	<a href="https://zir.nsk.hr/islandora/object/unin:3156">https://zir.nsk.hr/islandora/object/unin:3156</a>
3.4. Željeznička pruga- nosač na elastičnoj podlozi	<a href="https://icz.hr/2021/07/23/zbog-remonta-lijevi-kolosijek-pruge-drzavna-granica-savski-marof-zagreb-gk-bit-ce-zatvoren-za-promet/">https://icz.hr/2021/07/23/zbog-remonta-lijevi-kolosijek-pruge-drzavna-granica-savski-marof-zagreb-gk-bit-ce-zatvoren-za-promet/</a>
3.5. Željeznička pruga- nosač na elastičnoj podlozi	<a href="https://www.tportal.hr/biznis/clanak/nakon-50-godina-gradi-se-nova-zeljeznicka-pruga-20150714">https://www.tportal.hr/biznis/clanak/nakon-50-godina-gradi-se-nova-zeljeznicka-pruga-20150714</a>
4.0. Elastični temeljni nosač na tlu	Vlastita izrada
4.1. Armatura elastičnih temeljnih nosača na tlu	<a href="https://gradnja-tamara.hr/project/betoniranje-temelja-i-deka/">https://gradnja-tamara.hr/project/betoniranje-temelja-i-deka/</a>
4.2. Jednparametarski model tla	Vlastita izrada
4.3. Temeljni nosač podijeljen na n elemenata s promatranom točkom na rubu elementa	Vlastita izrada
4.4. Reakcija tla ispod nosača	Vlastita izrada
5.1. Temeljni nosač na elastičnoj podlozi opterećen koncentriranom silom u sredini	Vlastita izrada
5.2. Shematski prikaz temeljnog nosača opterećenog koncentriranom silom na sredini	Vlastita izrada
5.3. Bjerumov dijagram za koeficijent $\mu_1$	Vlastita izrada
5.4. Bjerumov dijagram za koeficijent $\mu_0$	Vlastita izrada
5.5. Dijagram slijeganja	Vlastita izrada
5.6. Dijagram momenta savijanja	Vlastita izrada
5.7. Dijagram Poprečne sile	Vlastita izrada
5.8. Shematski prikaz nosača opterećenog dvjema koncentriranim silama	Vlastita izrada
5.9. Shematski prikaz nosača opterećenog dvjema koncentriranim silama	Vlastita izrada
5.10. Bjerumov dijagram za koeficijent $\mu_1$	Vlastita izrada
5.11. Bjerumov dijagram za koeficijent $\mu_0$	Vlastita izrada
5.12. Dijagram slijeganja	Vlastita izrada
5.13. Dijagram momenta savijanja	Vlastita izrada
5.14. Dijagram poprečne sile	Vlastita izrada

<b>5.15.</b> <i>Dijagram slijeganja nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>5.16.</b> <i>Dijagram poprečne sile nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>5.17.</b> <i>Dijagram momenta savijanja nosača opterećenog koncentriranom silom u sredini</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>5.18.</b> <i>Dijagram slijeganja nosača opterećenog koncentriranim silama na rubu</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>5.19.</b> <i>Dijagram momenta savijanja nosača opterećenog koncentriranim silama na rubu</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>5.20.</b> <i>Dijagram poprečne sile nosača opterećenog koncentriranim silama na rubu</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.1.</b> <i>Početno sučelje programa Tower 8.4 Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.2.</b> <i>Sučelje za definiranje karakteristika grede</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.3.</b> <i>Sučelje za definiranje dimenzija presjeka</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.4.</b> <i>Sučelje za definiranje vrste materijala</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.5.</b> <i>Dijaloški okvir „Linijski ležaj“</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.6.</b> <i>dijaloški okvir „Točkasto opterećenje“</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.7.</b> <i>Dijagram poprečne sile iz programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.8.</b> <i>Dijagram slijeganja iz programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.9.</b> <i>Dijagram momenta savijanja iz programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.10.</b> <i>Dijagram momenta savijanja iz programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>6.11.</b> <i>Dijagram slijeganja iz programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>7.1.</b> <i>Dijagram slijeganja za različite načine proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>7.2.</b> <i>Dijagram momenta savijanja za različite načine proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>7.4.</b> <i>Dijagram Poprečne sile za različite načine proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>7.5.</b> <i>Dijagram slijeganja za različite načine proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>7.6.</b> <i>Dijagram momenta savijanja za različite načine proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>7.7.</b> <i>Dijagram reakcije tla za različite načine proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>7.8.</b> <i>Dijagram poprečne sile za različite načine proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>7.9.</b> <i>Dijagram poprečnih sila nakon progušćenja karakterističnih točaka u MKR</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>Slika 7.10.</b> <i>Usporedba dijagrama momenta savijanja MKR s više točaka</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<b>Slika 7.11.</b> <i>Usporedba dijagrama slijeganja MKR s više točaka</i>	<i>Vlastita izrada</i>

