

# Primjena statistike u kontroli kvalitete

---

**Novak, Melita**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University North / Sveučilište Sjever**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:122:188949>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-23**



*Repository / Repozitorij:*

[University North Digital Repository](#)





# Sveučilište Sjever

Završni rad br. 433/PS/2024

## Primjena statistike u kontroli kvalitete

Melita Novak, 1191249720

Varaždin, rujan 2024. godine





# Sveučilište Sjever

Odjel za Proizvodno strojarstvo

Završni rad br. 433/PS/2024

## Primjena statistike u kontroli kvalitete

**Studentica**

Melita Novak, 1191249720

**Mentorica**

izv. prof. dr. sc. Lovorka Gotal Dmitrović

Varaždin, rujan 2024. godine

# Prijava završnog rada

## Definiranje teme završnog rada i povjerenstva

ODJEL Strojstvo

STUDIJ Proizvodno strojarstvo

PRISTUPNIK Melita Novak

MATIČNI BROJ 1191249720

DATUM 06.09.2024.

KOLEGIJ Statistika

NASLOV RADA Primjena statistike u kontroli kvalitete

NASLOV RADA NA ENGL. JEZIKU Application of statistics in quality control

MENTOR izv.prof.dr.sc. Lovorka Gotal Dmitrović

ZVANJE izvanredna profesorica

ČLANOVI POVJERENSTVA

- doc.dr.sc. Tomislav Veliki - predsjednik povjerenstva
- dr.sc. Jurica Hižak - član
- izv.prof.dr.sc. Lovorka Gotal Dmitrović - članica
- izv.prof.dr.sc. Sanja Šolić - zamjenska članica
- 

## Zadatak završnog rada

BROJ 433/PS/2024

OPIS

U uvodnom dijelu završnog rada dati pregled dijela deskriptivne (opisne) statistike, koja će biti korištena kod obrade podataka u praktičnom dijelu rada, a koja uključuje: grupiranje podataka, srednje vrijednosti (mjere centralne tendencije) i mjera raspršenosti (mjera disperzije). U grupiranju podataka obraditi apsolutnu frekvenciju, distribuciju frekvencije, relativnu frekvenciju, kumulativnu apsolutnu frekvenciju, kumulativnu relativnu frekvenciju, frekvencijsku tablicu, grafički prikaz statističkih podataka poligonom frekvencija, histogramom i stupčastim dijagramom. Obraditi srednje vrijednosti s naglaskom na: aritmetičku sredinu, mod i medijan, a kod mjera raspršenosti naglasak staviti na: raspon varijacije, varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije. Opisati diskretnu slučajnu varijablu preko binomne te poissonova razdioba te neprekidnu slučajnu varijablu preko uniformne i normalne (Gaussove) razdioba.

Opisati primjenu statistike u kontroli kvalitete, odnosno kod grupiranja podataka, pareto analize i kontrolnih karata. Dati pregled podjele kontrolnih karata: koje su za mjerljive i koje su za atributivne karakteristike. Objasniti procjenu sposobnosti procesa, potencijalnu sposobnost procesa, omjer sposobnosti procesa te mjere centriranost procesa preko demonstrirane izvrsnosti. Opisati donju i gornju potencijalnu sposobnost procesa te stvarnu sposobnost procesa.

U praktičnom dijelu završnog rada na stvarnim podacima primijeniti opise i objašnjenja iz teoretskog djela.

Nakon analize rezultata, na temelju njih donijeti zaključak.

ZADATAK URUČEN

10.09.2024.

OPIS MENTOR

*Melita Novak*



## **Predgovor**

*Zahvaljujem izv.prof. dr. sc. Lovorki Gotal Dmitrović na mentorstvu i razumijevanju prilikom izrade završnog rada.*

*Zahvaljujem se roditeljima i prijateljima na potpori i podršci tijekom studiranja.*

## Sažetak

Tema ovog završnog rada je primjena statistike u kontroli kvalitete. U prvom dijelu rada je opisana deskriptivna statistika, tj. grupiranje i grafički prikaz podataka, mjere centralne tendencije i mjere raspršenosti. Također su opisane diskretne i neprekinute slučajne varijable i njihove razdiobe. Nadalje je opisana primjena statistike prilikom izrade kontrolnih karata, kao i podjela kontrolnih karata. Isto tako je opisano kako se izračunavaju kontrolne granice i kako se procjenjuje sposobnost procesa. U drugom dijelu je na primjeru prikazana primjena deskriptivne statistike te izrada  $\bar{x} - s$  kontrolnih karata za endstop klin, kao i proračun procjene sposobnosti procesa. U trećem dijelu su analizirani rezultati proračuna kontrolnih granica, kao i proračun procjene sposobnosti procesa.

Ključne riječi: deskriptivna statistika, kontrolne karte, kontrolne granice i procjena sposobnosti procesa.

## Abstract

The topic of this thesis is application of statistics in quality control. In the first part of the paper, descriptive statistics are described. That is, grouping and graphical display of data, measures of central tendency and measures of dispersion. Discrete and continuous random variables and their distributions are also described. Furthermore, the application of statistics in the creation of control charts, as well as the division of control charts, is described. It is also described how control limits are calculated and how process capability is assessed. In the second part, the application of descriptive statistics is presented on an example and the creation of  $\bar{x} - s$  control charts for the endstop pin, as well as the calculation of the assessment of the process capability. In the third part, the results of calculation of the control limits, as well as the calculation of the assessment of process capability are analyzed.

Key words: descriptive statistics, control charts, control limits and process capability assessment.

## Popis korištenih kratica

<b>GKG</b>	Gornja kontrolna granica
<b>UCL</b>	Upper control limit
	Gornja kontrolna granica
<b>DKG</b>	Donja kontrolna granica
<b>LCL</b>	Lower control limit
	Donja kontrolna granica



# Sadržaj

1.	Uvod.....	1
2.	Primjena statistike u kontroli kvalitete .....	2
2.1.	Deskriptivna statistika .....	2
2.1.1.	<i>Grupiranje i grafički prikaz podataka</i> .....	2
2.1.2.	<i>Srednje vrijednosti (Mjere centralne tendencije)</i> .....	5
2.1.3.	<i>Mjere raspršenosti (disprezije)</i> .....	7
2.2.	Diskretna slučajna varijabla .....	8
2.2.1.	<i>Binomna razdioba</i> .....	8
2.2.2.	<i>Poissonova razdioba</i> .....	9
2.3.	Neprekidna slučajna varijabla .....	9
2.3.1.	<i>Normalna ili Gaussova razdioba</i> .....	10
2.4.	Kontrola kvalitete .....	14
2.4.1.	<i>Kontrolne karte</i> .....	14
2.4.2.	<i>Procjena sposobnosti procesa</i> .....	19
3.	Praktični dio .....	23
3.1.	Primjena deskriptivne statistike na izmjerenim podacima .....	23
3.2.	$\bar{x} - s$ kontrolne karte.....	25
4.	Analiza rezultata .....	38
4.1.	Analiza kontrolnih granica i potencijalne sposobnosti procesa .....	38
5.	Zaključak.....	39
6.	Literatura.....	41

# 1. Uvod

Kontrola kvalitete vuče svoje korijene još iz srednjovjekovnih cehova iz 13. st., a inspekcije proizvoda su se primjenjivale kao oblik kontrole kvalitete za vrijeme industrijske revolucije. U 20. st. je Walter Shewhart počeo koristiti statističke metode u kontroli kvalitete i izumio kontrolne karte, a kontrola kvalitete se razvija i danas.

Kontrolom kvalitete tvrtke osiguravaju održavanje i poboljšavanje kvalitete proizvoda, ali isto tako osigurava da oštećeni proizvodi ne završe kod kupca. Dva su glavna cilja kontrole kvalitete: osiguravanje ujednačenosti proizvoda i smanjenje pogrešaka na proizvodu. Kontrola kvalitete se služi statistikom radi smanjenja pogreške i poboljšanja kvalitete proizvoda. Cilj ovog završnog rada je prikazati kojim statističkim metodama se služi kontrola kvalitete, te kako se te metode primjenjuju. Rad se sastoji od uvoda, teorijski obrađene teme statistika i primjena statistike u kontroli kvalitete, praktičnog dijela, analize rezultata i zaključka. Kontrola kvalitete se koristi deskriptivnom statistikom radi prikazivanja i kontrole nekog obilježja.

Kontrolne karte koje se uvelike primjenjuju u kontroli kvalitete, baziraju se na razdiobama. Kontrolne karte i njihova podjela te procjena sposobnosti procesa, opisani su u zadnjem poglavlju teoretskog dijela.

Praktični dio se sastoji od korištenja deskriptivne statistike, postupka izrade  $\bar{x} - s$  kontrolnih karata, tj. proračun kontrolnih granica i prikaza kontrolne karte kojom se prati aritmetička sredina i kontrolne karte kojom se prati standardna devijacija, na stvarnim podacima. Nakon izrade  $\bar{x} - s$  kontrolnih karata izračunati su indeksi sposobnosti procesa. Analizirani su rezultati koji su dobiveni proračunom kontrolnih granica, kao i rezultati koji su dobiveni proračunom indeksa sposobnosti procesa.

## 2. Primjena statistike u kontroli kvalitete

Statistika je grana primijenjene matematike koja se bavi prikupljanjem, uređivanjem, analizom, sažimanjem, prezentiranjem i tumačenjem velikog broja podataka i donošenjem zaključaka o pojavama i procesima koje ti podaci predočuju. [1] Kontrola kvalitete je proces kroz koji tvrtka nastoji osigurati održavanje ili poboljšanje kvalitete proizvoda [2], pa se tako kontrola kvalitete koristi statistikom da bi to postigla. [3]

### 2.1. Deskriptivna statistika

Kontrola kvalitete se koristi deskriptivnom statistikom prilikom opisivanja karakteristika kontrole kvalitete [4] kao što su mehanička svojstva, geometrijski oblik, dimenzije, funkcionalnost ili izgled. Deskriptivna statistika je skup postupaka kojima se sažimaju informacije sadržane u podacima i utvrđuju glavna obilježja, odnosno činjenice o pojavi ili skupini pojava predočenih podacima. [1]

#### 2.1.1. Grupiranje i grafički prikaz podataka

U kontroli kvalitete mjerenjem nekog obilježja  $X$  dobe se vrijednosti rezultata mjerenja, tj. statistički podaci tog obilježja. Statistički podaci nekog obilježja  $X$  su brojevi, tj. vrijednosti koje se označavaju sa  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dok je  $n$  broj koji govori koliko puta je mjereno obilježje  $X$ . Kada se vrijednosti koje su izmjerene ponavljaju, one se mogu označiti sa  $a_1, a_2, \dots, a_k, k \leq n$ . Broj koji pokazuje koliko se puta ponavlja neka vrijednost  $a_i$ , tj. koliko se puta pojavila prilikom mjerenja je  $f_i$  i naziva se apsolutna frekvencija ili učestalost. Zbroj svih apsolutnih frekvencija jednak je broju mjerenja, tj. prema formuli 1 [5]

$$\sum_{i=1}^k f_i = n. \quad (1)$$

Distribucija frekvencije su svi uređeni parovi  $(a_i, f_i), i = 1, 2, \dots, k$ . [5]

Apsolutna frekvencija, relativna frekvencija, kumulativna apsolutna frekvencija „manje od“ i frekvencijska tablica se primjenjuju u kontroli kvalitete kod pareto analize.

Relativna frekvencija  $f_{ri}$  od vrijednosti  $a_i$  dobiva se dijeljenjem apsolutne frekvencije s brojem mjerenja, tj. prema formuli 2 [5]:

$$f_{ri} = \frac{f_i}{n} \quad (2)$$

Budući da je suma svih apsolutnih frekvencija jednaka broju ponovljenih mjerenja vrijedi da je suma relativnih frekvencija obilježja  $X$  jednaka 1, tj. prema formuli 3 [5]:

$$\sum_{i=1}^k f_{ri} = 1. \quad (3)$$

Kumulativne apsolutne frekvencije „manje od“ su vrijednosti koje se dobivaju postupnim zbrajanjem apsolutnih frekvencija, prema formuli 4 [5]:

$$f_1, f_1 + f_2, \dots, f_1 + f_2 + \dots + f_{k-1} + f_k \quad (4)$$

Kumulativne apsolutne frekvencije „više od“ se dobivaju postupnim zbrajanjem apsolutnih frekvencija, prema formuli 5 [5]:

$$f_k, f_k + f_{k-1}, \dots, f_k + f_{k-1} + \dots + f_2 + f_1. \quad (5)$$

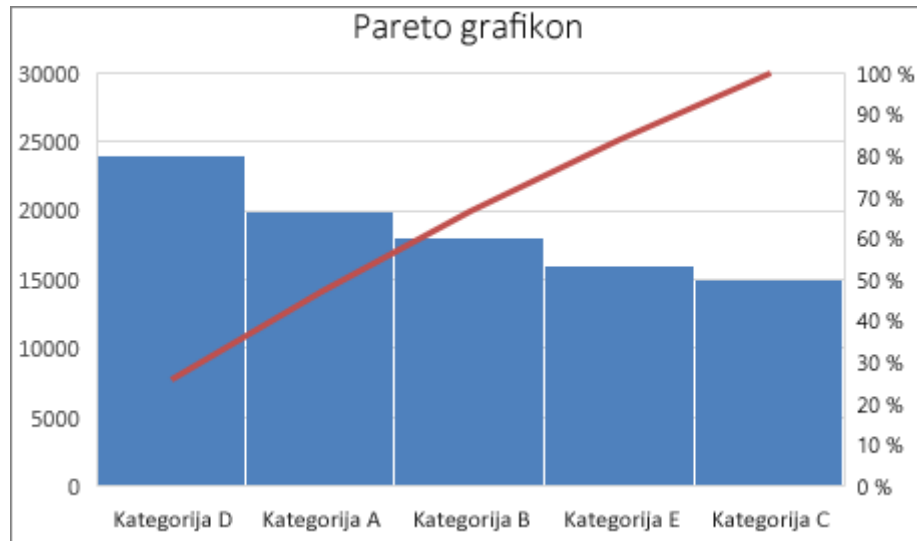
Kumulativna relativna frekvencija se dobiva istim principom kao i kumulativna apsolutna frekvencija „manja od“, ali sa vrijednostima relativne frekvencije. Statistički podaci se mogu grupirati u frekvencijsku tablicu u koju se npr. mogu unositi izmjerene vrijednosti, frekvencije, relativne frekvencije ili kumulativne relativne frekvencije. [5]

Statistički podaci se u kontroli kvalitete grafički prikazuju poligonom frekvencija, histogramom ili stupčastim dijagramom. Poligon frekvencija se dobiva tako da se u koordinatnom sustavu na osi apcisa označe vrijednosti  $a_i$ , a na osi ordinata vrijednosti frekvencija. Točke predstavljaju parovi  $(a_i, f_i)$  i one se spoje linijama u koordinatnom sustavu. [6] Histogram se dobiva tako da se na osi apcisa nalaze vrijednosti kontinuirane varijable, tj. intervali, a na osi ordinata se nalaze vrijednosti frekvencija. Visine stupaca su jednake frekvenciji, a stupci se dodiruju. Stupčasti dijagram se dobiva tako da se na osi apcisa nalaze vrijednosti diskretne varijable, a na osi ordinata se nalaze frekvencija. Visine stupaca su jednake frekvenciji, a stupci su razdvojeni. [7]

#### □ Pareto analiza

Pareto analiza je dobila naziv po Vilfredu Federicu Paretu koji je opazio da 80% bogatstva u Italiji pripada grupi od 20% ljudi. Zato se Pareto analiza temelji na tome da mali dio ima najveću učinak i služi za pronalazak najvažnijih uzroka gubitaka. Za prikaz podataka se koristi Pareto dijagram kojim se prikazuje koliko svaki faktor utječe rezultat, tj. gubitke. Drugi naziv za dijagram je i ABC dijagram, zato što se pojedinim faktorima radi lakšeg prikaza umjesto punog naziva dodjeljuju slova. Pareto analiza započinje izradom frekvencijske tablice u kojoj se nalaze utjecajni faktori i koliko puta se oni pojavljuju, tj. kolike su njihove apsolutne frekvencije. Slijedeći korak je da se faktorima promjeni redoslijed, u prvi red ide faktor s najvećom apsolutnom frekvencijom, pa prema manjoj i u zadnjem redu se nalazi faktor s najmanjom apsolutnom frekvencijom. Zatim se doda stupac s relativnim frekvencijama svakog faktora izraženim u postocima. U četvrti stupac

se upisuju kumulativne relativne frekvencije „manje od“ izražene u postocima. Pareto dijagram se konstruira tako da se na lijevoj strani na okomitoj osi označe frekvencije  $f_i$ , na vodoravnoj osi se označe utjecajni faktori, tj. slova i frekvencije se prikazu stupčastim dijagramom. Na okomitu os koja se nalazi s desne strane grafa označe se kumulativne relativne vrijednosti izražene u postocima koje se prikazu linijskim dijagramom. [8] Na *Slici 1* je prikazan primjer Pareto dijagrama.



Slika 1 Pareto dijagram [9]

#### □ Grupiranje podataka u razrede

Kako bi se podaci koji su dobiveni mjerenjem neke karakteristike kvalitete lakše prikazali oni se grupiraju u razrede. Kod grupiranja podataka u kontroli kvalitete broj razreda se određuje tako da:

- ako je broj podataka  $n$  nekoliko desetaka, za broj razreda se uzima  $G \approx 6-8$  [7]
- ako je broj podataka  $n$  između 100 i 200, za broj razreda se uzima  $G \approx \sqrt{n}$  [7]
- ako je broj podataka  $n$  veći od 200, za broj podataka se uzima  $G = 15$  [7]

Širina razreda se izračunava formulom 6 [7]:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{G - 1} \quad (6)$$

Donja granica prvog razreda se izračunava prema formuli 7 [7]:

$$D_g = x_{\min} - \frac{i}{2} \quad (7)$$

### 2.1.2. Srednje vrijednosti (Mjere centralne tendencije)

Srednja vrijednost u kontroli kvalitete služi kao konstanta kojom se predstavlja niz izmjerenih varijabilnih podataka i oko nje se gomilaju ti podaci. [10] Dije se na potpune i položajne mjere centralne tendencije. Potpune su aritmetička, harmonijska i geometrijska sredina. Za računanje potpunih srednjih vrijednosti koriste se sve vrijednosti, dok se za položajne srednje vrijednosti koriste podaci koji su određeni položajem u nizu. Položajne srednje vrijednosti su medijan i mod [5]

#### □ Aritmetička sredina

Aritmetička sredina se u kontroli kvalitete najčešće koristi kada su podaci normalno raspoređeni kao na primjer prilikom izrade kontrolnih karata za mjerljive karakteristike, tj.  $\bar{x}$ -R kontrolne karte i  $\bar{x}$ -s kontrolne karte. [11] Aritmetička sredina dobiva se kao omjer zbroja svih izmjerenih vrijednosti i broja mjerenja, tj.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  su izmjerene vrijednosti, dok je  $n$  broj mjerenja, pa prema formuli 8 [5]:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (8)$$

Aritmetička sredina se može računati i preko distribucije frekvencije kao omjer sume umnožaka apsolutne frekvencije i pripadajuće izmjerene vrijednosti i broja mjerenja. To se može prikazati formulom 9 [5]:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k a_i f_i}{n} \quad (9)$$

Prilikom izračunavanja aritmetičke sredine podataka razvrstanih u razrede za vrijednost  $a_i$  se uzima sredina širine razreda koja se nužno ne mora podudarati s stvarnom aritmetičkom sredinom razreda. [5]

Svojstva [5]:

1. Niz  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ima samo jednu aritmetičku sredinu.
2.  $x_{\min} \leq \bar{x} \leq x_{\max}$
3. Suma odstupanja vrijednosti od aritmetičke sredine je jednaka nuli, tj. prema formuli 10 [5]

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \quad (10)$$

4. Zbroj kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja  $X$  od aritmetičke sredine je minimalan.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 < \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2, c \neq \bar{x} \quad (11)$$

Zbroj kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja  $X$  od vrijednosti koja je različita od aritmetičke sredine je uvijek veća od zbroja kvadrata odstupanja od aritmetičke sredine, prema formuli 11 [5].

5. Ako se u nizu nalaze ekstremno male ili ekstremno velike vrijednosti nekog obilježja, aritmetička sredina nije reprezentativna, tj. na nju utječu ekstremne vrijednosti.

#### □ **Mod**

Slijedeća mjera centralne tendencije koja se koristi u kontroli kvalitete je mod. Mod je podatak u nizu s najvećom frekvencijom. [12] Ako su podaci grupirani u razrede mod se izračunava prema formuli 12 [5]:

$$M_o = L_o + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \cdot c \quad (12)$$

$L_o$  predstavlja donju granicu razreda s najvećom frekvencijom,  $D_1$  je razlika između apsolutnih frekvencija razreda koji ima najveću frekvenciju i razreda koji je ispred njega,  $D_2$  je razlika između apsolutnih frekvencija razreda koji ima najveću frekvenciju i razreda koji je nakon njega,  $c$  je širina razreda. [5]

#### □ **Medijan**

U kontroli kvalitete se isto tako, kao mjera centralne tendencije, koristi medijan. Medijan je središnji podatak niza koji je poredan po veličini i dijeli niz na dva jednaka dijela prema broju podataka. [13] Ako niz sadrži neparan broj podataka medijan je broj u sredini, a ako niz sadrži paran broj podataka medijan se dobiva izračunavanjem aritmetičke sredine dvaju podataka na sredini. [5]

Ako su podaci razvrstani u razrede za izračun medijana se koristi formula 13 [5]:

$$M = L_M + \left( \frac{\frac{n}{2} - f_k}{f_M} \right) \cdot c \quad (13)$$

$L_M$  predstavlja donju granicu razreda koji prilikom izračunavanja kumulativne apsolutne frekvencije sadržava član  $\frac{n}{2}$ , tj. medijalnog razreda,  $f_k$  je kumulativna frekvencija razreda koji je iznad medijalnog razreda,  $f_M$  je apsolutna frekvencija medijalnog razreda,  $c$  je širina razreda. [5]

### 2.1.3. Mjere raspršenosti (disprezije)

Kontrola kvalitete se služi mjerama raspršenosti kako bi se pokazalo koliko podaci odstupaju od srednjih vrijednosti. [5] One se koriste da bi se razumjelo širenje ili varijabilnost podataka. [14] Mjere raspršenosti su raspon varijacije, varijanca, standardna devijacija i koeficijent varijacije. [5]

#### □ Raspon varijacije

Raspon varijacije se u kontroli kvalitete primjenjuje kod izrade  $\bar{x}$ -R kontrolnih karata, tj. njime se prati rasipanje procesa. [11]

Raspon varijacije je razlika između najveće i najmanje vrijednosti podatka, prema formuli 14 [5]:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (14)$$

#### □ Varijanca i standardna devijacija

Standardna devijacija uzorka se u kontroli kvalitete primjenjuje kod izrade  $\bar{x}$ -s kontrolnih karata, da bi se pratilo rasipanje procesa [11] kao i kod procijene sposobnosti procesa. [15] Varijanca populacije se izračunava kao suma kvadrata odstupanja podataka od aritmetičke sredine podijeljena s brojem mjerenja. Odstupanje podatka od aritmetičke sredine je kvadrirano da se izbjegnu negativni brojevi. [5] Standardna devijacija je drugi korijen iz varijance.

Varijanca populacije se izračunava prema formuli 15 [5]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (15)$$

Varijanca populacije se može izračunati preko distribucije frekvencija, formulom 16 [5]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i (a_i - \bar{x})^2, n = \sum_{i=1}^k f_i \quad (16)$$

Varijanca se računa prema formuli 15 za varijancu populacije kada u izračun ulaze svi podaci, kada se uzimaju samo uzorci, onda se računa prema formuli za varijancu uzorka.

Varijanca uzorka se izračunava kao suma kvadrata odstupanja podataka od aritmetičke sredine podijeljen s brojem mjerenja umanjeni za 1, pa je formula 17 [16] za izračunavanje varijance uzorka

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (17)$$

Za izračunavanje standardne devijacije preko distribucije frekvencija koristi se formula 18 [16]:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k f_i (a_i - \bar{x})^2. \quad (18)$$



Standardna devijacija je drugi korijen iz varijance. Standardna devijacija populacije izračunava se prema formulama 19 i 20 [5]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (19)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i (a_i - \bar{x})^2} \quad (20)$$

Standardna devijacija uzorka izračunava se prema formulama 21 i 22 [16]:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (21)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k f_i (a_i - \bar{x})^2} \quad (22)$$

## 2.2. Diskretna slučajna varijabla

Binomna i Poissonova razdioba su razdiobe diskretne slučajne varijable, a u kontroli kvalitete se primjenjuju u izradi kontrolnih karata. Diskretna slučajna varijabla poprima konačno ili prebrojivo mnogo vrijednosti. [17]  $x_1, x_2, \dots$  su vrijednosti koje poprima diskretna slučajna varijabla, a pripadajuće vjerojatnosti  $p_1, p_2, \dots$  [5]

Za vjerojatnosti diskretne slučajne varijable vrijedi da su veće ili jednake nuli, tj. prema formuli 23 [5]:

$$p_i \geq 0, \quad (23)$$

a njihov zbroj je jednak 1, tj. prema formuli 24 [5]:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1 \quad (24)$$

Funkcija distribucije diskretne slučajne varijable  $X$  dana je formulom 25 [5]:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i \quad (25)$$

Vrijednost funkcije distribucije za neki  $x$  se dobiva kao suma svih vjerojatnosti za vrijednosti koje su manje ili jednake  $x$ .