## 11. POPIS TABLICA

<b>Broj i opis</b>	<b>Izvor</b>
<i>2.1. Klasifikacija temeljnih nosača prema parametru krutosti <math>\alpha L</math></i>	<i>Santrač, P.(2012): „Fundiranje-predavanje i vježbe – Interakcija konstrukcije i tla“, Građevinski fakultet Subotica, Subotica</i>
<i>5.1. Tablica ulaznih parametara</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>5.2. Rezultati proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>5.3. Tablica ulaznih parametara</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>5.4. Prikaz rezultata proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>5.5. Prikaz rezultata proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>5.6. Prikaz rezultata proračuna</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>6.1. Rezultati Deformacije grede iz računalnog programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>6.2. Rezultati reznih sila u gredi iz računalnog programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>6.3. Rezultati Deformacije grede iz računalnog programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>
<i>6.4. Rezultati Rezne sile u gredi iz računalnog programa Tower 8.4. Demo</i>	<i>Vlastita izrada</i>

Sveučilište  
Sjever

IZJAVA O AUTORSTVU

Završni/diplomski rad isključivo je autorsko djelo studenta koji je isti izradio te student odgovara za istinitost, izvornost i ispravnost teksta rada. U radu se ne smiju koristiti dijelovi tuđih radova (knjiga, članaka, doktorskih disertacija, magistarskih radova, izvora s interneta, i drugih izvora) bez navođenja izvora i autora navedenih radova. Svi dijelovi tuđih radova moraju biti pravilno navedeni i citirani. Dijelovi tuđih radova koji nisu pravilno citirani, smatraju se plagijatom, odnosno nezakonitim prisvajanjem tuđeg znanstvenog ili stručnoga rada. Sukladno navedenom studenti su dužni potpisati izjavu o autorstvu rada.

Ja, Antonio Belečetić (*ime i prezime*) pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor/~~ica~~ završnog/~~diplomskog~~ (*obrisati nepotrebno*) rada pod naslovom Prilog analizi proračuna temeljnih nosača analitičkim i numeričkim metodama (*upisati naslov*) te da u navedenom radu nisu na nedozvoljeni način (bez pravilnog citiranja) korišteni dijelovi tuđih radova.

Student/ica:

(*upisati ime i prezime*)

*Antonio Belečetić*  
(vlastoručni potpis)

Sukladno čl. 83. Zakonu o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju završne/diplomske radove sveučilišta su dužna trajno objaviti na javnoj internetskoj bazi sveučilišne knjižnice u sastavu sveučilišta te kopirati u javnu internetsku bazu završnih/diplomskih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice. Završni radovi istovrsnih umjetničkih studija koji se realiziraju kroz umjetnička ostvarenja objavljuju se na odgovarajući način.

Sukladno čl. 111. Zakona o autorskom pravu i srodnim pravima student se ne može protiviti da se njegov završni rad stvoren na bilo kojem studiju na visokom učilištu učini dostupnim javnosti na odgovarajućoj javnoj mrežnoj bazi sveučilišne knjižnice, knjižnice sastavnice sveučilišta, knjižnice veleučilišta ili visoke škole i/ili na javnoj mrežnoj bazi završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice, sukladno zakonu kojim se uređuje znanstvena i umjetnička djelatnost i visoko obrazovanje.