### 2.2.1. Binomna razdioba

Binomna razdioba je matematička osnova p-kontrolnih karata i np-kontrolnih karata. [11] Vjerojatnost da se neki događaj  $A$  pojavi točno  $k$  puta u  $n$  pokusa izračunava se formulom 26 [5]:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, q = 1 - p \quad (26)$$

U formuli  $n$  predstavlja broj pokusa,  $k$  predstavlja koliko puta se u nizu pojavio događaj  $A$ ,  $p$  je vjerojatnost da se događaj  $A$  ostvari, dok je  $q$  vjerojatnost da se događaj  $A$  ne ostvari,  $p^k$  je u formuli jer se događaj  $A$  ostvario  $k$  puta.  $q^{n-k}$  je u formuli zato što se događaj  $A$  nije ostvario  $n - k$  puta. [5] Očekivanje je prikazano formulom 27 [5]:

$$E(X) = np \quad (27)$$

Varijanca se izračunava prema formuli 28 [5]:

$$Var(X) = npq \quad (28)$$

### 2.2.2. Poissonova razdioba

Poissonova razdioba je matematička osnova u-kontrolnih karata i c-kontrolnih karata. [11] Vjerojatnost diskretne slučajne varijable  $X$  koja ima Poissonovu distribuciju se izračunava prema formuli 29 [18], a  $\lambda$  formulom 30 [5]:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

$$\lambda = np \quad (30)$$

Poissonova razdioba se dobije kada je  $n$  jako velik, tj. kada je velik broj pokusa, a vjerojatnost  $p$  jako malen. [18]

Očekivanje slučajne varijable  $X$  s Poissonovom distribucijom prikazano je formulom 31 [5]:

$$E(X) = \lambda \quad (31)$$

Varijanca slučajne varijable  $X$  s Poissonovom distribucijom je prikazana formulom 32 [5]:

$$Var(X) = \lambda \quad (32)$$

### 2.3. Neprekidna slučajna varijabla

Normalna ili Gaussova razdioba je razdioba neprekidne slučajne varijable, a u kontroli kvalitete se primjenjuje prilikom izrade kontrolnih karata. Neprekidne slučajne varijable su varijable kojima je skup vrijednosti interval u skupu realnih brojeva. [18]

Funkcija razdiobe je prikazana formulom 33 [18]:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (33)$$

$f(t)$  je funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable i njezina svojstva su:

$$1. \quad f(x) \geq 0, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (35)$$

$$3. \quad \int_a^b f(x) dx = P(a < X < b), \quad a < b. \quad (36)$$

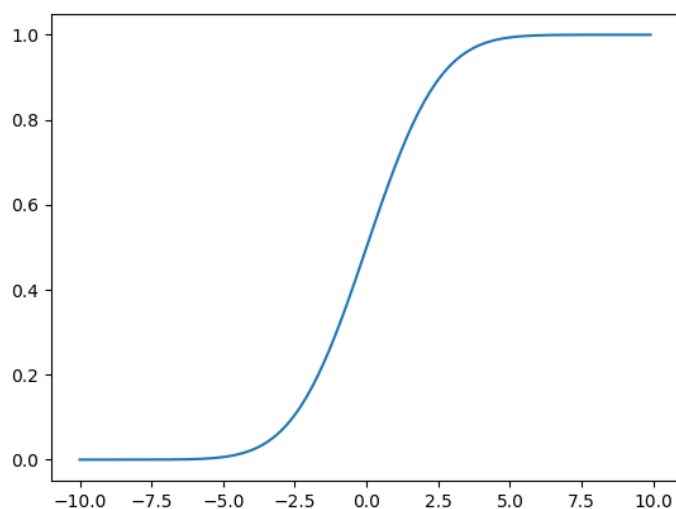
Svojstvo 1., tj. formula 34 [5] govori da je funkcija gustoće vjerojatnosti uvijek veća ili jednaka nuli, što znači da funkcija razdiobe nije padajuća i da se funkcija gustoće vjerojatnosti nalazi iznad osi  $x$ . Svojstvo 2., tj. formula 35 [5] govori da je vjerojatnost da neprekidna slučajna varijabla poprimi bilo koju vrijednost na intervalu  $\langle -\infty, \infty \rangle$  jednaka 1, površina ispod krivulje gustoće vjerojatnosti je 1. Svojstvo 3., tj. formula 36 [5] govori da je vjerojatnost da neprekidna slučajna varijabla poprimi vrijednosti na intervalu  $\langle a, b \rangle$  jednaka površini ispod krivulje gustoće vjerojatnosti na tom istom intervalu. [5]

### 2.3.1. Normalna ili Gaussova razdioba

U kontroli kvalitete mnogi proizvodni procesi slijede normalnu distribuciju koja je baza za procjenjivanje sposobnosti procesa, [19] isto tako normalna distribucija je matematička osnova za kontrolne karte za mjerljive karakteristike. [11] Funkcija razdiobe neprekidne slučajne varijable  $X$  koja ima normalnu razdiobu je prikazana formulom 37 [5]:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (37)$$

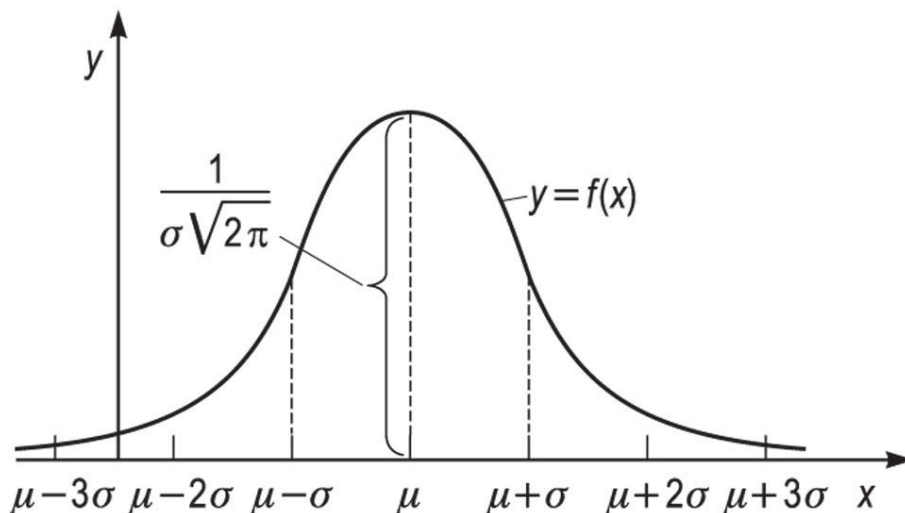
Na *Slici 2* je prikazan graf funkcije normalne razdiobe.



*Slika 2 Graf funkcije normalne razdiobe* [20]

Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable  $X$  dana je formulom 38 [5]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R} \quad (38)$$



Slika 3 Graf funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable [21]

Na Slici 3 je prikazan graf funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable, krivulja dobivena tom funkcijom se naziva Gaussova krivulja. [5] Standardna devijacija i aritmetička sredina u potpunosti određuju oblik Gaussove krivulje. [19] Ova funkcija maksimalnu vrijednost poprima za aritmetičku sredinu, a ta vrijednost je  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ . S obzirom da se u ovom izrazu  $\sigma$  nalazi u nazivniku, s njezinim povećanjem smanjuje se maksimalna vrijednost funkcije gustoće. [5] Funkcija je također i simetrična s obzirom na aritmetički sredinu. [19]

Očekivanje neprekidne slučajne varijable koja ima normalnu razdiobu jednako je srednjoj vrijednosti, tj. aritmetičkoj sredini. Očekivanja je prikazano formulom 39 [5]:

$$E(X) = \mu \quad (39)$$

Dok je varijanca prikazana formulom 40 [5]:

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 \quad (40)$$

Razdioba čija je aritmetička sredina jednaka nuli, a varijanca jednaka 1, se naziva jedinična normalna razdioba.

Dok se  $Z$  računa prema formuli 41 [22]:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (41)$$

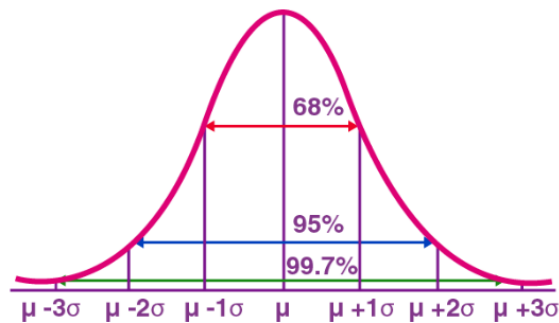
Funkcija gustoće jedinične normalne razdiobe računa se prema formuli 42 [5]:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (42)$$

Funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe dana je formulom 43 [5]:

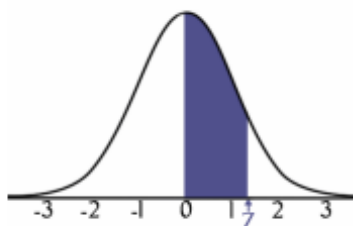
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (43)$$

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$  znači da se 68,27% površine ispod Gaussove krivulje nalazi na intervalu koji je sa svake strane od aritmetičke sredine udaljen za  $\sigma$ . Isto tako  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$  znači da se 95,45% površine ispod Gaussove krivulje na intervalu koji je sa svake strane od aritmetičke sredine udaljen za  $2\sigma$ . Isto vrijedi i za  $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$  s 99,73% površine. [5] To je prikazano na *Slici 4*. Vrijednosti funkcije distribucije jedinične normalne razdiobe nalaze se u tablici prikazanoj na *Slici 5*.



*Slika 4* Površine ispod Gaussove krivulje [23]

### Jedinična normalna (Gaussova) distribucija



Površine ispod krivulje jedinične normalne distribucije između 0 i  $z$

$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Slika 5 Vrijednosti funkcije jedinične normalne razdiobe [7]

## 2.4. Kontrola kvalitete

### 2.4.1. Kontrolne karte

Kontrolne karte služe za određivanje je li proces u stanju statističke kontrole. [24] Za konstruiranje kontrolnih karata potrebno je odrediti središnju liniju procesa koja je aritmetička sredina parametra. Zatim se određuju gornja kontrolna granica, tj. GKG, UCL, upper control limit i donja kontrolna granica, tj. DKG, LCL, lower control limit. To su statističke granice i one se izračunavaju, a služe da bi se odredilo je li neki proces pod kontrolom, ako se nalazi unutar granica ili proces nije pod kontrolom, što znači da se ne nalazi unutar kontrolnih granica, tj. neke izmjerene vrijednosti izlaze van granica. [11]

Kontrolne karte se dijele na one koje su za mjerljive karakteristike, a to su  $\bar{x}$ -R kontrolne karte,  $\bar{x}$ -s kontrolne karte i  $\bar{x}$ -MR kontrolne karte i na one koje su za atributivne karakteristike, a to su p-kontrolne karte, np-kontrolne karte, u-kontrolne karte i c-kontrolne karte. [11]

#### □ $\bar{x}$ -R kontrolne karte

$\bar{x}$ -R kontrolne karte se temelje na normalnoj razdiobi. Ova karta se koristi ako su veličine uzoraka  $2 \leq n < 10$ . Aritmetičkom sredinom se prati kakva je centriranost procesa, dok se rasponom varijacije prati rasipanje procesa. [11]

Kontrolne granice kojima se prati aritmetička sredina izračunavaju se prema formuli 44 [11]:

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} \pm 3\sigma_{\bar{x}} \quad (44)$$

u formuli  $\bar{\bar{x}}$  predstavlja aritmetičku sredinu svih aritmetičkih sredina pojedinih uzoraka, tj. za svaki uzorak se ovisno o njegovoj veličini izračunava aritmetička sredina uzorka, nakon što se izračunaju sve aritmetičke sredine uzoraka one se zbroje i podjele s brojem uzorka da bi se dobila vrijednost  $\bar{\bar{x}}$ . Proces unutar kontrolnih granica ima manje rasipanje. [11]

Ako se u formulu 44 ubaci formula 45, 46, 47 i 48 [11]:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad (45)$$

u kojoj je  $n$  veličina uzorka,

$$\sigma_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad (46)$$

$\bar{R}$  je aritmetička sredina raspona svih uzoraka, tj. prikazano formulom 47 [11]:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{k}, \quad (47)$$

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}, \quad (48)$$

dobiva se formula 49 [11]:

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} \pm A_2 \cdot \bar{R}. \quad (49)$$

$A_2$  je vrijednost koja se uzima iz tablica koje se nalaze na *Slici 6*.

Kontrolne granice kojima se prati raspon izračunavaju se formulom 50 [11]:

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{R} \pm 3 \cdot \sigma_R, \quad (50)$$

Ako se u formulu 50 ubace formula 51 i formula 52 [11]:

$$\sigma_R = b_2 \sigma_0, \quad (51)$$

$$\sigma_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad (52)$$

dobiva se formula 53 [11]:

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{R} \pm \frac{3b_2}{d_2} \cdot \bar{R}. \quad (53)$$

Ako se u formulu 53 uvrste formule 54 i 55 [11]:

$$D_3 = 1 - \frac{3b_2}{d_2} \quad (54)$$

$$D_4 = 1 + \frac{3b_2}{d_2}, \quad (55)$$

dobe se formule 56 i 57 [11]:

$$DKG_R = D_3 \cdot \bar{R} \quad (56)$$

$$GKG_R = D_4 \cdot \bar{R} \quad (57)$$

U *Tablici 1* se nalaze koeficijenti  $A_2$ ,  $D_3$  i  $D_4$ .

*Tablica 1* Koeficijenti za  $\bar{x}$ -R kontrolne karte [25]

Veličina uzorka n	A2 za X kartu	D3 za R kartu	D4 za R kartu
2	1,880	0	3,267
3	1,023	0	2,575
4	0,729	0	2,282
5	0,577	0	2,115
6	0,483	0	2,004
7	0,119	0,076	1,924
8	0,373	0,136	1,864
9	0,337	0,184	1,816
10	0,308	0,223	1,777
12	0,266	0,284	1,716
14	0,235	0,329	1,671
16	0,212	0,364	1,636
18	0,194	0,392	1,608
20	0,180	0,414	1,586



□  $\bar{x}$ -s kontrolne karta

$\bar{x}$ -s kontrolne karte se temelje na normalnoj razdiobi i koristi se kada je  $n \geq 10$ . Centriranost procesa se prati aritmetičkom sredinom, dok se rasipanje prati standardnom devijacijom. [11] Formula 58 [11] se koristi za izračun kontrolnih granica kojima se prati aritmetička sredina:

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} \pm A_3 \cdot \bar{s}, \quad (58)$$

$\bar{s}$  je aritmetička sredina standardnih devijacija uzoraka, tj. izračunaju se standardne devijacije svih uzoraka i zatim se zbroje, a nakon toga se podjele s brojem uzoraka, to je prikazano formulom 59 [11]:

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^k s_i}{k}, \quad (59)$$

$A_3$  je vrijednost koja se uzima iz *Tablice 2*.

*Tablica 2* Koeficijenti za  $\bar{x} - s$  kontrolne karte [26]

n	A3	B3	B4	C4	d2
2	2,659	0	3,267	0,7979	1,128
3	1,954	0	2,568	0,8862	1,693
4	1,628	0	2,266	0,9213	2,059
5	1,427	0	2,089	0,9400	2,326
6	1,287	0,030	1,970	0,9515	2,534
7	1,182	0,118	1,882	0,9594	2,704
8	1,099	0,185	1,815	0,9650	2,847
9	1,032	0,239	1,761	0,9693	2,970
10	0,975	0,284	1,716	0,9727	3,078
11	0,927	0,321	1,679	0,9754	3,173
12	0,886	0,354	1,646	0,9776	3,258
13	0,850	0,382	1,618	0,9794	3,336
14	0,817	0,406	1,594	0,9810	3,407
15	0,789	0,428	1,572	0,9823	3,472
16	0,763	0,448	1,552	0,9835	3,532

Kontrolne granice kojima se prati standardno odstupanje uzoraka izračunavaju se formulama 60 i 61 [11]:

$$DKG_s = B_3 \cdot \bar{s} \quad (60)$$

$$GKG_s = B_4 \cdot \bar{s} \quad (61)$$

Vrijednosti  $B_3$  i  $B_4$  uzimaju se iz *Tablice 2*.

□ ***x*-MR kontrolne karte**

*x*-MR kontrolne karte prikazuju varijabilnost između jednog podatka i njemu slijedećeg. Veličina uzorka je kod primjene tih karata jednaka jedan, zato što se unose rezultati individualnih mjerenja. [27] Primjenjuju se kod razornih ispitivanja. [11]

Kontrolne granice kojima se prati kretanje individualnih mjerenja izračunavaju se formulom 62 [11]:

$${}^G_D KG_x = \bar{x} \pm 2,66 \cdot \overline{MR}. \quad (62)$$

$\bar{x}$  je prosječna vrijednost individualnih mjerenja i izračunava se formulom 63 [11]:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}, \quad (63)$$

dok se  $\overline{MR}$  dobiva prema formuli 64 [11]:

$$\overline{MR} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} MR_i}{k-1} \quad (64)$$

*MR* predstavlja apsolutnu vrijednost razlike između izmjerene vrijednosti i prethodno izmjerene vrijednosti. [11]

Kontrolne granice kojima se prati kretanje vrijednosti *MR* izračunavaju se formulama 65 i 66 [11]:

$$DKG_{MR} = 0 \quad (65)$$

$$GKG_{MR} = 3,27 \cdot \overline{MR} \quad (66)$$

□ **p-kontrolne karte**

Kod p-kontrole karte veličine uzoraka mogu biti različite i prati se kretanje loših komada. Matematička osnova p-kontrolnih karata je, kao što je već spomenuto, binomna razdioba. Srednja vrijednost loših komada, tj.  $\bar{p}$  izračunava se kao omjer ukupnog broja loših komada i ukupnog broja komada, prema formuli 67 [11]:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i p_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (67)$$

U formuli  $n_i$  predstavlja veličine pojedinih uzoraka, a  $p_i$  udio loših komada pojedinog uzorka u veličini uzorka, pa je zato  $\sum_{i=1}^k n_i p_i$  jednaka broju loših komada u svim uzorcima, dok je  $\sum_{i=1}^k n_i$  ukupni broj komada. [11]

Kontrolne granice se izračunavaju prema formuli 68 [11]:

$${}^G_D KG = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}. \quad (68)$$

Ako je  $\bar{p}$  manji od 0,10, kontrolne granice se računaju prema formuli 69 [11]:

$${}^G_D KG = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}}{n_i}}. \quad (69)$$

#### □ np-kontrolne karte

Np-kontrolnom kartom se isto tako prati kretanje loših komada, ali su kod ove kontrolne karte veličine uzoraka jednake. Matematička osnova np-kontrolnih karata je, kao što je već spomenuto, binomna razdioba. [11] Srednja vrijednost loših komada,  $n\bar{p}$ , se izračunava kao omjer ukupnog broja loših komada i broja uzoraka, prema formuli 70 [11]:

$$n\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i p_i}{k}. \quad (70)$$

$\sum_{i=1}^k n_i p_i$  i u ovoj formuli predstavlja ukupan broj loših komada, dok je  $k$  broj uzimanih uzoraka.

Kontrolne granice se izračunavaju prema formuli 71 [11], a  $\bar{p}$  se izračunava prema formuli 72 [28], zato što su jednake veličine uzoraka:

$${}^G_D KG = n\bar{p} \pm 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \quad (71)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k p_i \quad (72)$$

Ako je  $\bar{p}$  manji od 0,10 koristi se formula 73 [11]:

$${}^G_D KG = n\bar{p} \pm 3\sqrt{n\bar{p}}, \quad p < 0,10. \quad (73)$$

#### □ u-kontrolne karte

Kod u-kontrolne karte veličine uzoraka mogu biti različite, a služi za prikaz broja pogrešaka. Matematička osnova u-kontrolnih karata je, kao što je već spomenuto, Poissonova razdioba. [11] Broj pogrešaka po jedinici proizvoda,  $\bar{u}$ , izračunava se kao omjer ukupnog broja svih pogrešaka na svim komadima i ukupnog broja komada, pa se izračunava prema formuli 74 [11]:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i}{\sum_{i=1}^k n_i}. \quad (74)$$

U formuli 74  $n_i$  predstavlja veličinu pojedinog uzorka, dok  $u_i$  predstavlja omjer broja pogrešaka u pojedinom uzorku i veličine pojedinog uzorka.  $\sum_{i=1}^k n_i$  je ukupan broj komada. [11]

Kontrolne granice se izračunavaju prema formuli 75 [11]:

$${}^G_D KG = \bar{u} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}. \quad (75)$$

#### □ c-karta

Kod c-karte veličine uzoraka su jednake, također služi za prikaz broja pogrešaka. Matematička osnova c-kontrolnih karata je, kao što je već spomenuto, Poissonova razdioba. [11] Prosječan broj pogrešaka po uzorku,  $\bar{c}$ , se izračunava kao omjer ukupnog broja svih pogrešaka i broja uzoraka, prema formuli 76 [11]:

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k}. \quad (76)$$

U formuli  $c_i$  predstavlja sve pogreške u pojedinačnom uzorku, pa izraz  $\sum_{i=1}^k c_i$  predstavlja ukupni broj svih pogrešaka.

Kontrolne granice se izračunavaju prema formuli 77 [11]:

$${}^G_D KG = \bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}}. \quad (77)$$

### 2.4.2. Procjena sposobnosti procesa

Za procjenu sposobnosti procesa potrebno je spomenuti raspon zahtjeva, tj. tolerancijsko polje. Tolerancijsko polje,  $T$ , je područje dozvoljenog odstupanja stvarne mjere, tj. razlika između gornje i donje granice odstupanja. [29] Za raspon procesa se uzima  $\pm 3\sigma$  u odnosu na aritmetičku sredinu procesa, tj. 97,73% površine ispod Gaussove krivulje. Sposobnost procesa se procjenjuje kada se podaci ponašaju prema normalnoj razdiobi i kada je proces pod kontrolom, tj. kada se proces nalazi unutar kontrolnih granica. [15]

Potencijalna sposobnost procesa,  $C_p$ , se izračunava kao omjer tolerancijskog polja i  $6\hat{\sigma}$ , prema formuli 78 [15]:

$$C_p = \frac{T}{6\hat{\sigma}} \quad (78)$$

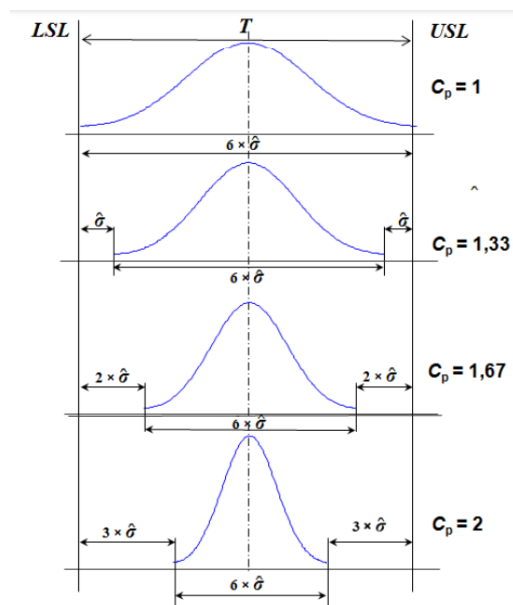
$\hat{\sigma}$  je unutarnje standardno odstupanje i dobiva se iz kontrolnih karata. Ako se  $\hat{\sigma}$  dobiva iz  $\bar{x}$ -R karte, računa se prema formuli 79 [15]:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad (79)$$

a ako se uzima iz  $\bar{x}$ -s karte, onda se računa prema formuli 80 [15]:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}. \quad (80)$$

Proces je sposoban ako je  $C_p \geq 1$ , tj. sposoban je ako je  $T \geq 6\hat{\sigma}$ , što govori da se proces teorijski može nalaziti unutar tolerancijskog polja. U stvarnosti  $C_p$  treba biti barem 1,33. Ako je  $C_p = 1,33$ , pa ispada da je  $T = 8\hat{\sigma}$ , tj. tolerancijsko polje je za  $2\hat{\sigma}$  veće od raspona procesa. Kad bi proces bio idealno centriran, tj. kad bi se aritmetička sredina procesa nalazila na sredini tolerancijskog polja, sa svake strane procesa bi se nalazilo još  $1\hat{\sigma}$  do gornje i donje granice specifikacija. Ako je  $C_p = 1,67$ , pa bi  $T = 10\hat{\sigma}$ . To znači da bi tolerancijsko polje bilo za  $4\hat{\sigma}$  veće od raspona procesa i kad bi proces bio idealno centriran sa svake strane procesa bi se nalazilo još  $2\hat{\sigma}$  do gornje i donje granice specifikacija. Ako je  $C_p = 2$ , to bi značilo da je  $T = 12\hat{\sigma}$ , a kad bi proces bio idealno centriran, tolerancijsko polje bi od raspona procesa bilo veće za  $6\hat{\sigma}$ . Kad bi proces bio idealno centriran sa svake strane procesa bi se nalazilo još  $3\hat{\sigma}$  do gornje i donje granice procesa. [15] To se može vidjeti na Slici 6.



Slika 6 Potencijalna sposobnost procesa [15]

Omjer sposobnosti procesa,  $C_r$ , jednak je recipročnoj vrijednosti potencijalne sposobnosti procesa, tj. omjeru  $6\hat{\sigma}$  i tolerancijskog polja. Stoga se računa prema formuli 81 i 82 [15]:

$$C_r = \frac{1}{C_p} \quad (81)$$

$$C_r = \frac{6\hat{\sigma}}{T}. \quad (82)$$

$C_r$  se izražava u postocima i govori kolika je iskorištenost tolerancijskog polja. Kada je proces sposoban vrijedi  $C_r \leq 1$ . [15]

Demonstrirana izvrsnost,  $C_{pk}$ , je mjera centriranosti procesa, a izračunava se prema formuli 83 [15]:

$$C_{pk} = \min(C_{pL}, C_{pU}) \quad (83)$$

$C_{pk}$  je jednak manjem od  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$ .  $C_{pL}$  ili donja potencijalna sposobnost je omjer razlike aritmetičke sredine procesa i donje granice specifikacija sa  $3\hat{\sigma}$ , izračunava se prema formuli 84 [15]:

$$C_{pL} = \frac{\bar{x} - L}{3\hat{\sigma}}, \quad (84)$$

u kojoj je  $L$  donja granica specifikacija.

$C_{pU}$  ili gornja potencijalna sposobnost je omjer razlike gornje granice specifikacija i aritmetičke sredine procesa sa  $3\hat{\sigma}$ , izračunava se prema formuli 85 [15]:

$$C_{pU} = \frac{U - \bar{x}}{3\hat{\sigma}}, \quad (85)$$

u kojoj je  $U$  gornja granica specifikacija.

Odabirom manjeg između  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$  dobiva se koja je razlika manja,  $\bar{x} - L$  ili  $U - \bar{x}$ , što pokazuje prema kojoj granici specifikacija je pomaknuti proces. Ako je  $C_{pk} = 1$  to znači da je ili  $C_{pL} = 1$  ili  $C_{pU} = 1$  ili su oba jednaka 1. Kada je  $C_{pL} = 1$  aritmetička sredina procesa je udaljena od donje granice specifikacija za  $3\hat{\sigma}$ , što znači da je raspon procesa do donje granice specifikacija, ali ju ne prelazi. Isto vrijedi i ako je  $C_{pU} = 1$ . Kada su  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$  jednaki 1 aritmetička sredina procesa je sa svake strane od granica specifikacija udaljena za  $3\hat{\sigma}$ , nalazi se na sredini tolerancijskog polja i raspon procesa je jednak tolerancijskom polju. Ako je  $C_{pk} < 1$  proces izlazi izvan granica specifikacija i dolazi do pojave škarta. [15]

□ **Stvarna sposobnost procesa**

Kod određivanja stvarne sposobnosti procesa  $P_p$ ,  $P_r$ ,  $P_{pk}$ ,  $P_{pL}$  i  $P_{pU}$  se određuju prema istim formulama, ali se standardna devijacija ne dobiva iz kontrolnih karata, nego se računa prema formuli 86 [15]:

$$\sigma = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (86)$$

i naziva se ukupno standardno odstupanje. [15]

### 3. Praktični dio

U praktičnom dijelu je prikazana primjena deskriptivne statistike i izrada dvije  $\bar{x} - s$  kontrolne karte na stvarnim vrijednostima.

#### 3.1. Primjena deskriptivne statistike na izmjerenim podacima

Izmjerena je dimenzija na 20 komada čivija, a izmjerene vrijednosti su prikazane u *Tablici 3*.

*Tablica 3 Vrijednosti izmjerenih dimenzija*

Broj komada	Veličina (mm)
1	58,595
2	58,600
3	58,598
4	58,600
5	58,596
6	58,596
7	58,594
8	58,596
9	58,602
10	58,591
11	58,595
12	58,597
13	58,600
14	58,596
15	58,589
16	58,599
17	58,601
18	58,596
19	58,603
20	58,598

Aritmetička sredina izmjerenih podataka izračunata je prema formuli [8]:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1171,942}{20} = 58,5971.$$

Mod izmjerenih podataka je 58,596 jer se ta vrijednost pojavljuje 5 puta.

Dva podatka koja se nalaze u sredini vrijednosti poredanih prema veličini (58,596 i 58,597) pa je medijan jednak njihovoj aritmetičkoj sredini:

$$M = \frac{58,596 + 58,597}{2} = 58,5965.$$

Raspon varijacije je izračunat prema formuli [14], tj. jednak razlici najveće i najmanje vrijednosti

$$R = 58,603 - 58,589 = 0,014.$$



Tablici 4 je frekvencijska tablica u kojoj su prikazane vrijednosti, apsolutne frekvencije tih vrijednosti, kumulativne apsolutne frekvencije „manje od“ relativne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije „manje od“.

Tablica 4 Frekvencijska tablica

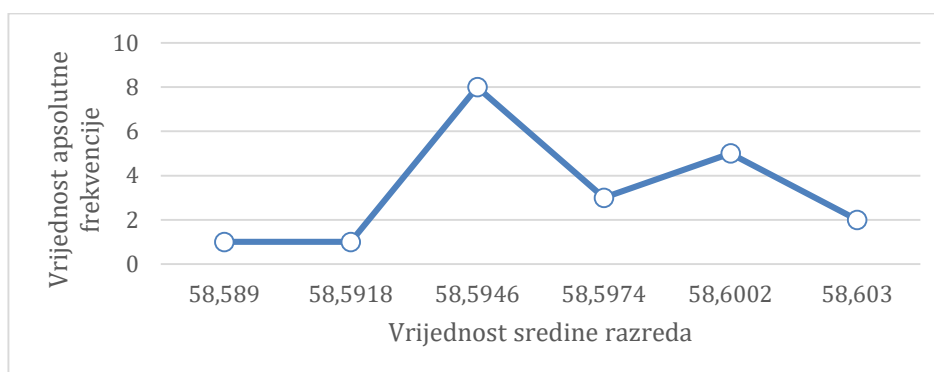
$a_i$	$f_i$	kumulativna apsolutna frekvencija „manje od“	$f_{ri}$	kumulativna relativna frekvencija „manje od“
58,589	1	1	0,05	0,05
58,591	1	2	0,05	0,10
58,594	1	3	0,05	0,15
58,595	2	5	0,10	0,25
58,596	5	10	0,25	0,50
58,597	1	11	0,05	0,55
58,598	2	13	0,10	0,65
58,599	1	14	0,05	0,70
58,600	3	17	0,15	0,85
58,601	1	18	0,05	0,90
58,602	1	19	0,05	0,95
58,603	1	20	0,05	1

Podaci koji se nalaze u Tablici 3 podijeljeni su u razrede. Broj podataka je 20, pa je broj razreda 6. Minimalna vrijednost je 58,589, dok je maksimalna vrijednost 58,603. Prema tome širina razreda se može izračunati prema formuli 6, pa je  $i = \frac{58,603 - 58,589}{6 - 1} = 0,0028$ . Donja granica prvog razreda jednaka  $D_g = 58,5876$  prema formuli 7.

Podaci su dalje grupirani prema širinama razreda u Tablicu 5.

Tablica 5 Podaci grupirani u razrede

širine razreda	sredina razreda	$f_i$
58,5876-58,5904	58,5890	1
58,5904-58,5932	58,5918	1
58,5932-58,5960	58,5946	8
58,5960-58,5988	58,5974	3
58,5988-58,6016	58,6002	5
58,6016-58,6044	58,6030	2



Slika 7 Grafički prikaz poligona frekvencija

Na Slici 7 prikazan je poligon frekvencija, na apcisi se nalaze srednje vrijednosti razreda, dok se na osi ordinata nalaze pripadajuće apsolutne frekvencije.

Aritmetička sredina je izračunata sa vrijednostima sredine razreda i pripadajućim frekvencijama, pa je jednaka:

$$\bar{x} = \frac{58,5890 \cdot 1 + 58,5918 \cdot 1 + 58,5946 \cdot 8 + 58,5974 \cdot 3 + 58,6002 \cdot 5 + 58,6030 \cdot 2}{20} = 58,5968.$$

Mod se izračunava prema formuli 12, stoga:

$$M_o = 58,5932 + \frac{8-1}{(8-1)+(8-3)} \cdot 0,0028 = 58,5948.$$

Medijan se izračunava prema formuli 13, stoga:

$$M = 58,5932 + \left( \frac{\frac{20}{2} - 2}{8} \right) \cdot 0,0028 = 58,596.$$

### 3.2. $\bar{x} - s$ kontrolne karte

#### □ $\bar{x} - s$ kontrolne karte za endstop klin

Podaci u *Tablici 6* prikazane su vrijednosti promjera klina.

*Tablica 6 Vrijednosti aritmetičkih sredina uzoraka dobivenih mjerenjem*

Broj uzorka	Veličina (mm)
1	4,2449
2	4,2483
3	4,2500
4	4,2488
5	4,2428
6	4,2433
7	4,2431
8	4,2449
9	4,2418
10	4,2415
11	4,2403
12	4,2404
13	4,2399
14	4,2397
15	4,2411
16	4,2433
17	4,2415
18	4,2416
19	4,2398
20	4,2407
21	4,2421
22	4,2429
23	4,2426

24	4,2427
25	4,2444
26	4,2436
27	4,2482
28	4,2449
29	4,2432
30	4,2433
31	4,2408
32	4,2455
33	4,2448
34	4,2373
35	4,2345
36	4,2361
37	4,2397
38	4,2409
39	4,2422
40	4,2424
41	4,2422
42	4,2413
43	4,2434
44	4,2435
45	4,2434
46	4,2434
47	4,2365
48	4,2399
49	4,2448
50	4,2450

Aritmetička sredina:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \bar{x}_i}{50} = 4,242464$$

$\bar{x}_i$  je vrijednost aritmetičkih sredina uzoraka dobivenih mjerenjem.

U *Tablici 7* su prikazane vrijednosti standardnih devijacija uzorka.

*Tablica 7 Vrijednosti standardnih devijacija uzorka*

Broj uzorka	Veličina (mm)
1	0,0022
2	0,0058
3	0,0039
4	0,0063
5	0,0052
6	0,0014
7	0,0053
8	0,0016
9	0,0090
10	0,0037
11	0,0015
12	0,0012
13	0,0023
14	0,0028
15	0,0021
16	0,0040
17	0,0019

18	0,0035
19	0,0022
20	0,0017
21	0,0030
22	0,0032
23	0,0025
24	0,0020
25	0,0066
26	0,0015
27	0,0040
28	0,0046
29	0,0047
30	0,0015
31	0,0014
32	0,0027
33	0,0026
34	0,0060
35	0,0042
36	0,0053
37	0,0045
38	0,0037
39	0,0047
40	0,0030
41	0,0047
42	0,0028
43	0,0026
44	0,0044
45	0,0025
46	0,0015
47	0,0080
48	0,0045
49	0,0027
50	0,0020

$\bar{s}$  se izračunava prema formuli 59.

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^k s_i}{k} = 0,0035$$

Pomoću *Tablice 2* odrede se koeficijenti  $A_3 = 0,975$ ,  $B_3 = 0,284$  i  $B_4 = 1,716$ , za  $n = 10$ .

Prema formuli [58] izračunate su kontrolne granice (gornja i donja) kojima se prati  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} GKG_{\bar{x}} &= \bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{s} \\ GKG_{\bar{x}} &= 4,242464 + 0,975 \cdot 0,0035 \\ GKG_{\bar{x}} &= 4,245877 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DKG_{\bar{x}} &= \bar{\bar{x}} - A_3 \cdot \bar{s} \\ DKG_{\bar{x}} &= 4,242464 - 0,975 \cdot 0,0035 \\ DKG_{\bar{x}} &= 4,239052 \end{aligned}$$

Izvan kontrolnih granica se nalaze aritmetičke sredine uzoraka 2, 3, 4, 27, 34, 35, 36 i 47.

Prema formulama [60] i [61] izračunate se kontrolne granice kojima se prati  $s$  :

$$GKG_s = B_4 \cdot \bar{s}$$

$$GKG_s = 1,716 \cdot 0,0035$$

$$GKG_s = 0,006006$$

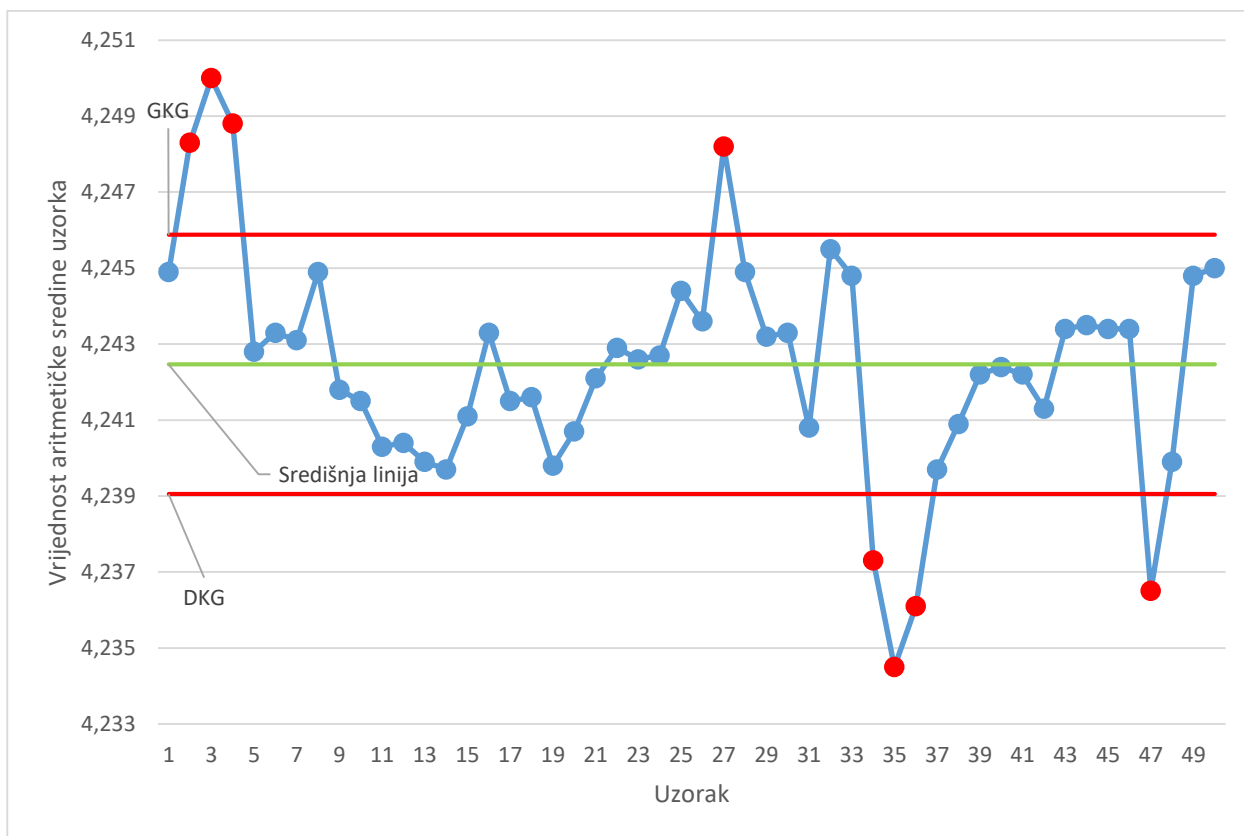
$$DKG_s = B_3 \cdot \bar{s}$$

$$DKG_s = 0,284 \cdot 0,0035$$

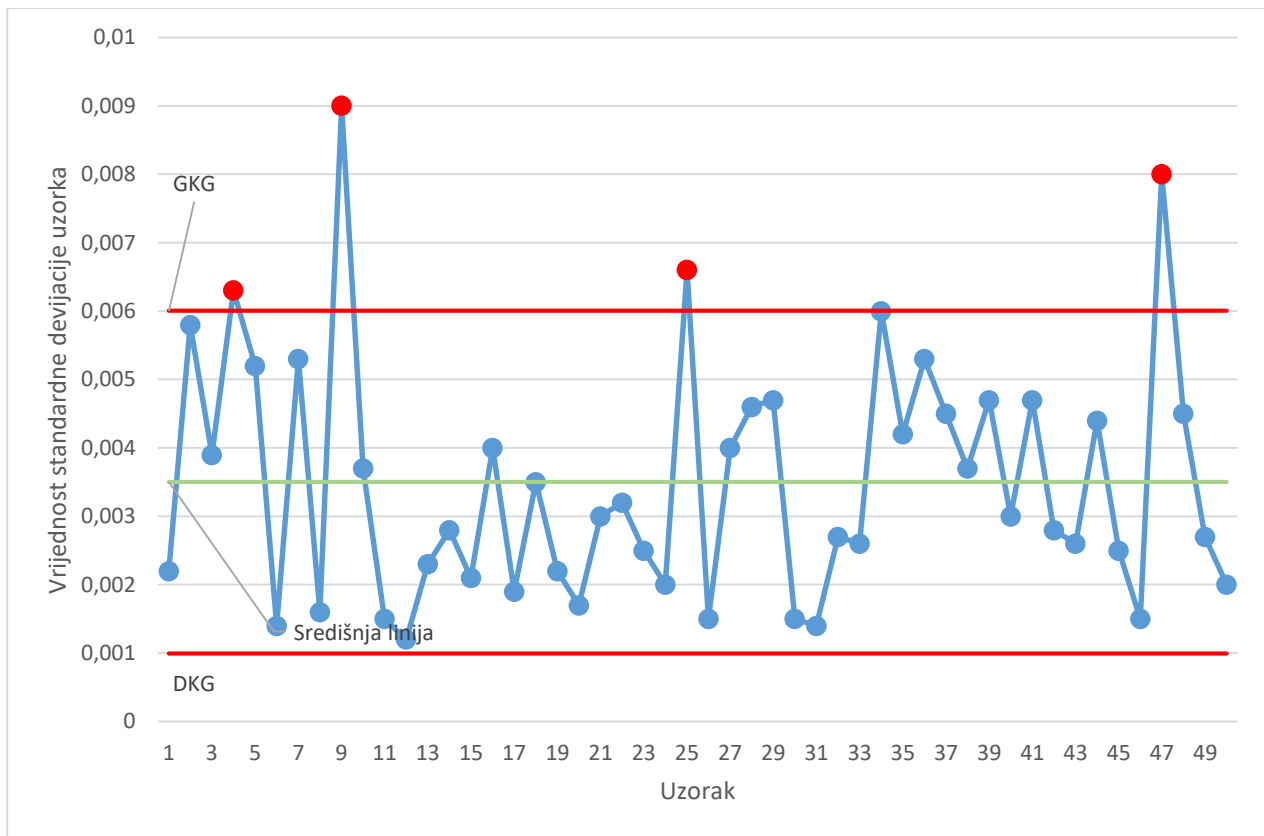
$$DKG_s = 0,000994$$

Standardne devijacije uzoraka 4, 9, 25 i 47 su izvan kontrolnih granica.

Na *Slici 8* je prikazana kontrolna karta kojom se prati  $\bar{x}$ , a na *Slici 9* kontrolna karta kojom se prati  $s$ .



*Slika 8* Kontrolna karta kojom se prati  $\bar{x}$



Slika 9 Kontrolna karta kojom se prati  $s$

Izbace se uzorci 2, 3, 4, 9, 25, 27, 34, 35, 36 i 47, pa se ponovo izračunaju kontrolne granice.

U Tablici 8 se nalaze vrijednosti aritmetičkih sredina dobivenih mjerenjem nakon što su izbačeni uzorci 2, 3, 4, 9, 25, 27, 34, 35, 36 i 47.

Tablica 8 Vrijednosti aritmetičkih sredina uzoraka dobivenih mjerenjem

Broj uzorka	Veličina (mm)
1	4,2449
5	4,2428
6	4,2433
7	4,2431
8	4,2429
10	4,2415
11	4,2403
12	4,2404
13	4,2399
14	4,2397
15	4,2411
16	4,2433
17	4,2415
18	4,2416
19	4,2398
20	4,2407
21	4,2421
22	4,2429

23	4,2426
24	4,2427
26	4,2436
28	4,2449
29	4,2432
30	4,2433
31	4,2408
32	4,2455
33	4,2448
37	4,2397
38	4,2409
39	4,2422
40	4,2424
41	4,2422
42	4,2413
43	4,2434
44	4,2435
45	4,2434
46	4,2434
48	4,2399
49	4,2448
50	4,2445

Aritmetička sredina:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \bar{x}_i}{40} = 4,24237, i \neq 2, 3, 4, 9, 25, 27, 34, 35, 36, 47$$

U *Tablici 9* se nalaze vrijednosti standardnih devijacija uzoraka nakon što su izbačeni uzorci 2, 3, 4, 9, 25, 27, 34, 35, 36 i 47.

*Tablica 9* Vrijednosti standardnih devijacija uzoraka

Broj uzroka	Veličina (mm)
1	0,0022
5	0,0052
6	0,0014
7	0,0053
8	0,0016
10	0,0037
11	0,0015
12	0,0012
13	0,0023
14	0,0028
15	0,0021
16	0,0040
17	0,0019
18	0,0035
19	0,0022
20	0,0017
21	0,0030
22	0,0032
23	0,0025
24	0,0020

26	0,0015
28	0,0046
29	0,0047
30	0,0015
31	0,0014
32	0,0027
33	0,0026
37	0,0045
38	0,0037
39	0,0047
40	0,0030
41	0,0047
42	0,0028
43	0,0026
44	0,0044
45	0,0025
46	0,0015
48	0,0045
49	0,0027
50	0,0020

Standardna devijacija:

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \bar{s}_i}{40} = 0,002898, i \neq 2, 3, 4, 9, 25, 27, 34, 35, 36, 47$$

Koriste se isti koeficijenti koji se nalaze u *Tablici 2*,  $A_3 = 0,975$ ,  $B_3 = 0,284$  i  $B_4 = 1,716$  te se izračunavaju kontrolne granice kojima se prati  $\bar{x}$ . Gornja i donja kontrolna granica su izračunate prema formuli [58].

$$\begin{aligned} GKG_{\bar{x}} &= \bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{s} \\ GKG_{\bar{x}} &= 4,24237 + 0,975 \cdot 0,002898 \\ GKG_{\bar{x}} &= 4,245195 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DKG_{\bar{x}} &= \bar{\bar{x}} - A_3 \cdot \bar{s} \\ DKG_{\bar{x}} &= 4,24237 - 0,975 \cdot 0,002898 \\ DKG_{\bar{x}} &= 4,239545 \end{aligned}$$

Izvan kontrolnih granica se nalazi aritmetička sredina uzorka 32.

Zatim su izračunate kontrolne granice kojima se prati  $s$  korištenjem formula [60] i [61]:

$$\begin{aligned} GKG_s &= B_4 \cdot \bar{s} \\ GKG_s &= 1,716 \cdot 0,002898 \\ GKG_s &= 0,004973 \end{aligned}$$



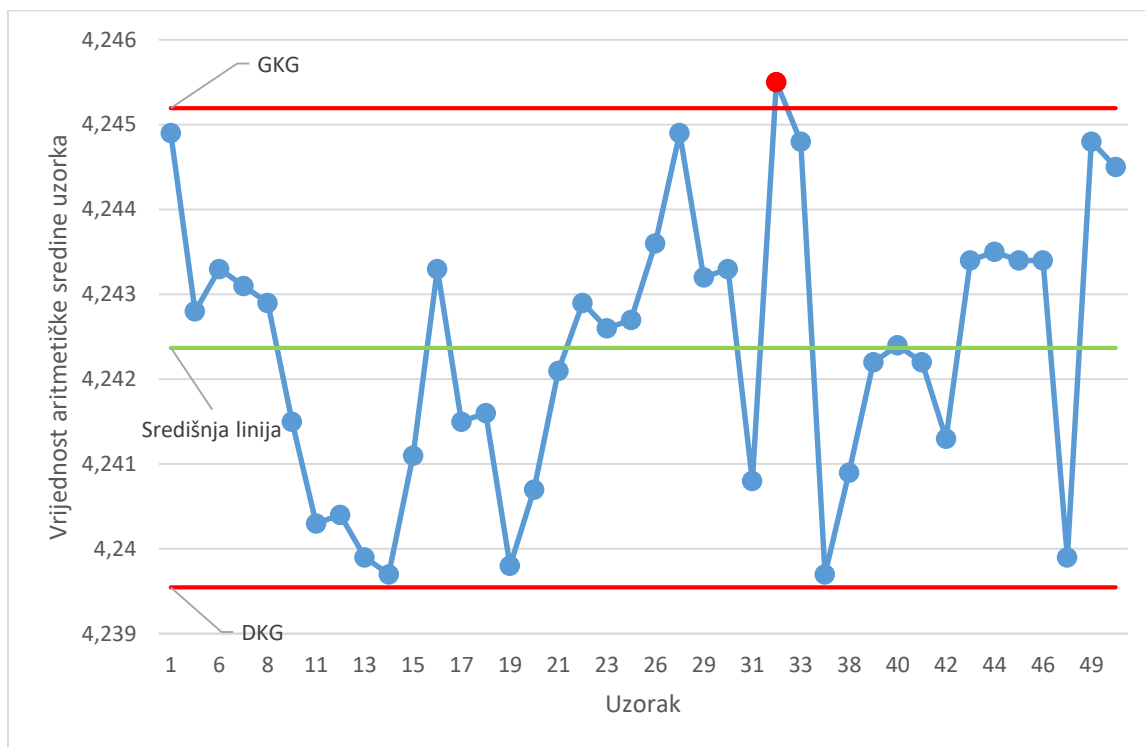
$$DKG_s = B_3 \cdot \bar{s}$$

$$DKG_s = 0,284 \cdot 0,002898$$

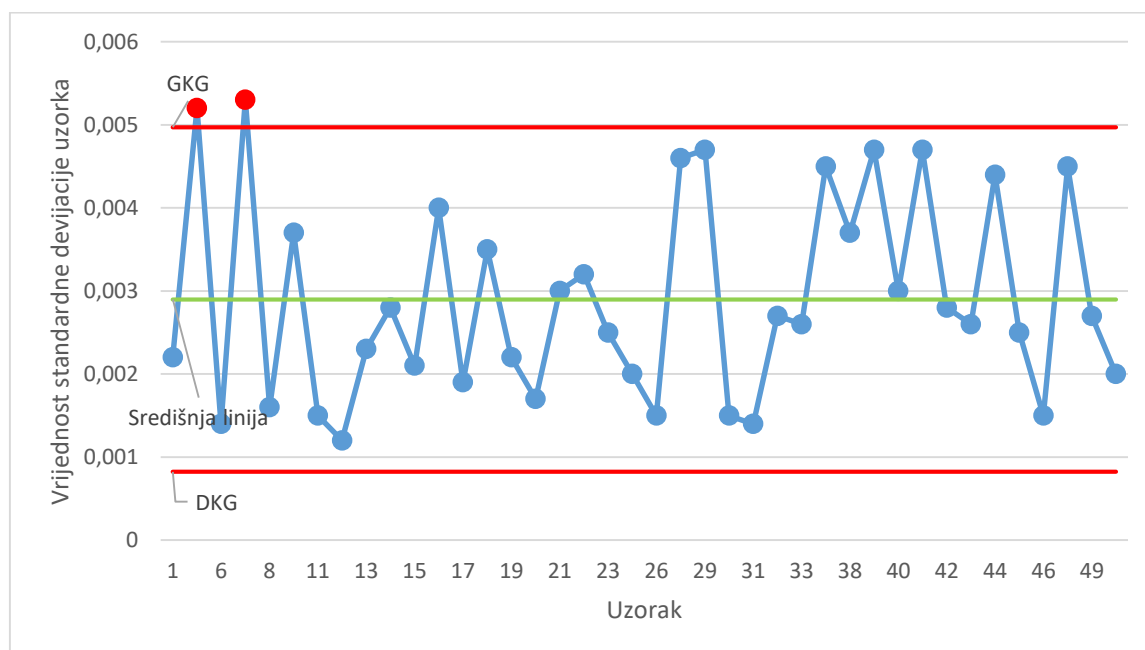
$$DKG_s = 0,000823$$

Standardne devijacije uzoraka 5 i 7 su izvan kontrolnih granica.

Na *Slici 10* prikazana kontrolna karta kojom se prati  $\bar{x}$ , a na *Slici 11* kontrolna karta kojom se prati  $s$ .



*Slika 10* Kontrolna karta kojom se prati  $\bar{x}$



*Slika 11* Kontrolna karta kojom se prati  $s$

Izbace se uzorci 5, 7 i 32, pa se ponovo izračunaju kontrolne granice.

U *Tablici 10* se nalaze vrijednosti aritmetičkih sredina dobivenih mjerenjem nakon što su izbačeni uzorci 5, 7 i 32.

*Tablica 10 Vrijednosti aritmetičkih sredina uzoraka dobivenih mjerenjem*

Broj uzroka	Veličina (mm)
1	4,2449
6	4,2433
8	4,2429
10	4,2415
11	4,2403
12	4,2404
13	4,2399
14	4,2397
15	4,2411
16	4,2433
17	4,2415
18	4,2416
19	4,2398
20	4,2407
21	4,2421
22	4,2429
23	4,2426
24	4,2427
26	4,2436
28	4,2449
29	4,2432
30	4,2433
31	4,2408
33	4,2448
37	4,2397
38	4,2409
39	4,2422
40	4,2424
41	4,2422
42	4, 2413
43	4,2434
44	4,2435
45	4,2434
46	4,2434
48	4,2399
49	4,2448
50	4,2445

Aritmetička sredina:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \bar{x}_i}{37} = 4,242254, i \neq 2, 3, 4, 5, 7, 9, 25, 27, 32, 34, 35, 36, 47$$

U *Tablici 11* se nalaze vrijednosti standardnih devijacija uzoraka nakon što su izbačeni uzorci 5, 7 i 32.

*Tablica 11 Vrijednosti standardnih devijacija uzoraka*

Broj uzroka	Veličina (mm)
1	0,0022
6	0,0014
8	0,0016
10	0,0037
11	0,0015
12	0,0012
13	0,0023
14	0,0028
15	0,0021
16	0,0040
17	0,0019
18	0,0035
19	0,0022
20	0,0017
21	0,0030
22	0,0032
23	0,0025
24	0,0020
26	0,0015
28	0,0046
29	0,0047
30	0,0015
31	0,0014
33	0,0026
37	0,0045
38	0,0037
39	0,0047
40	0,0030
41	0,0047
42	0,0028
43	0,0026
44	0,0044
45	0,0025
46	0,0015
48	0,0045
49	0,0027
50	0,0020

Standardna devijacija:

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^{50} \bar{s}_i}{37} = 0,002776, i \neq 2, 3, 4, 5, 7, 9, 25, 27, 32, 34, 35, 36, 47$$

Ponovo se koriste koeficijenti koji se nalaze u *Tablici 2*,  $A_3 = 0,975$ ,  $B_3 = 0,284$  i  $B_4 = 1,716$ .

Nakon toga su izračunate kontrolne granice kojima se prati  $\bar{x}$ . Gornja i donja kontrolna granica su izračunate prema formuli [58]:

$$GKG_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{s}$$

$$GKG_{\bar{x}} = 4,242254 + 0,975 \cdot 0,002776$$

$$GKG_{\bar{x}} = 4,244961$$

$$DKG_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_3 \cdot \bar{s}$$

$$DKG_{\bar{x}} = 4,242254 - 0,975 \cdot 0,002776$$

$$DKG_{\bar{x}} = 4,239547$$

Svi podaci su unutar kontrolnih granica.

Zatim su prema formulama [60] i [61] izračunate kontrolne granice kojima se prati  $s$  :

$$GKG_s = B_4 \cdot \bar{s}$$

$$GKG_s = 1,716 \cdot 0,002776$$

$$GKG_s = 0,004764$$

$$DKG_s = B_3 \cdot \bar{s}$$

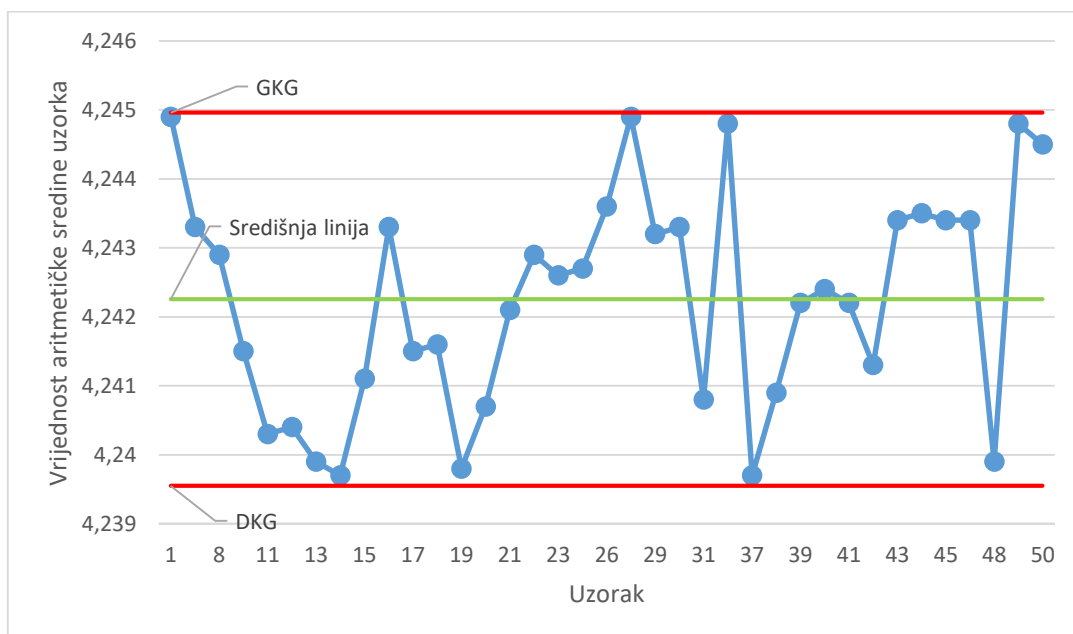
$$DKG_s = 0,284 \cdot 0,002776$$

$$DKG_s = 0,000788$$

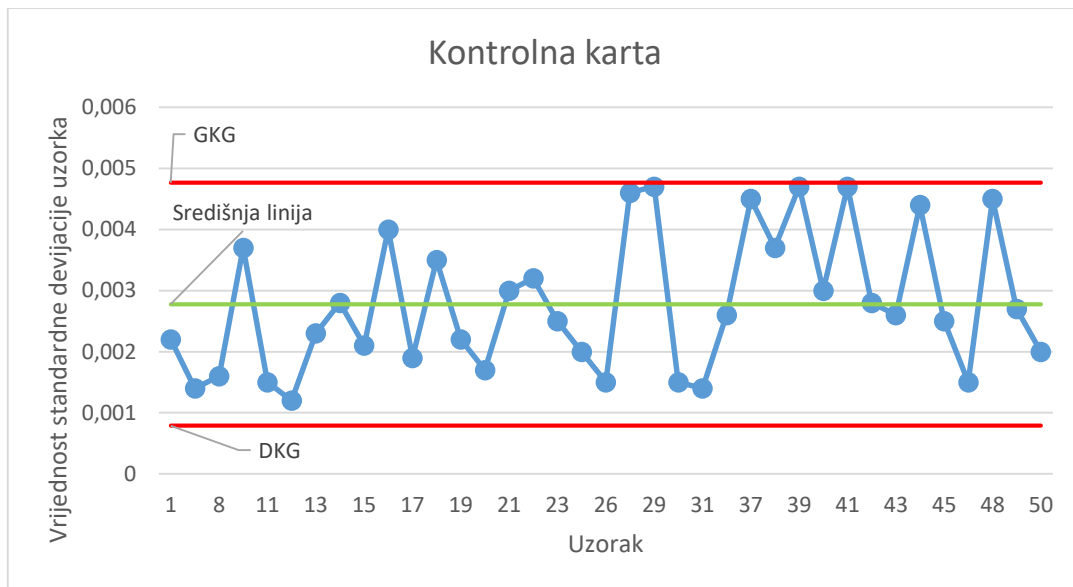
Svi podaci su unutar kontrolnih granica.

Proces je pod kontrolom.

Na *Slici 12* prikazana je kontrolna karta kojom se prati  $\bar{x}$  nakon što su izbačeni uzorci 5, 7 i 32, a na *Slici 13* kontrolna karta kojom se prati  $s$  nakon izbacivanja uzoraka 5, 7 i 32.



*Slika 12* Kontrolna karta kojom se prati  $\bar{x}$



Slika 13 Kontrolna karta kojom se prati  $s$

□ **Procjena sposobnosti procesa**

Odredi se  $\hat{\sigma}$  prema formuli [80], koeficijent  $c_4$  se odredi iz tablice na Slici 9, a zatim se izračuna potencijalna sposobnost procesa prema formuli [78]. Tolerancijsko polje za izmjerene podataka je 0,04, tj.  $4,240 \pm 0,02$ .

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{0,002776}{0,9727}$$

$$\hat{\sigma} = 0,002854$$

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \hat{\sigma}}$$

$$C_p = \frac{0,04}{6 \cdot 0,002854}$$

$$C_p = 2,335903$$

Zatim se izračuna omjer sposobnosti procesa prema formuli [82].

$$C_r = \frac{1}{C_p}$$

$$C_r = \frac{1}{2,335903}$$

$$C_r = 0,4281 = 42,81\%$$

Nakon toga se izračunaju donja i gornja potencijalna sposobnost procesa prema formulama [84] i [85].

$$C_{pL} = \frac{\bar{x} - L}{3 \cdot \sigma}$$
$$C_{pL} = \frac{4,242254 - 4,220}{3 \cdot 0,002854}$$
$$C_{pL} = 2,599159$$

$$C_{pU} = \frac{U - \bar{x}}{3 \cdot \sigma}$$
$$C_{pU} = \frac{4,260 - 4,242254}{3 \cdot 0,002854}$$
$$C_{pU} = 2,072647$$

Na kraju je određena demonstrirana izvrsnost prema formuli [83].

$$C_{pk} = \min \{ C_{pL}, C_{pU} \}$$
$$C_{pk} = C_{pL}$$
$$C_{pk} = 2,072647$$

## 4. Analiza rezultata

### 4.1. Analiza kontrolnih granica i potencijalne sposobnosti procesa

Kontrolne granice kojima se prati  $\bar{x}$  iznosile su  $GKG_{\bar{x}} = 4,245877$  i  $DKG_{\bar{x}} = 4,239052$ . Aritmetičke sredine uzoraka 2, 3, 4, 27, 34, 35, 36 i 47 izlaze izvan kontrolnih granica. Kontrolne granice kojima se prati  $s$  iznosile su  $GKG_s = 0,006006$  i  $DKG_s = 0,000994$ .

Standardne devijacije uzoraka 4, 9, 25 i 47 izlaze izvan kontrolnih granica. Zatim su izbačeni uzorci 2, 3, 4, 9, 25, 27, 34, 35, 36 i 47 i izračunate su nove kontrolne granice.

Nove kontrolne granice kojima se prati  $\bar{x}$  iznose  $GKG_{\bar{x}} = 4,245195$  i  $DKG_{\bar{x}} = 4,239545$ . Aritmetička sredina uzorka 32 se nalazi izvan kontrolnih granica.

Kontrolne granice kojima se prati  $s$  iznose  $GKG_s = 0,004973$  i  $DKG_s = 0,000823$ . Standardne devijacije uzoraka 5 i 7 izlaze izvan kontrolnih granica.

Nakon što su izbačeni uzorci 5, 7 i 32 i ponovo su izračunate nove kontrolne granice. Kontrolne granice kojima se prati  $\bar{x}$  iznosile su  $GKG_{\bar{x}} = 4,244961$  i  $DKG_{\bar{x}} = 4,239547$ .

Aritmetičke sredine svih uzoraka nalaze se unutar kontrolnih granica. Kontrolne granice kojima se prati  $s$  iznosile su  $GKG_s = 0,004764$  i  $DKG_s = 0,000788$ .

Standardne devijacije svih uzoraka nalaze se unutar kontrolnih granica, zato je proces sada pod kontrolom. Stoga se može računati potencijalna sposobnost procesa.  $C_p = 2,335903$ , veći je od 1, što znači da je proces sposoban.

Omjer sposobnosti procesa iznosi  $C_r = 0,4281 = 42,81\%$ , i isto tako govori da je proces sposoban, jer je  $C_r$  manji od 1. Donja potencijalna sposobnost procesa je  $C_{pL} = 2,599159$ .

Proces ne izlazi van donje granice specifikacija i  $C_{pL}$  je isto tako pozitivan, pa se aritmetička sredina nalazi s desne strane donje granice specifikacija. Gornja potencijalna sposobnost procesa je  $C_{pU} = 2,072647$ .

Proces ne izlazi van gornje granice specifikacija i  $C_{pU}$  je pozitivan, pa se aritmetička sredina procesa nalazi s lijeve strane gornje granice specifikacija. Demonstrirana izvrsnost je jednaka donjoj potencijalnoj sposobnosti procesa,  $C_{pk} = 2,072647$ , pa je aritmetička sredina procesa bliže donjoj granici specifikacija.

## 5. Zaključak

Cilj završnog rada je pokazati primjenu statistike u kontroli kvalitete. Kontrola kvalitete se uvelike služi statistikom kako bi osigurala održavanje i poboljšavanje kvalitete proizvoda i stoga spriječila da oštećeni proizvodi završe kod kupca.

Primjer je deskriptivna statistika kojom se kontrola kvalitete služi kako bi se lakše prikazali i opisali podaci koji se dobe mjerenjem karakteristika kontrole kvalitete kao što su mehanička svojstva, geometrijski oblik, dimenzije, funkcionalnost i izgled.

Podaci se stoga grupiraju i grafički prikazuju, tj. određuju se apsolutne frekvencije, relativne frekvencije, kumulativne apsolutne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije i podaci se prikazuju poligonom frekvencija, histogramom i stupčastim dijagramom. Isto tako je grupiranje podataka bitno kod Pareto analize jer se tako utvrđuju najveći gubici.

Srednje vrijednosti kao što su aritmetička sredina, medijan i mod su bitne zato što se njima predstavlja niz izmjerenih podataka nekog obilježja i ti podaci se gomilaju oko njih. Stoga se aritmetička sredina primjenjuje kod izrade kontrolnih karata za mjerljive karakteristike, kao što su  $\bar{x}$ -R i  $\bar{x}$ -s kontrolne karte.

U opisivanju izmjerenih podataka isto se tako koriste i mjere raspršenosti. Mjerama raspršenosti, tj. rasponom varijacije, varijancom i standardnom devijacijom se prikazuje koliko izmjereni podaci variraju, zbog toga se uz aritmetičku sredinu za izradu kontrolnih karata za mjerljive karakteristike, tj.  $\bar{x}$ -R i  $\bar{x}$ -s kontrolne karte, primjenjuju i raspon varijacije i standardna devijacija.

Diskretna slučajna varijabla poprima konačno mnogo vrijednosti, a važno ju je spomenuti jer su razdiobe diskretne slučajne varijable binomna i Poissonova. Binomna i Poissonova razdioba su važne jer su temelj kontrolnih karata za atributivne karakteristike. Neprekidna slučajna varijabla kojima je skup vrijednosti interval u skupu realnih brojeva, a za kontrolu kvalitete su važne jer je razdioba neprekidne slučajne varijable normalna ili Gaussova razdioba.

Normalna ili Gaussova razdioba je temelj kontrolnih karata za mjerljive karakteristike, kao i procjene sposobnosti procesa. Primjenom kontrolnih karata kojima se određuje je li proces pod kontrolom ili nije, tj. je li proces u stanju statističke kontrole postiže se poboljšavanje i održavanje kvalitete proizvoda. Zato je bitna izrada kontrolnih karata za koju je potrebno odrediti središnju liniju procesa kao i gornju i donju kontrolnu granicu.

Kontrolne karte dijele na kontrolne karte za mjerljive karakteristike i na kontrolne karte za atributivne karakteristike. Kontrolne karte za mjerljive karakteristike su  $\bar{x}$ -R,  $\bar{x}$ -s i  $x$ -MR kontrolne karte, dok su kontrolne karte za atributivne karakteristike p-kontrolna karta, np-kontrolna karta, u-kontrolna karta i c-kontrolna karta.



Kontrolne karte za mjerljive karakteristike se odabiru ovisno o veličini uzorka, ako je veličina uzorka 2, veća od 2 i manja od 10 odabiru se  $\bar{x}$ -R kontrolne karte, stoga se centriranost procesa prati aritmetičkom sredinom, dok se rasipanje procesa prati standardnom devijacijom. Kada je zbog primjene razornih ispitivanja veličina uzorka 1 kontrolnim kartama se prati kretanje individualnih mjerenja, kao i razlika izmjerene vrijednosti i njoj prethodno izmjerene vrijednosti.

Kada se želi pratiti kretanje loših komada u procesu primjenjuju se p-kontrolne karte i np-kontrolne karte. Ako su veličine uzoraka različite primjenjuje se p-kontrolna karta, a ako su iste primjenjuje se np-kontrolna karta. Zato što se prati kretanje loših komada te karte se temelje na binomnoj razdiobi.

Kada se kontrolnim kartama želi pratiti broj pogrešaka koriste se u-kontrolne karte i c-kontrolne karte. Ako su veličine uzoraka različite primjenjuje se u-kontrolna karta, ako su iste primjenjuje se c-kontrolna karta, a temelje se na Poissonovoj razdiobi.

Kod procjene sposobnosti procesa prati se proces u rasponu od  $\pm 3\sigma$  od aritmetičke sredine procesa. U procjenu sposobnosti procesa spadaju potencijalna sposobnost procesa, omjer sposobnosti procesa, demonstrirana izvrsnost, donja i gornja potencijalna sposobnost procesa.

Potencijalna sposobnost procesa govori može li se proces nalaziti unutar tolerancijskog polja, dok omjer sposobnosti procesa, koji je recipročna vrijednost potencijalne sposobnosti procesa govori kolika je iskorištenost tolerancijskog polja. Demonstriranom izvrsnosti, tj. određivanjem donje i gornje potencijalne sposobnosti procesa se određuje centriranost procesa, tj. kojoj je granici specifikacija proces bliže. Procjenom sposobnosti procesa se vidi je li proces unutar granica specifikacija, tj. dolazi li do pojave škarta.

## 6. Literatura

- [1] <https://www.enciklopedija.hr/clanak/statistika>, dostupno 30.8.2024.
- [2] <https://www.investopedia.com/terms/q/quality-control.asp>, dostupno 30.8.2024.
- [3] <https://www.linkedin.com/advice/1/how-can-statistical-methods-improve-quality-control-vxgsc>, dostupno 30.8.2024.
- [4] <https://courses.aiu.edu/Operations%20Management/Sec%209/09.Statistical%20Quality%20Control.pdf>, dostupno 30.8.2024.
- [5] Damira Keček, Damir Modrić, Marko Stojić, Vjerojatnost i statistika, Veleučilište u Varaždinu, Varaždin, 2012.
- [6] <http://struna.ihjj.hr/naziv/poligon-frekvencija/33291/>, dostupno 30.8.2024.
- [7] Amalija Horvatić Novak, Statistička obrada podataka i prikaz podataka, prezentacija za predavanje, Sveučilište Sjever, Varaždin, 2024.
- [8] Amalija Horvatić Novak, Metode izbora prioriteta, prezentacija za predavanje, Sveučilište Sjever, Varaždin, 2024.
- [9] <https://support.microsoft.com/hr-hr/office/stvaranje-paretova-grafikona-a1512496-6dba-4743-9ab1-df5012972856>, dostupno 30.8.2024.
- [10] <https://www.vevu.hr/wp-content/uploads/2022/03/Mjere-centralne-tendencije.pdf>, dostupno 30.8.2024.
- [11] Amalija Horvatić Novak, Kontrolne karte, prezentacija za predavanje, Sveučilište Sjever, Varaždin, 2024.
- [12] <https://www.enciklopedija.hr/clanak/mod>, dostupno 30.8.2024.
- [13] <https://www.enciklopedija.hr/clanak/medijan>, dostupno 30.8.2024.
- [14] <https://www.alooba.com/skills/concepts/statistics/measures-of-dispersion/>, dostupno 30.8.2024.
- [15] Amalija Horvatić Novak, Procjena sposobnosti procesa, prezentacija za predavanje, Sveučilište Sjever, Varaždin, 2024.
- [16] <https://www.pmf.unizg.hr/download/repository/PREDAVANJE7.pdf>, dostupno 30.8.2024.
- [17] <https://www.pmf.unizg.hr/download/repository/PREDAVANJE8-bez-kvantila.pdf>, dostupno 30.8.2024.
- [18] Neven Elezović, Vjerojatnost i statistika, Element d.o.o, Zagreb, 2018.
- [19] <https://www.linkedin.com/pulse/normal-distribution-its-applications-quality-control-process-shaikh>, dostupno 30.8.2024.
- [20] <https://www.alphacodingskills.com/scipy/scipy-normal-distribution.php>, dostupno 30.8.2024.
- [21] <https://tehnicki.lzmk.hr/clanak/razdioba-normalna>, dostupno 30.8.2024.
- [22] <https://www.usu.edu/math/schneit/StatsStuff/Probability/probModels9.html>, dostupno 30.8.2024.
- [23] <https://byjus.com/maths/normal-distribution/>, dostupno 30.8.2024.
- [24] <https://www.cec.health.nsw.gov.au/CEC-Academy/quality-improvement-tools/control-charts>, dostupno 30.8.2024.
- [25] <https://www.slideserve.com/annis/kontrolne-karte>, dostupno 30.8.2024.
- [26] [https://www.researchgate.net/figure/Coefficients-for-the-calculation-of-control-chart-lines-authors-study\\_tbl1\\_347245083](https://www.researchgate.net/figure/Coefficients-for-the-calculation-of-control-chart-lines-authors-study_tbl1_347245083), dostupno 30.8.2024.

- [27] <https://www.advantive.com/solutions/spc-software/quality-advisor/data-analysis-tools/x-mr-chart/>, dostupno 30. 8.2024.
- [28] <http://www.dpm.ftn.uns.ac.rs/predmeti/Merenje%20i%20kvalitet/16%20KONTROLNE%20KARTE.pdf>, dostupno 30.8.2024
- [29] <https://www.freecad.rs/tehn%C4%8Dko-crtanje/tolerancijsko-polje>, dostupno 30.8.2024.

## Popis slika

Slika 1 Pareto dijegram.....	4
Slika 2 Graf funkcije normalne razdiobe.....	10
Slika 3 Graf funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable .....	11
Slika 4 Površine ispod Gaussove krivulje .....	12
Slika 5 Vrijednosti funkcije jedinične normalne razdiobe .....	13
Slika 6 Potencijalna sposobnost procesa .....	20
Slika 7 Grafički prikaz poligona frekvencija.....	24
Slika 8 Kontrolna karta kojom se prati $\bar{x}$ .....	28
Slika 9 Kontrolna karta kojom se prati $s$ .....	29
Slika 10 Kontrolna karta kojom se prati $\bar{x}$ .....	32
Slika 11 Kontrolna karta kojom se prati $s$ .....	32
Slika 12 Kontrolna karta kojom se prati $\bar{x}$ .....	35
Slika 13 Kontrolna karta kojom se prati $s$ .....	36

## Popis tablica

Tablica 1 Koeficijenti za $\bar{x}$ -R kontrolne karte .....	15
Tablica 2 Koeficijenti za $\bar{x} - s$ kontrolne karte .....	16
Tablica 3 Vrijednosti izmjerenih dimenzija .....	23
Tablica 4 Frekvencijska tablica .....	24
Tablica 5 Podaci grupirani u razrede .....	24
Tablica 6 Vrijednosti aritmetičkih sredina uzoraka dobivenih mjerenjem.....	25
Tablica 7 Vrijednosti standardnih devijacija uzoraka .....	26
Tablica 8 Vrijednosti aritmetičkih sredina uzoraka dobivenih mjerenjem.....	29
Tablica 9 Vrijednosti standardnih devijacija uzoraka .....	30
Tablica 10 Vrijednosti aritmetičkih sredina uzoraka dobivenih mjerenjem.....	33
Tablica 11 Vrijednosti standardnih devijacija uzoraka .....	34

## Statistika i primjena statistike u kontroli kvalitete

---

### ORIGINALITY REPORT

---

**6%**   
SIMILARITY INDEX

**3%**  
INTERNET SOURCES

**5%**  
PUBLICATIONS

**1%**  
STUDENT PAPERS

---

### MATCH ALL SOURCES (ONLY SELECTED SOURCE PRINTED)

---

1%

★ Aliakbar Montazer Haghghi, Indika  
Wickramasinghe. "Probability, Statistics, and  
Stochastic Processes for Engineers and Scientists",  
CRC Press, 2020

Publication

---

Exclude quotes Off

Exclude matches Off

Exclude bibliography Off

Sveučilište  
Sjever

## IZJAVA O AUTORSTVU

Završni/diplomski/specijalistički rad isključivo je autorsko djelo studenta koji je isti izradio te student odgovara za istinitost, izvornost i ispravnost teksta rada. U radu se ne smiju koristiti dijelovi tuđih radova (knjiga, članaka, doktorskih disertacija, magistarskih radova, izvora s interneta, i drugih izvora) bez navođenja izvora i autora navedenih radova. Svi dijelovi tuđih radova moraju biti pravilno navedeni i citirani. Dijelovi tuđih radova koji nisu pravilno citirani, smatraju se plagijatom, odnosno nezakonitim prisvajanjem tuđeg znanstvenog ili stručnoga rada. Sukladno navedenom studenti su dužni potpisati izjavu o autorstvu rada.

Ja, MELITA NOVAK (ime i prezime) pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor/ica završnog/diplomskog/specijalističkog (obrisati nepotrebno) rada pod naslovom PRIMJENA STATISTIKE U KONTROLI KVALITETE (upisati naslov) te da u navedenom radu nisu na nedozvoljeni način (bez pravilnog citiranja) korišteni dijelovi tuđih radova.

MELITA NOVAK

Student/ica:  
(upisati ime i prezime)

Melita Novak

(vlastoručni potpis)

Sukladno članku 58., 59. i 61. Zakona o visokom obrazovanju i znanstvenoj djelatnosti završne/diplomske/specijalističke radove sveučilišta su dužna objaviti u roku od 30 dana od dana obrane na nacionalnom repozitoriju odnosno repozitoriju visokog učilišta.

Sukladno članku 111. Zakona o autorskom pravu i srodnim pravima student se ne može protiviti da se njegov završni rad stvoren na bilo kojem studiju na visokom učilištu učini dostupnim javnosti na odgovarajućoj javnoj mrežnoj bazi sveučilišne knjižnice, knjižnice sastavnice sveučilišta, knjižnice veleučilišta ili visoke škole i/ili na javnoj mrežnoj bazi završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice, sukladno zakonu kojim se uređuje umjetnička djelatnost i visoko obrazovanje.